INTORNO ALLA COSTRUZIONE DEI SISTEMI COMPLETI NON LINEARI CHE APPARTENGONO AD UNA SUPERFICIE IRREGOLARE.

Nota di **Francesco Severi**, in Parma.

Adunanza del 9 aprile 1905.

Il prof. Enriques in una sua Nota recente *) ha dimostrato, in modo veramente semplice, che l'esistenza di sistemi (algebrici) completi, non lineari, di curve algebriche, caratterizza le superficie irregolari, cioè quelle che hanno il genere geometrico P_g maggiore del genere aritmetico P_a.

La dimostrazione del prof. Enriques è fondata sulla rappresentazione della superficie sopra un piano multiplo; ma ciò che giuoca in modo essenziale nel ragionamento, è il principio che *una curva algebrica irriducibile, che varii con continuità sopra una superficie algebrica, non può spezzarsi senza acquistare nuovi punti doppi*.

Ora, usando di questo medesimo principio, ma operando direttamente sulla superficie, io son pervenuto a dimostrare che *ogni sistema algebrico completo ha la serie caratteristica completa* **); e mi sembra che valga la pena di esporre questa nuova dimostrazione, perchè essa semplifica ulteriormente la costruzione dei sistemi completi non lineari, sopra una superficie irregolare.

Aggiungerò che il concetto direttivo della mia dimostrazione è iden-

*) *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (Rend. della R. Accademia di Bologna, dicembre 1904). Vedi pure la Nota inserita nei « Comptes rendus » dell'Accademia delle Scienze di Parigi (seduta del 16 gennaio 1905).

**) Per la definizione della serie caratteristica di un sistema continuo, vedi la mia Nota: *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, febbraio 1904).

tico a quello che mi condusse a definire la serie caratteristica di una curva, indipendentemente dall'esistenza di un sistema lineare a cui essa appartenga *). Qui, mediante il principio di ENRIQUES, vien resa più significativa la costruzione della serie caratteristica, assegnando anche le *curve infinitamente vicine alla data,* le quali segano i gruppi di questa serie: cosicchè può dirsi che *sopra una curva della superficie, esiste la serie caratteristica, allora e soltanto allora che la curva appartiene ad un sistema continuo (almeno* ∞^1*).*

1. Sulla superficie algebrica F consideriamo un sistema algebrico irriducibile **) e completo $\{C\}$, privo di punti base e la cui curva generica sia irriducibile e priva di punti multipli. Si tratta di provare che la serie caratteristica segata sopra una curva generica del sistema dalle curve C che le sono infinitamente vicine, è completa.

A tal uopo fissiamo su F un sistema lineare $|E|$, irriducibile e privo di punti base, che contenga parzialmente tutto quanto il sistema $\{C\}$ e che inoltre seghi sulla C generica, una serie lineare *completa:* ciò è sempre possibile, perchè la C è priva di punti multipli ***). In corrispondenza ad ogni sistema lineare $|C|$, contenuto in $\{C\}$, formiamo il sistema lineare $|D| = |E - C|$, e diciamo $\{D\}$ il sistema algebrico irriducibile — la cui curva generica può pure supporsi irriducibile e priva di punti multipli — luogo dei sistemi $|D|$.

Indichiamo inoltre con δ il n° dei punti comuni a una C e a una D, e con Σ il sistema algebrico costituito dalle curve E che posseggono δ punti doppi. Essendo irriducibile la varietà V che ha per elementi le curve E composte da una C e da una D, se Σ è riducibile, si potrà sempre scegliere una parte irriducibile S del sistema Σ, alla quale appartengano tutte queste curve composte.

La curva generica E_0 di S è certamente spezzata, perchè in caso contrario, facendo tendere la E_0 ad una E composta da una C e da una D, si avrebbe lo spezzamento, senz'acquisto di nuovi punti doppi. Ed è chiaro che la E_0 non può spezzarsi che in una curva C_0 dello

---

*) *Osservazioni sui sistemi continui,* etc.

**) Cioè rappresentabile coi punti di una varietà irriducibile.

***) Come sistema $|E|$ può prendersi, ad es., quello segnato su F dalle forme che hanno lo stesso ordine delle C.

stesso ordine di C ed in una D_0 dello stesso ordine di D *). Variando E_0 entro ad S, per la supposta irriducibilità di questo sistema, le curve C_0, D_0 descriveranno *due sistemi irriducibili*, il primo dei quali coinciderà col sistema *completo* $\{C\}$, e l'altro con $\{D\}$, perchè quest'ultimo sistema contiene *tutti* i resti delle C rispetto ad $|E|$. Dunque il sistema S non è più ampio del sistema V, come a priori potrebbe credersi; ma, al contrario, i due sistemi coincidono; e poichè la curva generica di S non può stare in un'altra parte di Σ, si conclude che le curve E dotate di δ punti doppi e infinitamente vicine ad una curva E_0 generica (composta da una C e da una D), appartengono tutte quante al sistema V.

Ciò posto, fissate due curve generiche $\bar{C}$, $\bar{D}$, mutuamente residue rispetto ad E, si osservi:

1°) Che le curve E passanti pei punti del gruppo $(\bar{C}\bar{D})$, segano ulteriormente su $\bar{C}$ la serie caratteristica completa, e quindi che godono della stessa proprietà quelle, tra le curve E suddette, che sono infinitamente vicine a $\bar{C}+\bar{D}$.

2°) Che queste ultime curve E hanno δ punti doppi infinitamente prossimi ai punti $(\bar{C}\bar{D})$, e quindi appartengono al sistema V.

Tale proprietà si può infatti presentare sotto la seguente forma proiettiva: Data una superficie non sviluppabile (per es. dello S_3), ogni piano passante per un punto P della superficie e infinitamente prossimo al piano ad essa tangente in P, tocca la superficie in un punto infinitamente vicino a P. La cosa diviene intuitiva sotto la forma duale.

3°) Che ogni curva del sistema V, infinitamente vicina a $\bar{C}+\bar{D}$, appartiene al sistema lineare T delle E che passano pei punti $(\bar{C}\bar{D})$ **).

*) Si può intuitivamente giustificare il principio applicato, osservando che, se di due curve infinitamente vicine E_0 ed E, l'una, E, è spezzata in $C+D$, l'altra sarà spezzata in una curva infinitamente vicina a C ed in una infinitamente vicina a D. Invero, se la curva (superficie di Riemann) E_0 fosse irriducibile, da un suo punto si potrebbe andare ad ogni altro con un cammino continuo non traversante i δ punti doppi di E_0, che sono infinitamente prossimi ai δ punti (CD). Ogni tal cammino darebbe luogo ad un cammino infinitamente prossimo, tracciato sulla $C+D$; e dunque da ogni punto di C si andrebbe ad un punto di D, senza traversare i punti (CD): il che è assurdo.

**) Nello spazio lineare i cui *punti* son le curve E, la varietà V è toccata dallo spazio T e dagli analoghi (che hanno la stessa dimensione di V).

Col linguaggio proiettivo ciò equivale ad affermare che ogni piano che tocchi una data superficie non sviluppabile (dello S_3) in un punto infinitamente vicino al punto P della superficie, passa per P. Anche tale proprietà (inversa della precedente) è intuitiva sotto la forma duale.

Da tutto ciò discende in modo immediato che è *completa la serie caratteristica del sistema* $\{C\}$.

Osservazione. — In particolare se $\{C\}$ è il sistema completo che si ottiene a partire da un sistema lineare regolare $|C|$ di dimensione r, sarà $r + P_g - P_a$ la dimensione di $\{C\}$ e dunque, *allorquando* $P_g > P_a$, *avremo sulla* F *un sistema completo non lineare.*

2. Il teorema dimostrato si estende subito ai sistemi completi con punti base assegnati (di molteplicità virtuale uguale all'effettiva), e più in generale a quei sistemi la cui curva generica possegga punti doppi variabili.

A proposito di questi sistemi, è appena necessario avvertire in qual senso debba intendersi la completezza. Un tal sistema dovrà dirsi completo, quando non è contenuto in uno più ampio di curve dello stesso ordine e collo stesso numero di punti doppi variabili.

Ma questi sistemi offrono poco interesse, perchè non differenziano le superficie irregolari dalle regolari (così per es. nel piano il sistema delle cubiche con un punto doppio è completo nel senso ora detto, e non è lineare).

Parma, 2 aprile 1905.

Francesco Severi.