

**8. Über drehende Schwingungen von dünnen
Stäben mit rechteckigem Querschnitt und ihre Ver-
wendung zur Messung der Elastizitätskonstanten;
von F. A. Schulze.**

Torsionsschwingungen sind bisher nur für Stäbe mit kreisförmigem Querschnitt berechnet und in der Experimentalphysik benutzt worden. Seitdem jedoch M. de Saint-Venant¹⁾ die Grundlage für die Berechnung der Deformationsgrößen bei der Torsion eines Prismas geschaffen hat, ist man in der Lage, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Torsionswellen auch in Stäben von anderem als kreisförmigen Querschnitt zu berechnen.

Nach bekannten dynamischen Prinzipien ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a von Torsionswellen gegeben durch

$$a = \sqrt{\frac{D}{Jd}},$$

wenn man mit D die Direktionskraft, d. h. das Drehungsmoment für eine Drehung um den Winkel 1 pro Längeneinheit der Torsionsachse, mit d die Dichte des Materiales, und mit J das sogenannte polare Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf seinen Mittelpunkt bezeichnet, wobei J definiert ist durch die Gleichung $J = \int r^2 d\sigma$, wenn q der Querschnitt, r der Abstand eines seiner Punkte vom Mittelpunkt ist.

De Saint-Venant ist es gelungen, die Größe D für verschiedene Querschnittsformen zu berechnen; und zwar ist für elliptischen Querschnitt mit den Halbachsen b und c :

$$D = G \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2}.$$

G bedeutet den Schiebungsmodul

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

1) M. de Saint-Venant, Mém. présentés par div. savants 14. p. 233—560. 1856.

E den Elastizitätsmodul, μ das Verhältnis von Querkontraktion zur Längsdehnung. Für rechteckigen Querschnitt ist, wenn $2b$ und $2c$ die Kantenlängen sind:

$$D = G b c^3 \left\{ \frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi} \right)^5 \frac{c}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \frac{e^{\frac{2n-1}{2c}\pi b} - e^{-\frac{2n-1}{2c}\pi b}}{e^{\frac{2n-1}{2c}\pi b} + e^{-\frac{2n-1}{2c}\pi b}} \right\}. ^1)$$

Da ferner für die Ellipse:

$$J = \frac{\pi b c}{4} (b^2 + c^2),$$

für das Rechteck:

$$J = \frac{4}{3} b c (b^2 + c^2),$$

so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Torsionswellen in einem Stabe mit elliptischem Querschnitt

$$a = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)}} \frac{2 b c}{b^2 + c^2},$$

oder, wenn wir das Verhältnis der Achsenlängen c/b mit v bezeichnen:

$$a = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)d}} \frac{2 v}{1+v^2},$$

also unabhängig von v . Für rechtwinkligen Querschnitt ist

$$a = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)d}} \sqrt{\frac{3}{4(1+v^2)}} v \left\{ \frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi} \right)^5 v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \frac{e^{\frac{2n-1}{2v}\pi} - e^{-\frac{2n-1}{2v}\pi}}{e^{\frac{2n-1}{2v}\pi} + e^{-\frac{2n-1}{2v}\pi}} \right\},$$

also ebenfalls nur abhängig von dem *Verhältnis* der Kantenlängen. Bei Vertauschung von b und c , oder Ersetzung von v durch $1/v$, behält der Ausdruck von a seinen Wert, wie M. de Saint-Venant zeigt.²⁾

1) M. de Saint-Venant, l. c. p. 335 u. 370.

2) Der von A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper, p. 261. Leipzig 1862 angegebene Wert von a ist mit dem hier angegebenen identisch, wenn man berücksichtigt, daß die dort mit B_0 bezeichnete Funktion dieselbe ist, wie die von M. de Saint-Venant mit u bezeichnete Funktion, die die Verrückungen in Richtung der Torsionsachse angibt. (In dem einfachsten Fall des kreisförmigen Querschnittes ist $u = B_0 = 0$.)

Ist v klein, also der Stab dünn, so vereinfacht sich dieser Ausdruck erheblich, und zwar wird ¹⁾

$$a = \sqrt{\frac{E}{2d(1+\mu)}} \frac{2v}{\sqrt{1+v^2}} \sqrt{1 - 0,630249v}.$$

Selbst für gar nicht so sehr kleine Werte von v ist diese Formel schon mit sehr großer Genauigkeit richtig.

Für $v = \frac{1}{3}$ z. B. würde die Abweichung vom wahren Wert erst etwa $\frac{1}{100}$ Promille betragen.

Schreibt man

$$a = \sqrt{\frac{E}{2d(1+\mu)}} \sqrt{1+v^2} \sqrt{1 - 0,630249v} \cdot \frac{2v}{1+v^2},$$

so tritt die Analogie mit dem Ausdruck für elliptischen Querschnitt hervor. Bei gleicher Größe von v ist also die Geschwindigkeit der Torsionswellen in Stäben von rechteckigem Querschnitt größer als in Stäben von elliptischem Querschnitt von gleichem Achsenverhältnis, und zwar im Verhältnis

$$1 : \sqrt{(1+v^2)(1 - 0,630249v)}.$$

Die Abweichung beträgt für $v = 0,1$ nur etwa 2 Proz., dagegen für $v = 0,2$ bereits ungefähr 10 Proz.

Übrigens hat de Saint-Venant²⁾ für D auch sehr bequeme Annäherungsformeln gegeben, nämlich

$$D = GK \frac{\sigma^4}{J},$$

wo σ der Flächeninhalt des Querschnittes und K eine Konstante ist. Für elliptischen Querschnitt ist genau $K = 1/4 \pi^2$, für rechteckigen Querschnitt

für	$b = c$	$b = 2c$	$b = 4c$	$b = 8c$
	$K = 0,0224$	$0,0238$	$0,0249$	$0,0260$

Hiernach wird für rechteckigen Querschnitt

$$a = \sqrt{\frac{E}{2d(1+\mu)}} \frac{v}{1+v^2} 12 \sqrt{K},$$

für elliptischen Querschnitt

$$a = \sqrt{\frac{E}{2d(1+\mu)}} \frac{v}{1+v^2} \cdot 2.$$

1) M. de Saint-Venant, l. c. p. 373.

2) M. de Saint-Venant, Compt. rend. 88. p. 142. 1879.

Ist der Stab so eingeklemmt, daß das eine Ende fest, das andere frei ist, so ergeben sich bei der Stablänge l in bekannter Weise für die Schwingungszahlen N der Torsionsschwingungen

$$N = \frac{(2n-1)\alpha}{4l}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Also bei rechteckigem Querschnitt, wenn v klein ist:

$$(1) \quad N_{\text{tors.}} = \frac{2n-1}{4l} \sqrt{\frac{E}{2d(1+\mu)}} 2v \sqrt{\frac{1-0,630249v}{1+v^2}}. {}^1)$$

Hiermit mögen zusammengestellt werden die Schwingungszahlen desselben einseitig befestigten Stabes mit rechteckigem Querschnitt bei longitudinalen und bei transversalen (Biegungs-) Schwingungen. Es ist

$$(2) \quad N_{\text{long.}} = \frac{2n-1}{4l} \sqrt{\frac{E}{d}},$$

$$(3) \quad N_{\text{transv.}} = \frac{2\varepsilon^2 \pi c}{\sqrt{3} 4 l^2} \sqrt{\frac{E}{d}} {}^2),$$

wo

$$\varepsilon = 0,59686, \quad 1,49418, \quad 2,50025, \quad 3,4999 \dots \frac{2n-1}{2}.$$

Zur Bestimmung der beiden Elastizitätskonstanten E und μ bez. E und dem Torsionsmodul $E/2(1+\mu)$ kann man nun einmal $N_{\text{tors.}}$ und $N_{\text{long.}}$ benutzen. Dies ist von Wertheim³⁾ und Schneeбели⁴⁾ an Stäben von kreisförmigem Querschnitt ausgeführt, und aus dem Verhältnis $N_{\text{long.}}/N_{\text{tors.}}$ die Konstante μ

1) A. Clebsch macht l. c. p. 261 folgende Bemerkung: „Freilich kann man diese Zahlen in diesem Fall nicht mehr als die Repräsentanten von Tönen ansehen.“ Diese Bemerkung ist vielleicht ähnlich aufzufassen wie eine (nach mündlicher Mitteilung) von Hrn. Prof. Richarz aufgeworfene Frage, wie bei Torsions-„Tönen“ bei Stäben von kreisförmigem Querschnitt die Übertragung der Schwingungen auf die Luft erfolgt. Der Unterschied in der Tonstärke ist bei gleich starkem Anstreichen mit dem Bogen für Stäbe von kreisförmigem und rechteckigem Querschnitt sehr auffallend. Bei ersterem ist der Torsionston nur eben wahrzunehmen, bei letzterem durch das ganze Zimmer gut zu hören.

2) Vgl. z. B. A. Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik 1. p. 769.

3) G. Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3) 50. p. 262. 1857.

4) H. Schneeбели, Pogg. Ann. 140. p. 598. 1870.

bestimmt. Oder aber man könnte $N_{\text{tors.}}$ und $N_{\text{transv.}}$ bestimmen und daraus E und μ berechnen, bez. wenn es nur auf die Bestimmung von μ ankommt, den Quotienten $N_{\text{tors.}}/N_{\text{transv.}}$ ermitteln. Und zwar hat dieses Verfahren vor dem von Wertheim und Schneebeili benutzten bedeutende Vorteile, wenn man den zu untersuchenden Stäben nicht kreisförmigen, sondern schmalen rechteckigen Querschnitt gibt. Bei solchen Stäben sind nämlich einmal torsionale Schwingungen sehr viel leichter zu erzeugen als bei Stäben mit Kreisquerschnitt und geben auch sehr viel lautere, direkt stark hörbare Töne. (Vgl. die Anmerkung p. 586.) Ferner aber, und darin liegt wohl der Hauptvorteil, kommt man mit verhältnismäßig geringer Dimension, also wenig Material aus, wie aus den unten mitgeteilten Beispielen ersichtlich ist. Bei der von Wertheim und Schneebeili angewandten Methode mußten die Stäbe ungefähr eine Länge von 1 m haben, damit sowohl die Torsions- wie die Longitudinalspannungen bequem zu erzeugen waren, so daß also Unterschiede in der Homogenität leicht zu befürchten sind. Demgegenüber braucht die Länge der Stäbchen bei Anwendung der jetzt zu beschreibenden Methode mit schmalen rechteckigen Querschnitt nicht über 10 cm zu betragen und kann sicher noch bedeutend kleiner genommen werden.

Will man die Konstante E und μ bez. E und den Torsionsmodul $E/2(1+\mu)$ einzeln bestimmen, so hat man natürlich die Formeln (1) und (3) direkt anzuwenden. Kommt es nur auf die Bestimmung von μ an, so kann man zweifach verfahren. Entweder man bestimmt $N_{\text{transv.}}/N_{\text{tors.}}$ bei derselben Länge des Stäbchens, oder aber man ermittelt diejenigen Längen $l_{\text{transv.}}$ und $l_{\text{tors.}}$, für welche der Transversalton gleich dem Torsionston ist. Bezeichnen wir die Höhe des Stäbchens $2c$ mit h , die Breite $2b$ mit B , so wird, da $v = h/B$ ist

$$N_{\text{tors.}} = \frac{2n-1}{4l} \sqrt{\frac{E}{2d(1+\mu)}} \sqrt{1-0,630249v} \frac{2h}{B\sqrt{1+v^2}},$$

$$N_{\text{transv.}} = \frac{\varepsilon^2 \pi h}{4\sqrt{3}l^2} \sqrt{\frac{E}{d}}.$$

Demnach:

$$\frac{N_{\text{tors.}}}{N_{\text{transv.}}} = \frac{2n-1}{\pi \varepsilon^2} \frac{l\sqrt{3}}{B} \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)}} \sqrt{\frac{1-0,630249v}{1+v^2}}.$$

Im ersten Fall wird also, wenn wir das experimentell zu bestimmende Tonintervall $N_{\text{tors.}}/N_{\text{transv.}}$ mit i bezeichnen,

$$\mu = 0,60793 \frac{(2n-1)^2}{\varepsilon^4 d^2} \frac{l^2}{B} \cdot \frac{1 - 0,630249 v}{1 + v^2} - 1. \quad v = \frac{h}{B}.$$

Im zweiten Fall ist $N_{\text{tors.}} = N_{\text{transv.}}$, oder

$$\frac{2n-1}{4 l_{\text{tors.}}} \sqrt{\frac{E}{2 d (1 + \mu)}} 2 v \sqrt{\frac{1 - 0,630249 v}{1 + v^2}} = \frac{\varepsilon^2 \pi h}{4 \sqrt{3} l_{\text{transv.}}^2} \sqrt{\frac{E}{d}}.$$

Daraus

$$\mu = \frac{0,60793}{\varepsilon^4} \frac{(2n-1)^2}{B^2} \frac{l_{\text{transv.}}^4}{l_{\text{tors.}}^2} \frac{1 - 0,630249 v}{1 + v^2} - 1. \quad v = \frac{h}{B}.$$

Wie man sieht, kommt in beiden Ausdrücken für μ die Größe h , die kürzeste Kantenlänge des rechteckigen Querschnittes, bei deren Messung am leichtesten ein beträchtlicher prozentischer Fehler gemacht werden könnte, explizit nicht mehr vor; sie steckt noch in v ; jedoch ändert sich der Ausdruck $1 - 0,630249 v/1 + v^2$ nur sehr wenig mit v , wenn v klein ist, z. B. ist für

$$v = 0,10 : \frac{1 - 0,630249 v}{1 + v^2} = 0,9277,$$

$$v = 0,15 : \frac{1 - 0,630249 v}{1 + v^2} = 0,8855,$$

$$v = 0,20 : \frac{1 - 0,630249 v}{1 + v^2} = 0,8403.$$

Sogar ein sehr erheblicher Fehler bei der Messung von h fälscht den Wert von μ nur außerordentlich wenig.

Messungen.

Die eigentlichen Messungen wurden an Stäben aus Gußstahl, Messing, Wismut, Glas und Ebonit ausgeführt. Die Breite B betrug bei allen ungefähr 1 cm, die Höhe h zwischen ca. 1—2 mm.

Die Stäbe aus Gußstahl und Messing waren übrigens dieselben, die F. Melde¹⁾ zur Bestimmung der Schwingungs-

1) F. Melde, Wied. Ann. 52. p. 238—261. 1894; 66. p. 767—780. 1898.

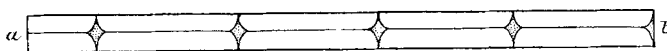
zahlen sehr hoher Töne nach der von ihm angegebenen Resonanzmethode verwendet hat. Auch zur Festklemmung des einen Endes der Stäbe diente die sehr zweckmäßige von F. Melde bei jenen Messungen benutzte Klemmvorrichtung.¹⁾ Zur Erzeugung der Torsionsschwingungen hält man den Mittelpunkt des freien Endquerschnittes durch Gegendrücken einer feinen Spitze fest und streicht mit dem Bogen an dem langen Rande nahe dem Ende oder besser am Endquerschnitt selbst. Der entstehende Ton ist überaus intensiv. Gewöhnlich entsteht natürlich der erste Torsionston; man erhält auch leicht den zweiten, und, wenn man die entsprechenden Knotenlinien festhält, auch höhere, wovon man sich durch aufgestreuten Sand leicht überzeugen kann. Durch das Gehör erkennt man leicht, daß der zweite Torsionston die Quinte der Oktave des ersten ist. Der Sand sammelt sich in einer haarscharfen Linie in der Mittellinie parallel der Längsachse an und bildet in den Knotenlinien leicht geschweifte Vierecke, deren Mittelpunkt auf der Mittelachse liegt (vgl. die Figur auf p. 590). In analoger Weise erhält man die Transversalschwingungen bis zu sehr hoher Ordnung sehr kräftig, indem man mit der feinen Spitze auf einer der beiden schmalen in der Längsrichtung parallelen Flächen in der Mittelfaser an der Stelle des dem Ende zunächst liegenden Knotens die Bewegung verhindert. Durch aufgestreuten Sand ist wieder leicht zu erkennen, den wievielten Transversalton man erhalten hat.

Falls man die Länge des Stäbchens nicht zu klein und die Ordnungszahlen der Schwingungen nicht zu groß genommen hat, sind bei den gewählten Dimensionen die Töne noch vollkommen im Bereich der hörbaren und dem Intervall nach erkennbaren Schwingungszahlen, wie aus den nachstehend mitgeteilten Versuchen zu ersehen ist. Es wurde nun stets die zweite der angegebenen Methoden benutzt, also immer die Längen $l_{\text{transv.}}$ und $l_{\text{tors.}}$ aufgesucht, bei denen der Transversalton und der Torsionston *dieselbe* Schwingungszahl hatte. Bei der verhältnismäßig starken Intensität der Töne konnte dies leicht so erreicht werden, daß die Längen so lange geändert

1) Abgebildet und beschrieben Wied. Ann. 66. p. 772. 1898.

wurden, bis beide Töne mit *derselben* Stimmgabel keine Schwebungen mehr lieferten, oder auch mit derselben Genauigkeit, bis der erzeugte Ton des Stabes die nahebei aufgestellte, mit Resonanzboden versehene Stimmgabel zur maximalen Resonanz anregte. Auf beide Weisen konnte nach kurzer Übung die Länge auf etwa $\frac{1}{4}$ mm genau in kurzer Zeit ermittelt werden, und zwar gleich gut für den Torsions-, wie für den Transversalton. Ist die Schwingungszahl der Stimmgabel bekannt, so erhält man *beide* Elastizitätskonstanten, ist sie unbekannt, so kann man μ berechnen.

Natürlich könnte man zur Ermittlung der Schwingungszahlen auch in leicht ersichtlicher Weise die Kundtschen Staubfiguren benutzen; auch könnte man sie nach der von Melde zur Messung hoher Schwingungszahlen ausgearbeiteten Resonanzmethode bestimmen. Doch empfiehlt es sich mehr,



($\frac{1}{2}$ nat. Größe.)

a freies Ende, b festes Ende.

letztere hier in folgender Weise anzuwenden: Derselbe hohe Ton, etwa der einer Meldeschen Stimmlatte, wird auf den zu untersuchenden Stab übertragen, und zwar einmal so, wie Melde dies ausführlich beschrieben hat, daß der Stab *transversal* schwingt, ein anderes Mal dagegen so, daß der Stab *Torsionsschwingungen*, natürlich der gleichen Periode ausführt. Diese übertragenen Torsionsschwingungen entstehen überraschend leicht, falls man die richtige Länge gefunden hat; man braucht nicht einmal den Mittelpunkt der Endfläche festzuhalten, man muß nur den die Schwingung übertragenden Korkkeil nicht ganz genau auf die Mitte der Endkante des Stabes aufsetzen. Bei diesem Verfahren ist also die Mitwirkung des Gehörs nicht nötig. Daß die Torsionsschwingung vorhanden ist, wird, wie bei den Transversalschwingungen, durch aufgestreuten Sand erkannt, der sich in den Knotenlinien anhäuft. Vorstehend ist eine derartige Sandfigur abgebildet, die auf einem Stahlstab von 165 mm Länge, 1 cm Breite und 0,2 cm Dicke durch Übertragung der Schwingung einer Meldeschen Stimmlatte von 16384 v. d. erhalten wurde.

Wie man sieht, schwingt der Stab mit dem 5. Torsionston. Die angegebene Methode ist eine dynamische, ist also frei von den durch die elastische Nachwirkung entstehenden Fehlern. Da die Schwingungsbewegungen kaum sichtbare Elongationen erreichen, so ist selbstverständlich Einhaltung der Elastizitätsgrenze gewährleistet.

Es mögen noch einige nach der beschriebenen Methode ausgeführten Messungen mitgeteilt werden.

1. Stahlstab Nr. 1.

$$h = 0,152 \text{ cm}, \quad B = 0,995 \text{ cm}, \quad d = 7,801.$$

$$1. \text{ Torsionston} = 1024 \text{ v. d. bei } l_{\text{tors.}} = 22,30 \text{ cm.}$$

$$3. \text{ Transversalton} = 1024 \text{ v. d. „ } l_{\text{transv.}} = 14,55 \text{ cm.}$$

$$\text{Daraus } E = 18952 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}, \quad \frac{E}{2(1+\mu)} = 8106 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}, \quad \mu = 0,169.$$

$$1. \text{ Torsionston} = 896 \text{ v. d. bei } l_{\text{tors.}} = 25,55 \text{ cm.}$$

$$3. \text{ Transversalton} = 896 \text{ v. d. „ } l_{\text{transv.}} = 15,40 \text{ cm.}$$

$$\text{Daraus } E = 19142, \quad \frac{E}{2(1+\mu)} = 8111, \quad \mu = 0,180.$$

2. Stahlstab Nr. 2.

$$h = 0,100 \text{ cm}, \quad B = 1,00 \text{ cm}, \quad d = 7,798.$$

$$1. \text{ Torsionston} = 2048 \text{ v. d. bei } l_{\text{tors.}} = 7,40 \text{ cm,}$$

$$\text{oder } = 1024 \text{ v. d. „ } l_{\text{tors.}} = 14,80 \text{ cm.}$$

$$3. \text{ Transversalton} = 1024 \text{ v. d. „ } l_{\text{transv.}} = 11,65 \text{ cm.}$$

$$\text{Daraus } E = 19120, \quad \frac{E}{2(1+\mu)} = 7873, \quad \mu = 0,220.$$

3. Stahlstab Nr. 3.

$$h = 0,199 \text{ cm}, \quad B = 0,9998, \quad d = 7,800.$$

$$1. \text{ Torsionston} = 2048 \text{ v. d. bei } l_{\text{tors.}} = 14,25 \text{ cm.}$$

$$3. \text{ Transversalton} = 2048 \text{ v. d. „ } l_{\text{transv.}} = 11,69 \text{ cm.}$$

$$\text{Daraus } E = 19120, \quad \frac{E}{2(1+\mu)} = 8084, \quad \mu = 0,182.$$

$$1. \text{ Torsionston} = 2048 \text{ v. d. bei } l_{\text{tors.}} = 14,25 \text{ cm.}$$

$$3. \text{ Transversalton} = 1024 \text{ v. d. bei } l_{\text{transv.}} = 16,60 \text{ cm.}$$

$$\text{Daraus } E = 19220, \quad \frac{E}{2(1+\mu)} = 8084, \quad \mu = 0,189.$$

4. Wismutstab.

$$h = 0,200 \text{ cm}, \quad B = 0,999 \text{ cm}, \quad d = 9,90.$$

1. Torsionston = 2048 v. d. bei $l_{\text{tors.}}$ = 10,00 cm,
 oder = 1024 v. d. „ $l_{\text{tors.}}$ = 20,00 cm,
 2. Transversalton = 1024 v. d. „ $l_{\text{transv.}}$ = 8,09 cm.

$$\text{Daraus } E = 3293, \quad \frac{E}{2(1+\mu)} = 1372, \quad \mu = 0,200.$$

5. Messingstab.

$$h = 0,195 \text{ cm}, \quad B = 0,995 \text{ cm}, \quad d = 8,300.$$

1. Torsionston = 2048 v. d. bei $l_{\text{tors.}}$ = 9,38 cm.
 3. Transversalton = 2048 v. d. „ $l_{\text{transv.}}$ = 9,42 cm.

$$\text{Daraus } E = 9308, \quad \frac{E}{2(1+\mu)} = 3908, \quad \mu = 0,191.$$

6. Glasstab.

$$h = 0,165 \text{ cm}, \quad B = 1,005 \text{ cm}, \quad d = 2,500.$$

1. Torsionston = 2048 v. d. bei $l_{\text{tors.}}$ = 13,30 cm.
 2. Transversalton = 2048 v. d. „ $l_{\text{transv.}}$ = 7,15 cm.

$$\text{Daraus } E = 7722, \quad \frac{E}{2(1+\mu)} = 3191, \quad \mu = 0,210.$$

7. Ebonitstab.

$$h = 0,200 \text{ cm}, \quad B = 1,00 \text{ cm}, \quad d = 0,8316.$$

1. Torsionston = 1024 v. d. bei $l_{\text{tors.}}$ = 9,00 cm.
 3. Transversalton = 1024 v. d. „ $l_{\text{transv.}}$ = 9,45 cm.

$$\text{Daraus } E = 2087, \quad \frac{E}{2(1+\mu)} = 849, \quad \mu = 0,299.$$

Für den Stahlstab Nr. 3 kann man auch die Elastizitätsgrößen aus den nach der Meldeschen Methode durch die Stimplatte mit der Schwingungszahl $N = 16384$ v. d. auf den Stab übertragenen Schwingungen berechnen, für die die Torsionsschwingung die abgebildete Sandfigur ergab. Bei diesem Stahlstab ergab sich der 12. Transversalton bei Übertragung durch dieselbe Stimplatte bei einer Länge von $l_{\text{transv.}} = 18,88$ cm. Es war also hier:

5. Torsionston = 16384 v. d. bei $l_{\text{tors.}}$ = 16,39 cm.
 12. Transversalton = 16384 v. d. „ $l_{\text{transv.}}$ = 18,88 cm.

$$\text{Daraus } E = 19130, \quad \frac{E}{2(1+\mu)} = 8038, \quad \mu = 0,190.$$

Die benutzten Stimmgabeln stammen von R. König in Paris. (Die Gabel mit 896 Schwingungen von seinem Geschäftsnachfolger Landry.)

Die Genauigkeit der einzelnen Messung ist, da die Längen auf etwa $\frac{1}{4}$ mm eingestellt werden können, für E etwa $\frac{1}{3}$ Proz., für $E/2(1+\mu)$ etwa $\frac{1}{6}$ Proz. Nimmt man den ungünstigsten Fall, daß $l_{\text{transv.}}$ $\frac{1}{4}$ mm zu groß (klein), $l_{\text{tors.}}$ $\frac{1}{4}$ mm zu klein (groß) bestimmt wird, so resultiert ein Fehler in der Bestimmung von μ um etwa 4 Proz. Durch mehrfache Messungen läßt sich natürlich dieser Fehler verringern.

Die für E und $E/2(1+\mu)$ gefundenen Werte liegen ungefähr in den nach anderen Methoden gefundenen Werten. Was die Werte von μ betrifft, so sind sie außer bei Ebonit kleiner als der von der Poissonschen Theorie geforderte Wert $\mu = \frac{1}{4}$. Für Stahl und Messing liegen die sonst gefundenen Werte von μ meist um 0,30.

Jedoch findet z. B. Baumeister¹⁾ für Eisendrähte von 0,5—1,0 mm $\mu=0,23$, A. Bock²⁾ für Stahl $\mu=0,256$. Überhaupt sind Werte von μ unter 0,25 keine Seltenheit. So findet Katzenelsohn³⁾ für Platin $\mu=0,16$, für Gold $\mu=0,17$, für Aluminium $\mu=0,13$. Ferner ist nach den Versuchen von Cl. Schäfer⁴⁾ für Silber $\mu=0,195$. Und gerade die von Schäfer gefundenen Werte von μ sind in Verbindung mit seinen Messungen der Temperaturkoeffizienten von E und $E/2(1+\mu)$ besonders glaubwürdig, weil sie so vorzüglich dem von ihm gefundenen Gesetz folgen, daß μ bei Annahme linearer Änderung von E und $E/2(1+\mu)$ mit der Temperatur beim Schmelzpunkt genau den Wert $\frac{1}{2}$ ergibt.

Für Glas liegen die meisten Werte von μ zwischen 0,20 und 0,25. Der hier gefundene Wert ist fast genau derselbe, den W. Voigt⁵⁾ an einem Spiegelglasstreifen gefunden hat, dessen Isotropie er besonders nachgewiesen hat, und zwar ist besonders bemerkenswert, daß die dabei von W. Voigt angewandte Methode der hier benutzten ganz analog ist, indem

1) M. Baumeister, Wied. Ann. 18. p. 578. 1883.

2) A. Bock, Wied. Ann. 52. p. 209. 1894.

3) N. Katzenelsohn, Inaug.-Diss. Berlin 1887.

4) Cl. Schäfer, Ann. d. Phys. 5. p. 233. 1901.

5) W. Voigt, Wied. Ann. 16. p. 497—513. 1882.

dort der statische Zustand, hier der dynamische Vorgang zur Verwendung kommt.

Für Ebonit findet Mallock¹⁾ $\mu = 0,389$.

Der Wert von E scheint für Ebonit bisher noch nicht gemessen zu sein.

Für Wismut scheinen beide Elastizitätskonstanten bisher noch nicht bestimmt zu sein, wenigstens konnte ich in der Literatur keine Angaben darüber finden.

Es dürfte nach diesen Ergebnissen die Vermutung, daß μ einmal nicht genau den Wert 0,25 zu haben braucht und ferner überhaupt von Stoff zu Stoff verschieden ist, eine neue Stütze erfahren haben.

Die beschriebene Methode zur Messung der Elastizitätskonstanten dürfte sich überall, wo das Material leicht in Stabform zu bringen ist, empfehlen, und zwar erstens wegen des geringen Materialbedarfs, ferner wegen der Genauigkeit und Einfachheit der Messung, schließlich wegen der kurzen Zeit, die sie erfordert — eine solche Messung beider Elastizitätskonstanten ist eine Sache *weniger Minuten*.

Die Methode soll zunächst zur Messung der Elastizitätskonstanten von Wismut-Zinnlegierungen benutzt werden. Die Elastizitätsverhältnisse scheinen hier eine ähnliche Anomalie zu haben, wie die thermischen und elektrischen Leitfähigkeiten.²⁾ Diejenige Legierung von Wismut und Zinn nämlich, die ein Minimum der genannten Leitfähigkeiten hat, besitzt eine abnorm große Sprödigkeit, so daß die Bearbeitung dieser Legierung Schwierigkeiten bietet. Bei kleinerem und größerem Zinngehalt scheint die Sprödigkeit schnell wieder abzunehmen.

Marburg, Physik. Institut der Universität.

1) A. Mallock, Proc. Roy. Soc. 29. p. 157. 1879.

2) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. 9. p. 555. 1902.

(Eingegangen 9. November 1903.)