20.
Beweise verschiedener Sätze.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.)

Es ist:

$$\int^m y\,\partial x^m = \frac{1}{1.2.3....m}\left\{x^m y - x^{m-1}\int x\partial y + \frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2}\int x^2\partial y - .... \pm \int x^m\partial y\right\}.$$

Differentiirt man nemlich den Ausdruck, so findet man:

$$\int^{m-1} y\,\partial x^{m-1} = \frac{1}{1.2.3....m}\left\{x^m\partial y - m\,x^m\,\partial y + \frac{m.m-1}{1.2}x^m\,\partial y - .... \pm x^m\,\partial y\right\}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3....m-1}\left\{x^{m-1}y - (m-1)x^{m-2}\int x\partial y + \frac{m-1.m-2}{1.2}\int x^2\partial y - .... \pm \int x^{m-1}\partial y\right\};$$

da aber $1 - m + \frac{m.m-1}{1.2} - \frac{m.m-1.m-2}{1\,.\,2} .... = (1-1)^m = 0$ ist, so ist:

$$\int^{m-1} y\,\partial x^{m-1}$$
$$= \frac{1}{1.2.3....m-1}\left\{x^{m-1}y - (m-1)x^{m-2}\int x\partial y + \frac{m-1.m-2}{1.2}\int x^2\partial y - .... \pm \int x^{m-1}\partial y\right\}.$$

Man sieht nun leicht, daſs eine nochmalige Differentiation geben wird:

$$\int^{m-2} y\,\partial x^{m-2}$$
$$= \frac{1}{1.2.3....m-2}\left\{x^{m-2}y - (m-2)x^{m-3}\int x\partial y + \frac{m-2.m-3}{1.2}\int x^2\partial y - .... \pm \int x^{m-2}\partial y\right\},$$

und daſs eine fortgesetzte Differentiation zuletzt die identische Gleichung

$$y = y$$

giebt, wodurch also der obige Ausdruck bewiesen ist.

Es sei $\tang\varphi = a$, $\tang\varphi' = a'$, $\tang\varphi'' = a''$, ...; wir haben dann:

$$\tang(\varphi+\varphi') = \frac{a+a'}{1-aa'},$$

$$\tang(\varphi+\varphi'+\varphi'') = \frac{\frac{a+a'}{1-aa'}+a''}{1-a''\frac{a+a'}{1-aa'}} = \frac{a+a'+a''-aa'a''}{1-(aa'+aa''+a'a'')},$$

$$\tang(\varphi+\varphi'+\varphi''+\varphi''') = \frac{\frac{a+a'+a''-aa'a''}{1-(aa'+aa''+a'a'')}+a'''}{1-a'''\frac{a+a'+a''-aa'a''}{1-(aa'+aa''+a'a'')}}$$
$$= \frac{a+a'+a''+a'''-(aa'a''+aa'a'''+aa''a'''+a'a''a''')}{1-(aa'+aa''+aa'''+a'a''+a'a'''+a''a''')+aa'a''a'''}.$$

Bezeichnet man durch $(1)_m$ die Summe der Gröfsen $a, a', a'', a''', \ldots$ $\ldots a^{(m-1)}$; durch $(2)_m$ die Summe der Producte je 2 und 2 .... $a a' + a a'' + \ldots$; durch $(3)_m$ die Summe der Producte je 3 und 3, u. s. w., so deuten die obigen Gleichungen auf den allgemeinen Ausdruck:

$$(a.)\quad \operatorname{tang}(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots + \varphi^{(m-1)}) = \frac{(1)_m - (3)_m + (5)_m - \text{etc.}}{1 - (2)_m + (4)_m - \text{etc.}}.$$

Bildet man die Producte je n und n der $m+1$ Gröfsen, $a, a', a'', \ldots a^{(m)}$

$$\begin{array}{l} a^{(m)} a^{(m-1)} a^{(m-2)} \ldots \\ \vdots \\ a^{(m-1)} a^{(m-2)} a^{(m-3)} \ldots \\ \vdots \\ a^{(m-2)} a^{(m-3)} \ldots \\ \vdots \end{array}$$

so sieht man leicht, dafs die Summe der mit $a^{(m)}$ multiplicirten Glieder $= (n-1)_m$ ist, und dafs die Summe der übrigen $(n)_m$, folglich

$$(b.)\quad n_{m+1} = a^{(m)}(n-1)_m + (n)_m \ldots$$

Nimmt man nun an, dafs der obige Ausdruck $(a.)$ für m Gröfsen richtig sei, so folgt daraus für $m+1$ Gröfsen:

$$\operatorname{tang}(\varphi + \varphi' + \ldots + \varphi^{(m-1)} + \varphi^{(m)}) = \frac{\dfrac{(1)_m - (3)_m + (5)_m - \ldots}{1 - (2)_m + (4)_m - \ldots} + a^{(m)}}{1 - a^{(m)} \dfrac{(1)_m - (3)_m + (5)_m - \ldots}{1 - (2)_m + (4)_m - \ldots}}$$

$$= \frac{(1)_m + a^{(m)} - [(3)_m + a^m (2)_m] + [(5)_m + a^{(m)}(4)_m] - \ldots}{1 - [(2)_m + a^{(m)}(1)_m] + [(4)_m + a^{(m)}(3)_m] - \ldots},$$

und durch Hülfe der Gleichung $(b.)$:

$$\operatorname{tang}(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots + \varphi^{(m)}) = \frac{(1)_{m+1} - (3)_{m+1} + (5)_{m+1} - \ldots}{1 - (2)_{m+1} + (4)_{m+1} - \ldots}.$$

Der Ausdruck $(a.)$ gilt also dann auch für die Anzahl $m+1$, wenn er für m gilt, und überhaupt allgemein, da er für $m = 1, 2, 3$ und 4 richtig ist.

Aus diesem Satze folgt das bemerkenswerthe Resultat, dafs wenn die Wurzeln einer beliebigen Gleichung $\operatorname{tang}\varphi, \operatorname{tang}\varphi', \ldots$ sind, man die Summe $\varphi + \varphi' + \varphi''$ etc. bestimmen könne, ohne die Gleichung erst aufzulösen; da die Gröfsen $(1)_m$, $(2)_m$ etc. die respectiven Coefficienten der Gleichung sind.

Sei fx eine beliebige Function von x, und $\alpha^n = 1$; überdies φ eine solche Function, dafs

$$\varphi[f(x)] = f(\alpha x),$$

so ist

$$\varphi^n(y) = y.$$

Denn

$$\begin{aligned}
\varphi^2[f(x)] &= \varphi[f(\alpha x) = f(\alpha^2 x),\\
\varphi^3[f(x)] &= \varphi[f(\alpha^2 x)] = f(\alpha^3 x),\\
&\vdots\\
\varphi^n[f(x)] &= \varphi[f(\alpha^{n-1} x)] = f(\alpha^n x) = f(x),
\end{aligned}$$

wo $\varphi^n(y) = \varphi(\varphi(\varphi(\ldots\varphi(y))))$ ist.

Dieser Satz giebt eine allgemeine Regel zur Erfindung der von Babbage benannten periodischen Functionen.

Altona, den 3. August 1828.