

Ueber ternäre bilineare Formen.

Von

P. MUTH in Osthofen (Rheinhausen).

Derjenige besondere Fall, wo sämtliche Formen eines Büschels von ternären bilinearen Formen singulär sind, ist von Herrn Pasch gelegentlich seiner Untersuchungen über bilineare Formen (Math. Ann. 1891, Bd. 38, S. 39 u. 40) berührt und theilweise erledigt worden.*)

Die Untersuchungen über jenen Ausnahmefall mögen durch die folgenden Ausführungen vervollständigt werden. Es wird sich dabei zeigen, dass gerade der noch zu behandelnde Theil desselben bei der Lösung eines gewissen Zerlegungsproblems in Betracht kommt, auf das wohl zuerst Clebsch hingewiesen hat (in einer Abhandlung über die Connexe, Math. Ann. 1873, Bd. VI, S. 205 u. 206).

Wir gehen mit Rücksicht auf die Theorie der Connexe von bilinearen Formen contragredienter Veränderlichen aus und werden uns, da die Resultate auf algebraisch-geometrischem Wege erzielt und hier insbesondere singuläre Formen der eben genannten Art betrachtet werden, zunächst mit den singulären Collineationen in der Ebene befassen (§ 1), wodurch wir zu einer einfachen Lösung des erwähnten Problems gelangen (§ 2). Dasselbe wird dann umgekehrt (§ 3), wobei interessante Identitäten auftreten.

Auf eine Reihe noch offener Fragen der Formentheorie, welche mit diesen Untersuchungen in enger Beziehung stehen, soll an geeigneter Stelle wenigstens hingewiesen werden.

*) Es wird a. a. O. das identische Verschwinden einer gewissen simultanen Covariante der Grundformen des Büschels vorausgesetzt, dasselbe im Folgenden dagegen ausgeschlossen.

§ 1.

Singularäre Collineationen.

1. Wir betrachten die bilineare Form $\sum a_{ik} x_i u_k$ ($i, k = 1, 2, 3$) der contragredienten ternären Veränderlichen $x_1 | x_2 | x_3$ und $u_1 | u_2 | u_3$, welche wir mit $f(xu)$ bezeichnen. Wir setzen ferner

$$\begin{aligned} f(xu) &= \sum x_i f_i(u) = \sum u_i f(x)_i \quad (i = 1, 2, 3), \\ \det f(xu) &= \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} = \Delta, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} = a_{ik}, \\ \operatorname{adj} f(xu) &= \sum a_{ik} x_k u_i = \varphi(xu), \\ &\quad (i, k = 1, 2, 3); \\ \varphi(xu) &= \sum x_i \varphi_i(u) = \sum u_i \varphi(x)_i \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Wir führen jetzt in einer Ebene lineare Coordinaten ein und betrachten $x_1 | x_2 | x_3$ als Coordinaten eines Punktes x , $u_1 | u_2 | u_3$ als Coordinaten einer Geraden u . Durch die Gleichung $f(xu) = 0$ wird alsdann dem Punkte $x = x_1 | x_2 | x_3$ der Punkt $x' = f(x)_1 | f(x)_2 | f(x)_3$ zugeordnet.

Die Beziehung zwischen x und x' heisst, wenn Δ von Null verschieden ist, bekanntlich eine ebene Collineation; sie wird auch eine eigentliche Collineation genannt im Gegensatz zu der Beziehung zwischen x und x' im Falle $\Delta = 0$ ist, welch' letztere eine uneigentliche oder singularäre Collineation*) genannt wird.

Sprechen wir von einer Collineation schlechthin, so ist stets eine eigentliche gemeint.

2. Wir setzen jetzt $\Delta = 0$ voraus, nehmen aber an dass $\varphi(xu)$ nicht identisch Null ist (in Zeichen: $\varphi(xu) \equiv 0, \Delta = 0$).

Die Form $f(xu)$ heisst in diesem Falle zweitheilig, da sich $f(xu)$ auf die Form

$$\kappa \alpha_x u_b + \lambda \beta_x u_a$$

bringen lässt, wo $\alpha_x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ u. s. w. Die Geraden $\alpha_1 | \alpha_2 | \alpha_3$ und $\beta_1 | \beta_2 | \beta_3$ bestimmen einen Punkt p , die Punkte $a_1 | a_2 | a_3$ und $b_1 | b_2 | b_3$ eine Gerade π .

Bildet man zu $\kappa \alpha_x u_b + \lambda \beta_x u_a$ die adjungirte Form, so erhält man $\kappa \lambda \pi_x u_p$, wenn

$$p_i = (\alpha \beta)_i, \quad \pi_i = (b a)_i$$

*) Singularäre Collineationen werden im Zusammenhange betrachtet von Herrn Segre: Atti della R. Academia dei Lincei 1884, Serie 3, XIX.

genommen wird. Bei $\Delta = 0$ zerfällt die Form $\varphi(xu)$, wenn sie nicht identisch verschwindet.

3. Da man die Geraden α und β im Strahlenbüschel p beliebig wählen kann, so kann man die Form $f(xu) = 0$ bei $\Delta = 0$, $\varphi(xu) \equiv 0$ in obiger Weise auf ∞^2 Arten darstellen.

Die singuläre Collineation $f(xu) = 0$ vermittelt in diesem Falle eine projective Beziehung zwischen den Strahlen des Punktes p und den Punkten der Geraden π . Dem Punkte p entspricht jeder Punkt der Ebene. Einem von p verschiedenen Punkte x entspricht ein Punkt x' auf π , der homologer Punkt aller auf px liegenden Punkte ist. Jeder Geraden von p ist auf diese Weise ein Punkt auf π zugeordnet. Die Beziehung ist eindeutig, also projectiv.

Man nennt deshalb bei zweitheiligem $f(xu)$ die singuläre Collineation $f(xu) = 0$ auch eine Projectivität (singuläre Collineation erster Art bei Segre). Wenn die Projectivität $f(xu) = 0$ eine Beziehung zwischen dem Punkte p und der Geraden π herstellt, sprechen wir von einer durch $f(xu) = 0$ gegebenen Projectivität p, π .

4. Ist $\varphi(xu) \equiv 0$, so zerfällt die Form $f(xu)$. Jedem nicht auf einer bestimmten Geraden liegenden Punkte entspricht vermöge $f(xu) = 0$ derselbe Punkt, einem Punkte jener Geraden aber jeder Punkt der Ebene. Die singuläre Collineation $f(xu) = 0$ heisst in diesem Falle eine specielle bei Rosanes, eine singuläre Collineation zweiter Art bei Segre.

5. Ordnet man drei Geraden eines Punktes p drei Punkte einer Geraden π bez. zu, so giebt es eine singuläre Collineation $f(xu) = 0$, welche die so festgelegte projective Beziehung zwischen p und π vermittelt.

Da man die Zuordnung beliebig vornehmen kann, so ist die Projectivität $f(xu) = 0$, welche wir so erhalten, eine allgemeine zu nennen und umgekehrt jede Projectivität von allgemeiner Natur, so lange $f(xu)$ nur den Bedingungen $\Delta = 0$, $\varphi(xu) \equiv 0$ unterliegt.

Bei der Classificirung der singulären Collineationen dieses Art kann man nach den von Herrn Segre a. a. O. aufgestellten Grundsätzen verfahren. Allen möglichen Lagen eines Strahlenbüschels p gegen eine zu ihm projective Punktreihe π entsprechen die verschiedenen Classen von singulären Collineationen $f(xu) = 0$ bei zweitheiligem $f(xu)$.

Für unsere späteren Betrachtungen sind besonders die Fälle von Interesse, in welchen durch das, einzeln oder gleichzeitige eintretende, Verschwinden der Invarianten

$$i = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad i_\varphi = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$$

der Form $f(xu)$ eine besondere Lage des Büschels p gegen die

Punktreihe π eintritt, wenn $f(xu) = 0$ eine Projectivität p, π vorstellt.

Nehmen wir zunächst an, die Invariante i_φ sei Null. Wir setzen nach 2

$$f(xu) = \kappa \alpha_x u_b + \lambda \beta_x u_a, \quad \varphi(xu) = \kappa \lambda \pi_x u_p;$$

dann wird

$$i_\varphi = \kappa \lambda \pi_p$$

und $i_\varphi = 0$ besagt, dass die Elemente π und p aneinander liegen. Also:

Bei $\Delta = 0$, $\varphi(xu) \equiv 0$, $i_\varphi = 0$ werden durch die Gleichung $f(xu) = 0$ die Geraden eines Punktes p der Ebene projectivisch auf die Punkte einer durch p gehenden Geraden π bezogen:

Ist hingegen $i = 0$ und i_φ zunächst von Null verschieden, so erhalten wir bei obiger Darstellung von $f(xu)$

$$i = \kappa a_\beta + \lambda b_\alpha = 0.$$

Es kann aber $a_\beta = 0$ gewählt werden (2), also wird bei $i = 0$ auch $b_\alpha = 0$, m. a. W.:

Ist durch die Gleichung $f(xu) = 0$ eine Projectivität p, π gegeben und $i_\varphi = 0$, so kann man im Strahlenbüschel p dadurch eine projective Beziehung herstellen, dass man einem Strahle α desselben den Strahl α' zuordnet, welcher p mit dem zu α homologen Punkte auf π verbindet. Man erhält so zwei concentrische projective Strahlenbüschel, welche in Involution liegen, wenn die Invariante i Null ist.

Nehmen wir schliesslich i und i_φ gleichzeitig gleich Null an, dann können wir bei der Umformung von $f(xu)$ $\alpha = \pi$ wählen; denn wegen $i_\varphi = 0$ liegt p auf π und α kann beliebig genommen werden (2). Es wird so

$$i = \kappa \pi_b + \lambda \beta_a = \lambda \beta_a;$$

da $i = 0$ ist, liegt a auf β und fällt demnach mit p zusammen:

Bei $i = 0$, $i_\varphi = 0$ werden durch die Projectivität $f(xu) = 0$ die Strahlen eines Punktes derart auf die Punkte einer durch p gehenden Geraden bezogen, dass dem Strahle π des Büschels p der Punkt p der Punktreihe π entspricht.

6. Die Form $f(xu)$ sei wieder zweitheilig,

$$f'(xu) = \sum a'_{ik} x_i u_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

eine beliebige bilineare Form, $\Delta' = \sum \pm a'_{11} a'_{22} a'_{33}$ u. s. w., wie in 1.

Die simultane Invariante

$$\Theta = \sum a'_{ik} \alpha_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

der Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ sei Null. Bringen wir $f(xu)$ auf die bekannte Form (2), so ist

$$\alpha_{ik} = \kappa \lambda p_i \pi_k$$

zu nehmen, wodurch

$$\Theta = \kappa \lambda \sum a'_{ik} p_i \pi_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

wird.

$\Theta = 0$ besagt also, dass die Elemente p und π ein Nullpaar der Form $f'(xu)$ sind.

§ 2.

Das Problem von Clebsch.

7. Wir nehmen jetzt an die Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ seien so beschaffen, dass alle Formen des Büschels $\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)$ singular sind. Nun ist

$$\det [\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)] = \varrho^3 \Delta + \varrho^2 \sigma \Theta + \varrho \sigma^2 \Theta' + \sigma^3 \Delta',$$

wo

$$\Theta' = \sum a_{ik} a'_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Wir setzen also voraus, dass die Invarianten $\Delta, \Delta', \Theta, \Theta'$ gleichzeitig verschwinden.

Zerlegt sich eine der beiden Formen, etwa $f'(xu)$ in $\alpha'_x u_{\alpha'}$, so zerlegt sich unter den gemachten Voraussetzungen auch die Form

$$\Phi(xu) = \sum \frac{\partial \varphi(xu)}{\partial a_{ik}} \cdot a'_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

und die zu ihr adjungirte Form, welche wir mit $\Psi(xu)$ bezeichnen wollen, verschwindet identisch. In der That wird für

$$f'(xu) = \alpha'_x u_{\alpha'},$$

$$f(xu) = \kappa \alpha_x u_b + \lambda \beta_x u_a,$$

$\Delta = \Delta' = \Theta' = 0$ und $\Theta = 0$ besagt (6), dass entweder $(\alpha \beta \alpha')$ oder $(\alpha \beta \alpha')$ Null ist oder beide Determinanten zugleich verschwinden. In jedem dieser Fälle zerlegt sich aber $\Phi(xu)$ und $\Psi(xu)$ wird identisch Null*).

Erfüllen also zwei Formen die Bedingungen $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$ und eine zerlegt sich, so verschwindet $\Psi(xu)$ identisch. Sind dagegen beide Formen zweitheilig, so ist im Allgemeinen $\Psi(xu)$ nicht identisch Null. Also: Unter den Bedingungen $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$ sind beide Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ zweitheilig.

8. Unter den eben genannten Bedingungen können wir also

$$f = \alpha_x u_b + \beta_x u_a,$$

$$f' = \alpha'_x u_b + \beta'_x u_a.$$

*) Man kann zeigen, dass bei beliebigem f die Form Φ zerfällt, wenn f' zerfällt und $\Theta = 0$ ist. Vergl. auch Pasch, l. c.

annehmen; dabei fallen weder die Punkte $p = \alpha\beta$ und $p' = \alpha'\beta'$ noch die Geraden $\pi = ab$ und $\pi' = a'b'$ zusammen, da $\Psi(xu) \equiv 0$ ist. (Pasch, l. c.).

Wegen $\Theta = 0$ sind die Elemente p und π ein Nullpaar von der Form $f(xu)$, wegen $\Theta' = 0$ die Elemente p' und π' ein Nullpaar von $f'(xu)$ (6). Es entspricht also dem Strahle $p'p$ des Büschels p' der Punkt $\pi'\pi$ der Geraden π in der Projectivität $f(xu) = 0$ und dem Strahle pp' des Büschels p der Punkt $\pi\pi'$ der Geraden π in der Projectivität $f(xu) = 0$ (3). Also entspricht dem gemeinsamen Strahle der Büschel p und p' in beiden Projectivitäten der gemeinsame Punkt der Geraden π und π' .

Wählen wir also bei unserer Darstellung von $f(xu)$ und $f'(xu)$ in obiger Form $\alpha = \alpha'$, so müssen wir $a = a'$ nehmen. Bei $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$ können wir also $f(xu)$ und $f'(xu)$ so umformen, dass

$$\begin{aligned} f(xu) &= \alpha_x u_b + \beta_x u_a, \\ f'(xu) &= \alpha_x u_{b'} + \beta'_x u_a \end{aligned}$$

wird; dabei ist weder $(\alpha\beta\beta')$ noch (abb') Null.

Setzen wir für den Augenblick

$$\varrho u_b + \sigma u_{b'} = \tau u_c, \quad \varrho \beta_x + \sigma \beta'_x = \tau' \gamma_x,$$

so wird (2)

$$\text{adj}(\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)) = \text{Const.} (acx)(\alpha\gamma u)$$

für keinen Werth $\varrho | \sigma$ identisch Null. Unter den gemachten Voraussetzungen werden also alle Formen des Büschels $\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)$ zweitheilig sein, $\varrho f(xu) + \sigma f'(xu) = 0$ stellt ein Büschel von Projectivitäten dar. Bezeichnen wir eine Projectivität desselben mit P, Π , so liegt der Punkt P_1 auf α , die Gerade Π geht durch α und zwar entspricht dem Strahle α der Punkt α .

Wir wollen die erhaltenen Resultate, durch welche der Fall $\det(\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)) \equiv 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$ vollständig erledigt ist und in Verbindung mit den Untersuchungen von Herrn Pasch der Fall der Singularität aller Formen eines Büschels überhaupt, in folgendem Satze zusammenstellen:

Im Falle $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$ sind alle Formen des Büschels $\varrho f(xu) + \sigma f'(xu)$ zweitheilig; durch die Gleichung $\varrho f(xu) + \sigma f'(xu) = 0$ wird in derselben Ebene ein Büschel von Projectivitäten P, Π geliefert. Alle Punkte P liegen in einer Geraden; alle Geraden Π gehen durch einen Punkt und zwar sind jene Gerade und dieser Punkt homologe Elemente jeder Projectivität des Büschels.

Unter der Voraussetzung $(\alpha\beta\beta') \neq 0$, $(abb') \neq 0$ konnten wir $f(xu)$ und $f'(xu)$ im Falle $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$ in

$$\alpha_x u_b + \beta_x u_a,$$

$$\alpha_x u_{b'} + \beta'_x u_a$$

umformen. Führen wir also durch die lineare Substitution

$$\alpha_x = X_1, \quad \beta_x = X_2, \quad \beta'_x = X_3$$

statt der x_i Veränderliche X_i und durch die lineare Substitution

$$u_b = U_1, \quad u_a = U_2, \quad u_{b'} = U_3$$

statt der u_i Veränderliche U_i ein, so gehen durch diese Substitutionen die beiden Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ gleichzeitig in die Formen

$$X_1 U_1 + X_2 U_2,$$

$$X_1 U_3 + X_3 U_2$$

über. Da β und β' in den betr. Strahlenbüscheln beliebig (aber von α verschieden) gewählt werden können, so giebt es ∞^2 Paare solcher linearen Substitutionen, welche unsere beiden Formen in die zuletzt gegebenen überführen*). —

9. Liegen die Strahlenbüschel p und p' und die Punktreihen π und π' in einer Ebene so, dass weder p mit p' noch π mit π' zusammenfällt, besteht ferner zwischen p und π eine projective Beziehung, in der dem Strahle pp' der Punkt $\pi\pi'$, zwischen p' und π' eine solche Beziehung, dass dem Strahle $p'p$ ebenfalls der Punkt $\pi'\pi$ entspricht, so ist bekanntlich hierdurch eine Reciprocität d. i. eine lineare reciproke Beziehung in der Ebene gegeben, welche nicht degenerirt. Man findet zu einem Punkte x die homologe Gerade u dadurch, dass man zu den Strahlen px und $p'x$ in der ersten bez. in der zweiten Projectivität die homologen Punkte x' auf π , bez. x'' auf π' aufsucht; die Gerade $x'x''$ ist die zu x homologe Gerade u . Für die Punkte auf der Geraden pp' versagt die Construction, doch gelangt man bei diesen leicht auf indirectem Wege zum Ziele.

Von zwei Projectivitäten der eben beschriebenen Art können wir sagen, dass sie eine ebene Reciprocität erzeugen. Es folgt mithin sofort aus Artikel 8:

Unter der Voraussetzung $\det(\rho f + \sigma f') \equiv 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$ erzeugen die einer Ebene angehörigen Projectivitäten $f(xu) = 0$ und $f'(xu)$ eine Reciprocität in derselben.

Die Gleichung der so erzeugten Reciprocität sei $g(xy) = 0$, wo $g(xy)$ eine bilineare ordinäre Form der cogredienten Veränderlichen x_i und y_i bedeutet.

In der Reciprocität $g(xy) = 0$ entspricht einem nicht auf der Geraden pp' liegenden Punkte $x_1 | x_2 | x_3$ die Gerade u , deren Gleichung in den Veränderlichen y_i

*) Ueber die rein algebraische Behandlung solcher Transformationsprobleme vergl. die Aufsätze von Kronecker, Berliner Monatsberichte 1874.

$$\begin{vmatrix} y_1 & f(x)_1 & f'(x)_1 \\ y_2 & f(x)_2 & f'(x)_2 \\ y_3 & f(x)_3 & f'(x)_3 \end{vmatrix} = 0$$

lautet.

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine in den Veränderlichen y_i lineare, in den Veränderlichen x_i quadratische Form, die mit $F(xxy)$ bezeichnet werde. Fällt x in die Gerade pp' , so wird $F(xxy)$ identisch Null. Während bei allgemeiner Beschaffenheit der Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ bei gegebenem $y_1 | y_2 | y_3$ die Punkte x , deren Coordinaten $x_1 | x_2 | x_3$ die Gleichung $F(xxy) = 0$ befriedigen, auf einem Kegelschnitte liegen, zerfällt dieser im behandelten Falle in eine Gerade $(pp'x) = 0$ und in diejenige Gerade, welcher y in der Reciprocität $g(xy) = 0$ entspricht. Es wird mithin

$$F(xxy) = \text{Const. } (pp'x) g(xy).$$

Die Form $F(xxy)$ zerfällt also bei $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$ und zwar wird sie das Product einer linearen Form y_i in eine bilineare ordinäre Form der x_i und y_i .

Der nicht durch den Punkt $\pi\pi'$ gehenden Geraden $v = v_1 | v_2 | v_3$ entspricht in der zu $g(xy) = 0$ inversen Reciprocität ein Punkt mit der Gleichung

$$\begin{vmatrix} u_1 & f_1(v) & f'_1(v) \\ u_2 & f_2(v) & f'_2(v) \\ u_3 & f_3(v) & f'_3(v) \end{vmatrix} = 0$$

in Liniencoordinaten $u_1 | u_2 | u_3$. Bezeichnen wir den Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung mit $\Gamma(uvv)$, so zeigt man ähnlich wie vorhin bei $F(xxy)$, dass

$$\Gamma(uvv) = \text{Const. } (\pi\pi'v) \gamma(uv)$$

wird, wo $\gamma(uv)$ eine bilineare ordinäre Form der u_i und v_i bedeutet. Die Gleichung $\gamma(uv) = 0$ ordnet einer Geraden $u_1 | u_2 | u_3$ einen Punkt zu. Diese Reciprocität ist mit $g(xy) = 0$ identisch.

Setzen wir

$$\begin{aligned} g(xy) &= y_1 f(x)_1 + y_2 f(x)_2 + y_3 f(x)_3, \\ \gamma(uv) &= u_1 \gamma_1(v) + u_2 \gamma_2(v) + u_3 \gamma_3(v) \end{aligned}$$

und lösen die Gleichungen $f(xu) = 0$ und $f'(xu)$ nach den u_i bez. x_i als Unbekannten auf, so erhalten wir unter den gemachten Voraussetzungen

$$\begin{aligned} u_i &= (pp'x) g(x)_i & (i = 1, 2, 3), \\ x_i &= (\pi\pi'u) \gamma_i(u) & (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Die durch die beiden bilinearen Gleichungen dargestellte quadratische reciproke Beziehung wird also unter den gemachten Voraussetzungen

in allen Punkten einer Geraden pp' und in allen Geraden eines Punktes $\pi\pi'$ unbestimmt, verhält sich im übrigen Theile der Ebene jedoch wie eine lineare eigentliche Reciprocität. *Wir wollen in diesem Sinne sagen, dass unter den Bedingungen $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$ durch die Gleichungen $f(xu) = 0$, $f'(xu) = 0$ eine lineare reciproke Verwandtschaft in der Ebene dargestellt werde, welche nicht ausartet.* Man findet zu einem Punkte x auf pp' die homologe Gerade u , indem man den linearen Factor $(pp'x)$ vernachlässigt und $u_i = g(x)_i$ nimmt.

Bedienen wir uns der in der Theorie der Connexe üblichen Ausdrucksweise, so können wir auch sagen: Unter den aufgeführten Bedingungen besitzen die beiden Connexe $(1, 1) f(xu) = 0$ und $f'(xu) = 0$ die besondere Eigenschaft, dass aus der ihnen gemeinsamen Coincidenz keine quadratische reciproke, sondern eine lineare reciproke Verwandtschaft in der Ebene hervorgeht.

Eben nach den Bedingungen, unter welchen diese Besonderheit eintritt, fragt Clebsch a. a. O.; die aufgeführten sind hierzu *hinreichend*, dass sie auch *nothwendig* sind, soll im nächsten Artikel gezeigt werden.

Hier sei nur noch bemerkt, dass bei $\det(\rho f + \sigma f') \equiv 0$, $\Psi \equiv 0$ die Jacobi'sche Covariante von den drei Formen

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3, \quad f(xu), \quad f'(xu)$$

zerfällt, gleichgiltig, ob man die x_i oder u_i als Veränderliche auffasst. Denn es wird

$$\frac{\partial(u_x, f(xu), f'(xu))}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = F(xxx) = \text{Const. } (pp'x) g(xx),$$

$$\frac{\partial(u_x, f(xu), f'(xu))}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \Gamma(uuu) = \text{Const. } (\pi\pi'u) \gamma(uu),$$

$g(xx)$ und $\gamma(uu)$ sind ordinäre quadratische Formen.

10. Setzen wir jetzt einmal voraus, die bilinearen Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ seien so beschaffen, dass die Beziehung zwischen dem Punkte x und der Geraden u , welche die Punkte $f(xu) = 0$ und $f'(xu) = 0$ verbindet, eine lineare reciproke eigentliche wird. Man erkennt dann zunächst, dass sowohl $f(xu) = 0$ als $f'(xu) = 0$ eine singuläre Collineation sein muss. Denn angenommen die Beziehung $f(xu) = 0$ wäre eine eigentliche collineare, so stände u zu x in eigentlicher reciproker, x zu x' oder $f(xu) = 0$ in eigentlicher reciproker, also u auch zu x' in eigentlicher reciproker Beziehung. Wir hätten eine eigentliche Reciprocität in der Ebene, bei der alle Paare homologer Elemente aneinander liegen, was bekanntlich in der Ebene niemals eintreten kann. Es muss $f(xu)$ und ebenso $f'(xu)$, überhaupt jede Form des Büschels $\rho f(xu) + \sigma f'(xu)$ singulär sein. Denn benutzen wir zwei

verschiedene Formen dieses Büschels, so entsteht in der angegebenen Weise dieselbe Reciprocität, wie durch $f(xu)$ und $f'(xu)$. Also es muss

$$\det(\rho f(xu) + \sigma f'(xu)) = \rho^3 \Delta + \rho^2 \sigma \Theta + \rho \sigma^2 \Theta' + \sigma^3 \Delta'$$

für alle $\rho | \sigma$ verschwinden, also ausser Δ und Δ' müssen auch Θ und Θ' Null sein.

Wäre nun im Büschel $\rho f + \sigma f'$ eine zerfallende Form, so könnte keine eigentliche Reciprocität entstehen. Dies setzen wir aber voraus, also alle Formen dieses Büschels müssen zweitheilig sein; $f(xu) = 0$ ist also eine Projectivität p, π , $f'(xu) = 0$ eine Projectivität p', π' . Durch zwei Projectivitäten p, π und p', π' kann aber eine eigentliche Reciprocität nur dann erzeugt werden (vergl. S. 263), wenn weder p mit p' noch π mit π' zusammenfällt. Denn fiel etwa p mit p' zusammen, so entspräche jedem Punkte eines durch $p = p'$ gehenden Strahles dieselbe Gerade (2), u. s. w. Es muss also $\Psi(xu)$ nicht identisch Null vorausgesetzt werden. Die Bedingungen $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$ sind also nothwendig und nach 9 auch hinreichend dafür, dass die durch die Gleichungen $f(xu) = 0$ und $f'(xu)$ gegebene Beziehung zwischen x und u eine lineare wird, welche nicht ausartet. Dabei ist stets zu berücksichtigen, was über die in einzelnen Punkten der Ebene eintretende Unbestimmtheit im letzten Artikel gesagt wurde. *Denn wenn hier die lineare reciproke Verwandtschaft als specieller Fall der quadratischen erscheint, muss sie auch alle Eigenthümlichkeiten zeigen, welche dieser zukommen.* Während aber bei der quadratischen birationalen Verwandtschaft im Allgemeinen nur in drei Punkten Unbestimmtheit eintritt, geschieht dies hier in unendlich vielen Punkten, die eine Gerade erfüllen. Die Form

$$\sum \pm y_1 f(x)_2 f'(x)_3$$

zerfällt, der sich ausscheidende bilineare Factor liefert auch für die Punkte jener Geraden die homologen Geraden (9).

Wir erhalten, indem wir die Resultate des vorigen Artikels mit den jetzigen zusammenstellen, den folgenden Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die durch die beiden bilinearen Gleichungen $f(xu) = 0$ und $f'(xu)$ dargestellte, im Allgemeinen quadratische reciproke Verwandtschaft, zu einer linearen reciproken eigentlichen wird, sind $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$.

Oder:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass aus der zwei Connexen $(1, 1)$ $f(xu) = 0$ und $f'(xu) = 0$ gemeinsamen

Coincidenz eine lineare reciproke Verwandtschaft hervorgeht, welche nicht ausartet, sind $\Delta = \Delta' = \Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$.

Damit ist das von Clebsch aufgeworfene Problem vollständig erledigt. Derselbe sagt a. a. O., dass die Reciprocität durch zwei Connexe (1, 1) in allgemeinsten Weise erzeugt werden könne, eine etwas unverständliche Bemerkung, die sich vielleicht jetzt so erklären lässt, dass die zur Erzeugung der Reciprocität benutzten Projectivitäten als solche *allgemein* zu nennen sind (5), während nur ihre durch die Bedingungen $\Theta = \Theta' = 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$ herbeigeführte gegenseitige Lage eine *specielle* zu nennen ist.

11. Ist die Form $\sum \pm y_1 f(x)_2 f'(x)_3$ das Product einer linearen Form der x_i in eine bilineare Form der x_i und y_i , so ist die durch die Gleichungen $f(xu) = 0$ und $f'(xu) = 0$ dargestellte Verwandtschaft zwischen x und u eine lineare eigentliche, also (10) $\det(\rho f + \sigma f') \equiv 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$ und somit (9) $\sum \pm u_1 f_2(v) f'_3(v)$ das Product einer linearen Form der u_i in eine bilineare Form der u_i und v_i . Umgekehrt: Zerlegt sich in der angegebenen Weise die Form $\sum \pm u_1 f_2(v) f'_3(v)$, so zerlegt sich die Form $\sum \pm y_1 f(x)_2 f'(x)_3$ ebenfalls wie oben angegeben. Also:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die aus den Formen $f(xu)$ und $f'(xu)$ gebildeten Formen $\sum \pm y_1 f(x)_2 f'(x)_3$ und $\sum \pm u_1 f_2(v) f'_3(v)$ sich gleichzeitig in der angegebenen Weise zerlegen, sind $\det(\rho f + \sigma f') \equiv 0$, $\Psi(xu) \equiv 0$.

Die beiden Formen $\sum \pm y_1 f(x)_2 f'(x)_3$ und $\sum \pm u_1 f_2(v) f'_3(v)$ lassen sich in der angegebenen Weise nicht oder gleichzeitig zerlegen.

12. Für die Formentheorie sind noch folgende Zusammenhänge wichtig. Verschwinden die Invarianten $\Delta, \Delta', \Theta, \Theta'$, während Ψ nicht identisch Null ist, so müssen die Ausdrücke:

$$\sum \pm \varphi_1(u) \Phi_2(u) \varphi'_3(u), \quad \sum \pm \varphi(x)_1 \Phi(x)_2 \varphi'(x)_3,$$

wo $\Phi(xu) = u_1 \Phi(x)_1 + \dots = x_1 \Phi_1(u) + \dots$, beide identisch verschwinden, wie sich mit Hülfe der von Herrn Pasch a. a. O. S. 35 und 36 entwickelten Formeln ergibt. Bezeichnen wir den ersten Ausdruck mit $K^3(u)$, den zweiten mit $C^3(x)$, so kann man sagen, dass mit $\Delta, \Delta', \Theta, \Theta'$ stets das Product $C^3(x) \cdot \Psi(xu)$ und das Product $K^3(u) \cdot \Psi(xu)$ verschwindet. Denn verschwinden jene 4 Invarianten und $K^3(u)$ ist nicht identisch Null, so ist $\Psi(xu) \equiv 0$, da bei $\Psi(xu) \equiv 0$ ja $K^3(u) \equiv 0$ ist, u. s. w. Auf die Herleitung interessanter

Identitäten, welche nach dem Gesagten zwischen diesen Formen bestehen, soll indess hier nicht eingegangen werden.

Soll durch die Projectivitäten $f(xu) = 0$ und $f'(xu) = 0$ eine Polarreciprocität erzeugt werden, so müssen ausser den genannten 4 Invarianten bei $\Psi(xu) \equiv 0$ noch die Invarianten i und $i' = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33}$ verschwinden (5). Die Bedingungen $i = 0$, $i' = 0$ im Vereine mit den früher angegebenen sind jedoch nicht hinreichend dafür, dass die Beziehung $f(xu) = 0$, $f'(xu) = 0$ zwischen x und u polarreciprok wird.

§ 3.

Erzeugung einer gegebenen Reciprocität durch Paare von Projectivitäten.

13. Wir setzen

$$f(xy) = \sum_{(i,k=1,2,3)} a_{ik} x_i y_k = \sum_{(i=1,2,3)} y_i f(x)_i = \sum_{(i=1,2,3)} x_i f_i(y),$$

$$\Delta = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik},$$

$$\varphi(uv) = \sum_{(i,k=1,2,3)} \alpha_{ik} u_i v_k = \sum_{(i=1,2,3)} v_i \varphi(u)_i = \sum_{(i=1,2,3)} u_i \varphi_i(v).$$

Bedeutend $x_1|x_2|x_3$, $y_1|y_2|y_3$ Punktcoordinaten, $u_1|u_2|u_3$, $v_1|v_2|v_3$ Liniencoordinaten in einem linearen Coordinatensystem der Ebene, so ist in dieser durch die Gleichung $f(xy) = 0$ bei $\Delta \neq 0$ eine Reciprocität gegeben, vermöge deren

dem Punkte $x_1|x_2|x_3$ die Gerade $f(x)_1|f(x)_2|f(x)_3$,

der Geraden $u_1|u_2|u_3$ der Punkt $\varphi(u)_1|\varphi(u)_2|\varphi(u)_3$

entspricht; die Reciprocität wird also sowohl durch die Gleichung $f(xy) = 0$ als auch durch die Gleichung $\varphi(uv) = 0$ dargestellt. Dementsprechend werden wir, wenn es sich jetzt darum handelt diese Reciprocität durch Paare von Projectivitäten zu erzeugen, entweder Formenpaare $g(xu)$ und $h(xu)$ so bestimmen, dass aus den Gleichungen $g(xu) = 0$, $h(xu) = 0$ sich

$$\varrho u_i = l_x f(x)_i \quad (i=1, 2, 3)$$

ergiebt, oder wir werden $g(xu)$ und $h(xu)$ derart bestimmen, dass aus $g(xu) = 0$, $h(xu) = 0$ sich

$$\sigma x_i = u_i \varphi(u)_i \quad (i=1, 2, 3)$$

ergiebt, wo ϱ und σ weder Null noch Unendlich sind und l_x , u_i lineare Formen der x_i , u_i bedeuten.

Haben wir alle Paare von Projectivitäten gefunden, welche unsere Reciprocität auf erstere Art erzeugen, so haben wir in Folge des Dualitätsprincips auch alle Paare, welche die Reciprocität auf die zweite Art erzeugen. Wir beschäftigen uns desshalb zunächst nur mit der Erzeugung ersterer Art.

14. Wenden wir zuerst die gegebene Reciprocität $f(xy) = 0$ an, so gelangen wir von einem Punkte $x_1 | x_2 | x_3$ zu einer Geraden $f(x)_1 | f(x)_2 | f(x)_3$; wenden wir hierauf die singuläre Reciprocität

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= r u_2 - q u_3, \\ x_2 &= -r u_1 + p u_3, \\ x_3 &= q u_1 - p u_2 \end{aligned}$$

an, so entspricht in dieser der Geraden $f(x)_1 | f(x)_2 | f(x)_3$ ein in derselben liegender Punkt x' mit der Gleichung

$$u_1 [r f(x)_2 - q f(x)_3] + u_2 [-r f(x)_1 + p f(x)_3] + u_3 [q f(x)_1 - p f(x)_2] = 0.$$

Die Beziehung zwischen x und x' ist eine singuläre collineare und durch vorstehende Gleichung dargestellt, welcher wir auch die Form

$$(2) \quad \begin{vmatrix} p & q & r \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ f(x)_1 & f(x)_2 & f(x)_3 \end{vmatrix} = 0$$

ertheilen können. Zwei verschiedene Werthsysteme $p|q|r$ liefern zwei Projectivitäten, welche die gegebene Reciprocität erzeugen. Wir erhalten so ∞^4 Paare von Projectivitäten, welche das Verlangte leisten; wir erhalten aber damit auch alle Paare von Projectivitäten dieser Art. Denn erzeugt die Projectivität $F(xu) = 0$ mit einer anderen die Reciprocität $f(xy) = 0$, in welcher x und u homologe Elemente sind, so steht u zu x in reciproker, x zu x' oder $F(xu) = 0$ in singulärer collinearer, also u zu x' in einer solchen singulären reciproken Beziehung, welche die Form (1) hat. $F(xu) = 0$ setzt sich also aus $f(xy) = 0$ und jener singulären Reciprocität zusammen, ist also in unserem Netze von Projectivitäten (2) enthalten, w. z. b. w.

Zu demselben Resultate führt uns folgende mehr mit unseren Ausführungen in § 2 im Zusammenhange stehende Ueberlegung:*)

Dem Punkte p entspricht in der gegebenen Reciprocität die Gerade $f(p)_1 | f(p)_2 | f(p)_3$ oder π , dem Punkte p' die Gerade $f(p')_1 | f(p')_2 | f(p')_3$

*) Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich besonders einfach auf den Raum ausdehnen, wenn es sich nämlich darum handelt eine räumliche Reciprocität durch drei räumliche Collineationen zu erzeugen. Es lässt sich dann ein System von ∞^5 (theils singulären, theils eigentlichen) Collineationen angeben, welche zu je dreien die Reciprocität erzeugen.

oder π' . Entspricht in derselben ausserdem dem Punkte a die Gerade α , dem Punkte b die Gerade β , wo weder a noch b auf pp' liegt und die Gerade ab weder durch p noch durch p' geht, so suchen wir erstens die Projectivität $g(xu) = 0$, welche den Geraden pa , pb , pp' von p die Punkte $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\pi'$ auf π bez. zuordnet (5). Alsdann bestimmen wir eine zweite Projectivität $h(xu) = 0$, welche den Geraden $p'a$, $p'b$, $p'p$ von p' die Punkte $\pi'\alpha$, $\pi'\beta$, $\pi'\pi$ auf π' bez. zuordnet. Diese beiden Projectivitäten $g(xu) = 0$ und $h(xu) = 0$ erzeugen aber eine Reciprocität (vgl. Art. 9), in welcher den Punkten a , b , p , p' bez. die Geraden α , β , π , π' entsprechen, die also mit der gegebenen identisch ist. Da wir die Punkte p und p' beliebig in der Ebene annehmen können, so erhalten wir, wie vorhin, ∞^4 Paare von solchen Projectivitäten; die mit $g(xu) = 0$ bezeichnete Projectivität lautet aber

$$(3) \quad \begin{vmatrix} f(p)_1 & f(x)_1 & u_1 \\ f(p)_2 & f(x)_2 & u_2 \\ f(p)_3 & f(x)_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0;$$

denn dies ist eine Projectivität p, π , welche dem Strahle px von p den Punkt πu auf π zuordnet, wo x und u homologe Elemente der Reciprocität $f(xy) = 0$ sind. So kommen wir in der That wieder auf unser System (2), für $p = p'$ erhalten wir die Beziehung $h(xu) = 0$ u. s. w.

Hieraus finden wir sofort das System von doppelt unendlich vielen Projectivitäten, welche paarweise unsere Reciprocität in der Weise erzeugen, welche in 13 zuletzt beschrieben wurde. Wir gehen einfach zum dualen Falle über, indem wir für $f(xy)$ die Form $\varphi(uv)$ nehmen, wobei durchweg Punkt- und Linienkoordinaten zu vertauschen sind. Wir erhalten somit das System

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \varphi(\pi)_1 & \varphi(u)_1 & x_1 \\ \varphi(\pi)_2 & \varphi(u)_2 & x_2 \\ \varphi(\pi)_3 & \varphi(u)_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

von Projectivitäten der gesuchten Art. Also:

Um eine gegebene Reciprocität $f(xy) = 0$ auf jede mögliche Weise durch Paare von Projectivitäten zu erzeugen, bilde man die Systeme $\sum \pm f(p)_1 f(x)_2 u_3$ und $\sum \pm \varphi(\pi)_1 \varphi(u)_2 u_3$ von je doppelt unendlich vielen zweitheiligen Formen. Irgend zwei Formen des ersten bez. des zweiten Systems liefern zwei bilineare Gleichungen, welche die gegebene Reciprocität in der einen oder in der anderen Weise darstellen.

15. Greifen wir zwei Projectivitäten $g(xu) = 0$ und $h(xu) = 0$ aus dem System (3) heraus, indem wir $p = p$ und $p = p'$ nehmen, so besteht nach 9 die Gleichung

$$\sum \pm y_1 g(x)_2 h(x)_3 = \text{Const. } (pp'x) f(xy),$$

wo $g(x)_i = \frac{\partial g(xu)}{\partial u_i}$ u. s. w. gesetzt wurde. Indem wir in bekannter Weise die Constante bestimmen, erhalten wir die Identität;

$$(5) \begin{vmatrix} y_1 & f(p)_2 f(x)_3 - f(p)_3 f(x)_2 & f(p')_2 f(x)_3 - f(p')_3 f(x)_2 \\ y_2 & f(p)_3 f(x)_1 - f(p)_1 f(x)_3 & f(p')_3 f(x)_1 - f(p')_1 f(x)_3 \\ y_3 & f(p)_1 f(x)_2 - f(p)_2 f(x)_1 & f(p')_1 f(x)_2 - f(p')_2 f(x)_1 \end{vmatrix} = \Delta(pp'x) f(xy);$$

die Identität

$$(6) \begin{vmatrix} p_1 & x_1 & \varphi_1(u) \\ p_2 & x_2 & \varphi_2(u) \\ p_3 & x_3 & \varphi_3(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(p)_1 & f(x)_1 & u_1 \\ f(p)_2 & f(x)_2 & u_2 \\ f(p)_3 & f(x)_3 & u_3 \end{vmatrix},$$

die sich leicht direct ableiten lässt, führt weiter mit Rücksicht auf die Ausführungen in 9 zu der folgenden:

$$(7) \begin{vmatrix} u_1 & p_2 \varphi_3(v) - p_3 \varphi_2(v) & p_2' \varphi_3(v) - p_3' \varphi_2(v) \\ u_2 & p_3 \varphi_1(v) - p_1 \varphi_3(v) & p_3' \varphi_1(v) - p_1' \varphi_3(v) \\ u_3 & p_1 \varphi_2(v) - p_2 \varphi_1(v) & p_1' \varphi_2(v) - p_2' \varphi_1(v) \end{vmatrix} = (\pi \pi' v) \varphi(uv),$$

wo

$$\pi_i = f(p)_i, \quad \pi'_i = f(p')_i$$

gesetzt wurde.

Weitere Identitäten erhält man, indem man von der Erzeugung unserer Reciprocität durch zwei Projectivitäten des Systems (4) ausgeht. Alle diese Identitäten lassen sich aber direct aus (5) herleiten; auch die Identität (7) erhält man aus (5), indem man daselbst $y_i = u_i$, $x_i = v_i$, $a_{ik} = \alpha_{ik}$ nimmt, also für $f(xy) \varphi(uv)$ schreibt, wobei zu berücksichtigen ist, dass für Δ jetzt Δ^2 zu nehmen ist, da

$$\det \varphi(uv) = \Delta^2$$

ist.

Da sich umgekehrt, aus der Identität (5) (und den aus ihr sich ergebenden weiteren Identitäten) Alles, was wir über die Erzeugung einer gegebenen Reciprocität gesagt haben, direct ablesen lässt, so wird eine rein algebraische Herleitung derselben nicht unangebracht sein.

Zu dem Ende betrachten wir die Determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} f(p)_1 & f(p')_1 & f(x)_1 \\ f(p)_2 & f(p')_2 & f(x)_2 \\ f(p)_3 & f(p')_3 & f(x)_3 \end{vmatrix} = \Delta(p p' x),$$

bezeichnen adj. $f(p)_i$ in vorstehendem System mit $F(p)_i$ u. s. w. und bilden die neue Determinante

$$D_2 = \begin{vmatrix} F(p)_1 & F(p')_1 & F(x)_1 \\ F(p)_2 & F(p')_2 & F(x)_2 \\ F(p)_3 & F(p')_3 & F(x)_3 \end{vmatrix}.$$

Alsdann ist für das neue System

$$P_i = \text{adj } F(x)_i = D_1 f(x)_i = \Delta(pp'x) f(x)_i,$$

also hat die in (5) links stehende Determinante den Werth

$$\sum y_i P_i = \Delta(pp'x) \sum y_i f(x)_i = \Delta(pp'x) f(xy),$$

w. z. b. w.

Osthofen, im August 1892.
