

Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 28<sup>ten</sup> Grades,  
von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter  
Ordnung abhängen.

Von

HEINRICH WEBER in Berlin.

---

§ 1.

Die Beziehung der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung zu den Thetafunctionen von drei Veränderlichen und die auf Grund dieser Beziehungen gebildete Bezeichnungsweise derselben, wie ich sie in meiner Schrift „über die Abel'schen Functionen vom Geschlechte 3“, Berlin 1876, angewandt habe, führt zu einer übersichtlichen und eleganten Darstellung der Galois'schen Gruppe der Gleichung 28<sup>ten</sup> Grades, von welcher die Doppeltangenten abhängen, welche die algebraischen Eigenthümlichkeiten dieser Gleichung leicht und einfach erkennen lässt.

Als ursprünglicher Rationalitätsbereich, auf welchen sich die Gruppe bezieht, wird dabei der Inbegriff der rationalen Functionen der *sämmtlichen Coefficienten* der Gleichung einer allgemeinen Curve 4<sup>ter</sup> Ordnung betrachtet, welche als variabel anzusehen sind, und es ist für diese Gruppe zunächst gleichgültig, ob man die *Constanten* auf das Gebiet der rationalen Zahlen beschränkt, oder ob man gewisse irrationale Zahlen, z. B. Einheitswurzeln, adjungirt, oder endlich, ob man das Gebiet aller Zahlen überhaupt mit zum Rationalitätsbereich rechnet.

1. Um eine feste Grundlage zu gewinnen, möge

(1) 
$$F(x, y) = 0$$

die Gleichung einer allgemeinen Curve 4<sup>ter</sup> Ordnung in Cartesischen Coordinaten sein, in welcher ein Coefficient durch Division = 1 gemacht ist; und mit  $a$ , mögen die 14 Coefficienten der Function  $F$  bezeichnet sein.

Damit die gerade Linie

(2) 
$$y = \Theta(x - \xi)$$

eine Doppeltangente sei, muss die ganze rationale Function vierten Grades von  $x$

$$F(x, \Theta(x - \xi))$$

ein Quadrat sein, woraus sich zwei Bedingungen für die beiden Unbekannten  $\Theta, \xi$  ergeben. Die Elimination von  $\Theta$  aus diesen beiden Gleichungen führt zu einer Gleichung 28<sup>ten</sup> Grades für  $\xi$ , welche wir in der Folge kurz die *Doppeltangentengleichung* nennen wollen.

Da zu einer Wurzel  $\xi$  dieser Gleichung im Allgemeinen (so lange sich nicht zwei Doppeltangenten auf der  $x$ -Axe schneiden) nur *ein* Werth von  $\Theta$  gehört, so lässt sich  $\Theta$  *rational* durch  $\xi$  und die Coefficienten  $a_i$  ausdrücken:

$$(3) \quad \Theta = \varphi(\xi, a_i)$$

und diese Relation hat dieselbe Form für je zwei zusammengehörige Werthe  $\xi, \Theta$ .

Es lassen sich, wie ich in § 4 der citirten Arbeit nachgewiesen habe, aus den 28 ungeraden Charakteristiken auf 288 verschiedene Arten sieben solche auswählen, welche ein *vollständiges System ungerader Charakteristiken* bilden, und zwar gehören von diesen 36 mal je 8 zu derselben geraden Charakteristik. Zwei und nicht mehr Charakteristiken eines vollständigen Systems können beliebig gewählt werden.

Daraus ergibt sich (l. c. § 15) indem man die Doppeltangenten den ungeraden Charakteristiken zuordnet, dass man aus den Wurzeln der Doppeltangentengleichung auf 288 Arten 7 solche auswählen kann, durch welche sich die übrigen rational ausdrücken lassen, und dass unter diesen sieben zwei beliebig gegebene Doppeltangenten sein können. Hat man ein solches *vollständiges Siebenersystem*  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  ausgewählt, so erhält man die übrigen 21 Wurzeln durch eine einzige Formel, indem man je zweien Wurzeln dieses Siebenersystems eine ausgezeichnete Stellung giebt.

Man kann nämlich, indem man unter  $f$  eine rationale Function versteht, die noch von den Coefficienten  $a_i$  abhängig ist, setzen:

$$(4) \quad \xi_{1,2} = f(\xi_1, \xi_2 \mid \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7).$$

Die Vertauschung von  $\xi_1$  mit  $\xi_2$ , ebenso die Vertauschung von  $\xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7$  unter einander ändert in diesem Ausdruck nichts. Vertauscht man aber  $\xi_1, \xi_2$  mit  $\xi_h, \xi_k$  so erhält man aus (4) die sämtlichen Wurzeln  $\xi_{h,k}$ .

Ersetzt man in der Formel (4) das vollständige Siebenersystem  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  durch ein anderes, so werden auch die Wurzeln  $\xi_{h,k}$  in bestimmter Weise durch andere ersetzt. Um diese Veränderungen zu bestimmen, ist es erforderlich auf die Bildungsweise der vollständigen Siebenersysteme etwas näher einzugehen. Unter diesen sind zunächst sieben, welche zu derselben geraden Charakteristik gehören wie  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$ .

von denen es genügt, eines anzugeben, da die andern nach der Analogie daraus sofort abzuleiten sind:

$$\xi_1, \xi_{1,2}, \xi_{1,3}, \xi_{1,4}, \xi_{1,5}, \xi_{1,6}, \xi_{1,7}.$$

Ersetzt man in (4) das System  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  durch dieses System, so geht

$$\xi_{1,2} \text{ in } \xi_2, \xi_{1,3} \text{ in } \xi_3, \dots, \xi_{1,7} \text{ in } \xi_7$$

über, während die  $\xi_{2,3} \dots$  ungeändert bleiben.

Man kann nun aber auch das Siebenersystem  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  ersetzen durch 8 Siebenersysteme, welche zu einer beliebigen der 36 geraden Charakteristiken gehören. Die noch fehlenden 35.8 Siebenersysteme lassen sich so darstellen, dass man sie den 35 Dreiersystemen (1, 2, 3) zu je achten zuordnet. Man erhält so zu (1, 2, 3) gehörig die acht Systeme:

$$\begin{aligned} &\xi_2, \xi_3, \xi_{2,3}, \xi_{1,4}, \xi_{1,5}, \xi_{1,6}, \xi_{1,7}, \\ &\xi_3, \xi_1, \xi_{3,1}, \xi_{2,4}, \xi_{2,5}, \xi_{2,6}, \xi_{2,7}, \\ &\xi_1, \xi_2, \xi_{1,2}, \xi_{3,4}, \xi_{1,5}, \xi_{3,6}, \xi_{3,7}, \\ &\xi_{2,3}, \xi_{3,1}, \xi_{1,2}, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \\ &\xi_{1,4}, \xi_{2,4}, \xi_{3,4}, \xi_1, \xi_{6,7}, \xi_{7,5}, \xi_{5,6}, \\ &\xi_{1,5}, \xi_{2,5}, \xi_{3,5}, \xi_{6,7}, \xi_5, \xi_{7,4}, \xi_{1,6}, \\ &\xi_{1,6}, \xi_{2,6}, \xi_{3,6}, \xi_{5,7}, \xi_{7,4}, \xi_6, \xi_{1,5}, \\ &\xi_{1,7}, \xi_{2,7}, \xi_{3,7}, \xi_{5,6}, \xi_{6,4}, \xi_{4,5}, \xi_7. \end{aligned}$$

Legt man in den Formeln (4) eines dieser 8 Siebenersysteme zu Grunde, so geht jede Wurzel  $\xi_{i,k}$  in eine bestimmte andere über, die man nach folgender Regel findet.

$\xi_{i,k}$  geht in diejenige Wurzel über, deren Index man erhält, wenn man die den  $i, k$  entsprechenden Indices neben einander stellt, 1, 2, 3 hinzufügt, dann doppelt vorkommende Ziffern im Index unterdrückt und eventuell, wenn die Anzahl der Ziffern im Index 5 oder 6 ist, diese Ziffern durch die fehlenden ersetzt. Es würde also beispielsweise, wenn

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7$$

durch

$$\xi_{1,4}, \xi_{2,4}, \xi_{3,4}, \xi_4, \xi_{6,7}, \xi_{7,5}, \xi_{5,6}$$

ersetzt wird,

$$\xi_{1,2} \text{ in } \xi_{1,4,2,4,1,2,3} = \xi_3,$$

$$\xi_{1,5} \text{ in } \xi_{4,6,7,1,2,3} = \xi_5,$$

$$\xi_{5,6} \text{ in } \xi_{6,7,7,5,1,2,3} = \xi_{4,7}$$

übergehen.

2. Da durch 7 Doppeltangenten eines vollständigen Systems eine Curve 4<sup>ter</sup> Ordnung eindeutig (rational) bestimmt ist, so lassen sich die Coefficienten  $a_i$  rational ausdrücken durch

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7, \quad \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_7$$

in der Form

$$(5) \quad a_i = \Psi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7, \quad \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_7)$$

und hierin können die

$$\xi_1, \dots, \xi_7, \quad \Theta_1, \dots, \Theta_7$$

an Stelle der  $a_i$  als unabhängige Veränderliche angesehen werden, da ein vollständiges System von 7 Doppeltangenten willkürlich angenommen werden kann.

Diese Gleichungen bleiben richtig, wenn die  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  und die ihnen entsprechenden  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_7$  irgend wie unter einander vertauscht werden. Es ist aber auch gestattet, in denselben das vollständige Siebenersystem  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  durch ein beliebiges anderes zu ersetzen, wenn die zugehörigen  $\Theta$  immer durch die Formel (3) bestimmt werden; denn die Curve 4<sup>ter</sup> Ordnung ist durch jedes vollständige System von 7 Doppeltangenten in gleicher Weise eindeutig bestimmt.

3. Die Doppeltangenten lassen sich auf 63 Arten in Steiner'sche Gruppen von je 6 Paaren ordnen in der Weise, dass die 8 Berührungspunkte je zweier Paare einer Gruppe auf einem Kegelschnitt liegen. Durch ein Paar ist die ganze Steiner'sche Gruppe bestimmt; dies eine Paar kann aber beliebig ausgewählt werden. Sind

$$x_1 \equiv y - \Theta_1(x - \xi_1) = 0,$$

$$x_2 \equiv y - \Theta_2(x - \xi_2) = 0,$$

die Gleichungen zweier Doppeltangenten, so lässt sich zunächst in rationaler Weise (durch  $\xi_1, \Theta_1$ ;  $\xi_2, \Theta_2$ ; also nach (3) auch durch  $\xi_1, \xi_2$ ) die Gleichung eines Kegelschnittes,  $\Phi = 0$ , bestimmen, welche durch die vier Berührungspunkte dieser beiden Doppeltangenten geht; hierauf kann man einen Factor  $h$  und die Coefficienten der Gleichung eines zweiten Kegelschnittes,  $\Psi = 0$ , gleichfalls rational, so bestimmen, dass die Identität besteht:

$$hF - \Phi^2 = x_1 x_2 \Psi.$$

Hieraus folgt für ein beliebiges  $\lambda$

$$hF - (\Phi + \lambda x_1 x_2)^2 = x_1 x_2 (\Psi - 2\lambda\Phi - \lambda^2 x_1 x_2).$$

Man erhält nun die fünf übrigen Paare der zu  $x_1, x_2$  gehörigen Steiner'schen Gruppe, wenn man  $\lambda$  so bestimmt, dass

$$\Psi - 2\lambda\Phi - \lambda^2 x_1 x_2$$

in zwei lineare Factoren zerfällt, was für  $\lambda$  eine Gleichung fünften Grades giebt. Das Product, genommen über die 5 Wurzeln dieser Gleichung

$$\prod^{\lambda} (\Psi - 2\lambda\Phi - \lambda^2 x_1 x_2) = \Xi(x, y)$$

lässt sich rational durch  $\xi_1, \xi_2$  ausdrücken, und ist, gleich Null gesetzt, die Gleichung der 10 noch fehlenden Doppeltangenten dieser Gruppe.

Setzt man darin  $y = 0$ , so erhält man eine Gleichung 10<sup>ten</sup> Grades

$$(6) \quad X(\xi; \xi_1, \xi_2) = 0,$$

deren Wurzeln  $\xi$  10 weitere Wurzeln der Doppeltangentengleichung sind, welche die Eigenschaft haben, dass die drei Wurzeln  $\xi, \xi_1, \xi_2$  niemals zu einem vollständigen System gehören\*); und es gilt auch das Umgekehrte: wenn  $\xi, \xi_1, \xi_2$  drei nicht zu einem vollständigen System gehörige Wurzeln sind (d. h. wenn denselben drei Charakteristiken mit ungerader Summe entsprechen) so besteht zwischen ihnen die Gleichung (6).

## § 2.

Wir betrachten nun das System  $\mathfrak{G}$  derjenigen Substitutionen der 28 Wurzeln der Doppeltangentengleichung, welches man erhält, indem man zunächst die Elemente des Siebenersystems  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  auf alle mögliche Arten unter einander vertauscht, und ferner dasselbe durch alle 287 andere vollständige Siebenersysteme, jedes in jeder möglichen Ordnung genommen, ersetzt, und die übrigen Wurzeln jedesmal nach den Formeln (4), also nach der in § 1, 1. angegebenen Regel bestimmt.

Die Anzahl dieser Substitutionen beträgt

$$N = 288 \cdot \text{II}(7) = 36 \cdot \text{II}(8) = 1451520,$$

und es lässt sich nachweisen, dass das System  $\mathfrak{G}$  die Galois'sche Gruppe der Doppeltangentengleichung ist, wodurch wir zugleich der Nothwendigkeit des (übrigens leicht zu erbringenden) Beweises überhoben sind, dass das System  $\mathfrak{G}$  eine Gruppe ist.

Der Beweis ergibt sich aus Folgendem:

1. Wir bezeichnen die Galois'sche Gruppe der Doppeltangentengleichung einstweilen mit  $\mathfrak{G}'$  und zeigen zunächst, dass in derselben keine Substitution  $G$  vorkommen kann, durch welche ein vollständiges Siebenersystem in ein anderes als ein vollständiges Siebenersystem überginge. Denn angenommen, es gehe  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  durch  $G$  über in  $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$  der Art, dass die Summe der Charakteristiken von  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  gerade, die von  $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$  ungerade sei, so würde die Gleichung (6) bestehen

$$X(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) = 0$$

und diese müsste richtig bleiben, wenn man die Substitution  $G^{-1}$ , die gleichfalls zu  $\mathfrak{G}'$  gehört, anwendet, weil jede rationale Beziehung

\*) Nach unserer Bezeichnungsweise hat die Gleichung (6) die Wurzeln:

$\xi_{1,3}, \xi_{2,3}, \xi_{1,4}, \xi_{2,4}, \xi_{1,5}, \xi_{2,5}, \xi_{1,6}, \xi_{2,6}, \xi_{1,7}, \xi_{2,7}.$

zwischen den Wurzeln einer Gleichung erhalten bleibt, wenn man irgend eine Substitution der Gruppe dieser Gleichung auf dieselbe anwendet; also:

$$X(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

was nach § 1, 3. nicht möglich ist.

2. Ist  $G$  irgend eine in  $\mathfrak{G}'$  enthaltene Substitution, durch welche das vollständige Siebenersystem  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  übergeht in das vollständige System  $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_7$  so kann man die Substitution  $G$  auf die Relationen (4) § 1 anwenden, wodurch die Veränderungen bestimmt sind, welche die übrigen Wurzeln durch  $G$  erfahren. Diese Veränderungen sind aber dieselben wie in derjenigen Substitution aus  $\mathfrak{G}$ , welche  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  überführt in  $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_7$ , woraus folgt, dass  $G$  in  $\mathfrak{G}$  enthalten ist.

*Jede Substitution aus  $\mathfrak{G}'$  ist also zugleich in  $\mathfrak{G}$  enthalten.*

3. Drückt man in irgend einer rationalen Relation zwischen den Wurzeln der Doppeltangentengleichung:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7, \xi_{1,2}, \dots, a_1, a_2, \dots, a_{14}) = 0$$

zunächst die  $\xi_{i,x}$  durch die Formeln (4) und hierauf nach (5) die  $a_i$  durch  $\xi_1, \dots, \xi_7, \Theta_1, \dots, \Theta_7$  aus, so muss diese Relation in eine Identität übergehen, da die 14 Grössen  $\xi_1, \dots, \xi_7, \Theta_1, \dots, \Theta_7$  ganz beliebig gewählt werden können. Daraus folgt aber, dass auf jede solche Relation die sämtlichen Substitutionen von  $\mathfrak{G}$  angewandt werden dürfen. Insbesondere muss also jede Function der Wurzeln, welche im Rationalitätsbereich enthalten ist, durch die sämtlichen Substitutionen von  $\mathfrak{G}$  ungeändert bleiben, woraus hervorgeht, dass jede in  $\mathfrak{G}$  enthaltene Substitution zugleich in  $\mathfrak{G}'$  vorkommt, womit der gesuchte Beweis vollendet ist.)\*

Da man zwei und nicht mehr Charakteristiken eines vollständigen Siebenersystems beliebig wählen kann, so ist hiernach die Gruppe der Doppeltangentengleichung *zweifach transitiv*.

### § 3.

Wir suchen nun zunächst eine übersichtliche Darstellung und Bezeichnung der Substitutionen dieser Gruppe zu gewinnen.

Wenn man zunächst diejenigen unter den Substitutionen  $\mathfrak{G}$  herausgreift, welche das vollständige Siebenersystem  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  im Ganzen ungeändert lassen, und nur seine Elemente unter einander vertauschen, so erhält man eine Gruppe von  $\Pi(7)$  Substitutionen, welche ganz in  $\mathfrak{G}$  enthalten ist, welche sich eindeutig beziehen lässt auf die Gruppe

$$\mathfrak{A} = A_0, A_1, A_2, \dots$$

\*) Vgl. Serret, Algèbre sup. (3<sup>te</sup> Aufl.) II, p. 611.

der sämtlichen  $\Pi(7)$  Substitutionen von sieben Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Wir wählen ferner aus  $\mathfrak{G}$  sieben Substitutionen aus, durch welche das vollständige System  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  durch sieben andere ersetzt wird, welche zu derselben geraden Charakteristik gehören. Diese mögen sein:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 1, & 1,2, & 1,3, & 1,4, & 1,5, & 1,6, & 1,7 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 1,2, & 2, & 2,3, & 2,4, & 2,5, & 2,6, & 2,7 \end{pmatrix} \text{ etc.,}$$

woraus man eine weitere, gleichfalls in  $\mathfrak{G}$  enthaltene Gruppe von  $\Pi(8)$  Substitutionen ableitet, welche alle diejenigen Substitutionen von  $\mathfrak{G}$  umfasst, durch welche das System  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  entweder ungeändert bleibt, oder durch ein anderes ersetzt wird, welches zu derselben geraden Charakteristik gehört. Diese Gruppe lässt sich eindeutig beziehen auf die Gruppe  $\mathfrak{S}$  der sämtlichen  $\Pi(8)$  Substitutionen von 8 Elementen (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), wenn man die Bezeichnung der Wurzeln dahin abändert, dass man einen 8<sup>ten</sup> Index einführt und demnach  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7$  durch  $\xi_{1,8}, \xi_{2,8}, \xi_{3,8}, \xi_{4,8}, \xi_{5,8}, \xi_{6,8}, \xi_{7,8}$  bezeichnet. (Bezeichnung der Doppeltangenten von Hesse). Die Wurzeln der Doppeltangentengleichung sind dann übereinstimmend durch  $\xi_{i,\kappa}$  ( $i, \kappa = 1, 2, 3, \dots, 8$ ) bezeichnet und jeder Vertauschung der 8 Elemente (1, 2, 3, ..., 8) entspricht eine bestimmte Vertauschung dieser Wurzeln. Die Substitutionen  $T_1, T_2, \dots, T_7$  entsprechen den Vertauschungen (1, 8), (2, 8), ..., (7, 8). Wir können daher die aus  $\mathfrak{H}$  und  $T_1, T_2, \dots$  gebildete Gruppe einfach durch die Gruppe  $\mathfrak{S}$ , und ihre Substitutionen durch die Substitutionen  $S_0, S_1, \dots$  von  $\mathfrak{S}$  bezeichnen. Um die ganze Gruppe  $\mathfrak{G}$  darzustellen, müssen noch 35 Substitutionen hinzugenommen werden, durch welche das vollständige System  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$  durch ein anderes ersetzt wird, welches zu jedem der 35 Dreiersysteme ( $i, \kappa, \lambda$ ) gehört. Eine solche zu (1, 2, 3) gehörige Substitution ist

$$U_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 2,3, & 3,1, & 1,2, & 4, & 5, & 6, & 7 \end{pmatrix}.$$

Es ist auch hier bequemer, den 8<sup>ten</sup> Index noch beizufügen und diese Substitution  $U_{1,2,3}$  mit

$$U_{1,2,3,8} = U_{4,5,6,7}$$

zu bezeichnen, indem man festsetzt, dass  $U_{i,i',i'',i'''}$  und  $U_{\kappa,\kappa',\kappa'',\kappa'''}$  dasselbe bedeuten sollen, wenn die  $i, i', i'', i''', \kappa, \kappa', \kappa'', \kappa'''$  zusammen alle 8 Indices umfassen. Die Anzahl dieser Substitutionen ist dann

gerade 35 und die ganze Gruppe  $\mathfrak{G}$  kann symbolisch so bezeichnet werden:

$$(1) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{S} + \sum \mathfrak{S} U_{i,i',i'',i'''}.$$

Die Gesetze der Zusammensetzung in dieser Gruppe sind folgende:

Ist

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8 \end{pmatrix}$$

irgend eine Substitution in  $\mathfrak{S}$ , so ist

$$(2) \quad U_{1,2,3,4} S = S U_{a_1, a_2, a_3, a_4},$$

$$(3) \quad U_{1,2,3,4} U_{1,2,3,4} = 1,$$

$$(4) \quad U_{1,2,3,4} U_{1,2,3,5} = (4, 5) U_{1,2,3,4},$$

$$(5) \quad U_{1,2,3,4} U_{1,2,5,6} = (1, 2) (3, 4) (5, 6) (7, 8) U_{1,2,7,8}.$$

#### § 4.

Aus dieser Darstellung der Gruppe der Doppeltangentengleichung ergibt sich sofort eine bemerkenswerthe Folgerung. Die Gruppe  $\mathfrak{S}$  lässt sich zusammensetzen aus den Transpositionen  $(i, \kappa)$ . Eine solche Transposition, etwa  $(1, 2)$ , bewirkt aber die folgenden Transpositionen der Wurzeln:

$$(\xi_{1,3}, \xi_{2,3}), (\xi_{1,4}, \xi_{2,4}), (\xi_{1,5}, \xi_{2,5}),$$

$$(\xi_{1,6}, \xi_{2,6}), (\xi_{1,7}, \xi_{2,7}), (\xi_{1,8}, \xi_{2,8}),$$

während die übrigen Wurzeln ungeändert bleiben. Da die Anzahl dieser Transpositionen gerade ist, so folgt, dass alle Substitutionen in  $\mathfrak{S}$  aus einer *geraden* Anzahl von Transpositionen zusammengesetzt sind. Dasselbe gilt aber auch von den Substitutionen  $U$  und mithin von der ganzen Gruppe  $\mathfrak{G}$ ; denn z. B. die Substitution  $U_{1,2,3,4}$  bewirkt die folgenden Wurzelvertauschungen:

$$(\xi_{1,2}, \xi_{3,4}), (\xi_{1,3}, \xi_{2,4}), (\xi_{1,4}, \xi_{2,3}),$$

$$(\xi_{3,6}, \xi_{7,9}), (\xi_{5,7}, \xi_{6,8}), (\xi_{6,7}, \xi_{5,8}).$$

Daraus aber ergibt sich, dass das Differenzenproduct der sämmtlichen 28 Wurzeln durch die Substitutionen von  $\mathfrak{G}$  ungeändert bleibt, und mithin im Rationalitätsbereich enthalten ist. Damit ist bewiesen:

*Die Discriminante der Doppeltangentengleichung ist das Quadrat einer rationalen Function.*

#### § 5.

Wenn in einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  eine andere Gruppe  $\mathfrak{G}_1$  ganz enthalten ist, so nennen wir  $\mathfrak{G}_1$  einen Divisor von  $\mathfrak{G}$ ; wenn ferner für je zwei Substitutionen  $G$  in  $\mathfrak{G}$  und  $G_1$  in  $\mathfrak{G}_1$  die transformirte Substitution



$$G^{-1} G_1 G$$

in  $G_1$  enthalten ist, wenn also mit andern Worten

$$G^{-1} \mathfrak{G}_1 G = \mathfrak{G}_1$$

ist, so heisst  $\mathfrak{G}_1$  ein *eigentlicher Divisor von  $\mathfrak{G}$* . (Galois).

Dies vorausgeschickt, wollen wir nachweisen, dass unsere Gruppe  $\mathfrak{G}$  ausser  $\mathfrak{G}$  selbst und der Einheit keinen eigentlichen Divisor enthält.

Die Gruppe  $\mathfrak{S}$ , welche durch die sämtlichen Substitutionen von 8 Elementen dargestellt ist, enthält bekanntlich einen eigentlichen Divisor  $\mathfrak{S}'$ , der diejenigen Substitutionen umfasst, welche aus einer geraden Anzahl von Transpositionen gebildet sind, und welche die *alternirende* Gruppe von 8 Elementen genannt wird. Wir können, indem wir den Inbegriff derjenigen Substitutionen in  $\mathfrak{S}$ , welche aus einer ungeraden Anzahl von Transpositionen bestehen mit  $\mathfrak{S}''$  bezeichnen

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}'' = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}'(1, 2)$$

setzen. Ist dann  $\mathfrak{H}$  irgend ein von der Einheit verschiedener eigentlicher Divisor von  $\mathfrak{G}$ , so ergibt sich Folgendes:

1. Wenn in  $\mathfrak{H}$  eine von 1 verschiedene Substitution aus  $\mathfrak{S}'$  vorkommt, so enthält  $\mathfrak{H}$  die ganze Gruppe  $\mathfrak{S}'$ ; enthält  $\mathfrak{H}$  eine Substitution aus  $\mathfrak{S}''$ , so enthält es die ganze Gruppe  $\mathfrak{S}$ . Dies sind bekannte Sätze aus der allgemeinen Substitutionstheorie.

2. Wenn  $\mathfrak{H}$  eine von der Einheit verschiedene Substitution aus  $\mathfrak{S}$ , also sicher die ganze Gruppe  $\mathfrak{S}'$  enthält, so ist  $\mathfrak{H}$  mit  $\mathfrak{G}$  identisch; denn n. V. kommt in  $\mathfrak{H}$  vor:

$$U_{1,2,3,4}(4,5,6) U_{1,2,3,4} = (4,5,6)(4,5) U_{1,2,3,5}$$

und mithin das ganze System

$$\mathfrak{S}'' U_{1,2,3,5}$$

und folglich auch sämtliche

$$\mathfrak{S}' U_{i,i',i'',i'''}$$

Ebenso enthält aber  $\mathfrak{H}$  auch

$$U_{1,2,3,4}(3,5)(4,6) U_{1,2,3,4} = (3,5)(4,6)(1,2)(3,4)(5,6)(7,8) U_{1,2,7,8},$$

mithin auch sämtliche

$$\mathfrak{S}' U_{1,2,7,8}$$

und folglich alle

$$\mathfrak{S}' U_{i,i',i'',i'''}$$

also auch das ganze System  $\mathfrak{S}''$ , w. z. b. w.

3. Enthält  $\mathfrak{H}$  eine der Substitutionen  $U_{1,2,3,4}$ , so enthält sie wegen

$$S^{-1} U_{1,2,3,4} S = U_{a_1, a_2, a_3, a_4}$$

alle diese Substitutionen; mithin auch

$$U_{1,2,3,4} U_{1,2,3,5} U_{1,2,3,4} = (4,5)$$

und ist also nach 2. mit  $\mathfrak{G}$  identisch.

4. Enthält  $\mathfrak{H}$  eine Substitution von der Form  $SU_{1,2,3,4}$ , worin  $S$  von 1 verschieden ist, so enthält es auch, wenn  $\iota, \kappa$  irgend zwei Indices sind, beide aus der Reihe 1, 2, 3, 4 oder beide aus der Reihe 5, 6, 7, 8,

$$(\iota, \kappa) SU_{1,2,3,4}(\iota, \kappa) U_{1,2,3,4} S^{-1} = (\iota, \kappa) S(\iota, \kappa) S^{-1}.$$

Wenn man also nachweisen kann, dass sich über  $\iota, \kappa$  so verfügen lässt, dass dies letztere nicht die identische Substitution ist, so ist nach 1. bewiesen, dass auch in diesem letzten Falle  $\mathfrak{H}$  mit  $\mathfrak{G}$  übereinstimmen muss. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass

$$S^{-1}(\iota, \kappa) S = (a_\iota, a_\kappa)$$

von  $(\iota, \kappa)$  verschieden sei. Dies ist sicher dann der Fall, wenn man für  $\iota$  zunächst einen durch  $S$  veränderten Index und dann, was stets möglich ist,  $\kappa$  so wählt dass  $a_\kappa$  nicht  $= \iota$  ist. Damit ist also nachgewiesen, dass die Gruppe  $\mathfrak{G}$  ausser der Einheit und sich selbst keinen eigentlichen Divisor besitzt.

Hieraus folgt zunächst, dass die Gruppe der Doppeltangentengleichung nicht durch Adjunction der Wurzel einer reinen Gleichung erniedrigt werden kann.

## § 6.

Um solche Gleichungen zu ermitteln, deren Wurzeln die Gruppe der Doppeltangentengleichung erniedrigen, hat man uneigentliche Divisoren der Gruppe  $\mathfrak{G}$  aufzusuchen. Von besonderem Interesse ist dabei die Frage, ob sich darunter Gleichungen von niedrigerem als dem 28<sup>ten</sup> Grade befinden, d. h. ob es Divisoren von  $\mathfrak{G}$  giebt, deren Grad höher als  $\frac{N}{28}$  ist\*). Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

1. Wenn ein Divisor  $\mathfrak{H}$  von  $\mathfrak{G}$  die ganze Gruppe  $\mathfrak{G}'$  und ausserdem eine nicht in  $\mathfrak{G}$  enthaltene Substitution enthält, so ist  $\mathfrak{H}$  mit  $\mathfrak{G}$  identisch. Beim Beweis dieser Behauptung sind zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Es enthalte  $\mathfrak{H}$  eine Substitution von der Form  $S'U_{1,2,3,4}$ . Dann enthält  $\mathfrak{H}$  die sämtlichen  $\mathfrak{G}'U_{1,2,3,4}$  und auch die sämtlichen  $\mathfrak{G}'U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}; \text{ mithin auch } U_{1,2,3,4} \text{ und } U_{1,2,3,5}; \text{ folglich auch}$

$$U_{1,2,3,4} U_{1,2,3,5} U_{1,2,3,4} = (4, 5)$$

und daher die ganze Gruppe  $\mathfrak{G}$  und mithin  $\mathfrak{G}$ .

b) Es enthalte  $\mathfrak{H}$  eine Substitution von der Form  $S''U_{1,2,3,4}$  und folglich sämtliche  $\mathfrak{G}''U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}.$  Dann enthält  $\mathfrak{H}$  auch

\*) C. Jordan hat auf anderem Wege diese Frage behandelt und in verneinendem Sinne beantwortet (Traité des substitutions p. 329).

$$(1, 2) U_{1,2,3,4} (1, 2) U_{1,2,5,6} (1, 2) U_{1,2,7,8} = (3, 4) (5, 6) (7, 8)$$

also die ganze Gruppe  $\mathfrak{S}$  und mithin  $\mathfrak{G}$ .

2. Es sei  $\mathfrak{D}$  der grösste gemeinschaftliche Theiler von  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{S}$  vom Grade  $d$ . Wenn dann in  $\mathfrak{H}$  irgend eine Substitution  $S U_{1,2,3,4}$  vorkommt, so enthält  $\mathfrak{H}$  alle  $\mathfrak{D} S U_{1,2,3,4}$ , und es ist auch umgekehrt, wenn  $S_1 U_{1,2,3,4}$  in  $\mathfrak{H}$  enthalten ist,  $S_1$  in  $\mathfrak{D} S$  enthalten, woraus hervorgeht, dass es in  $\mathfrak{S} U_{1,2,3,4}$  entweder gar keine oder genau  $d$  Substitutionen aus  $\mathfrak{H}$  giebt. Der Grad  $h$  von  $\mathfrak{H}$  ist also  $\leq 36d$ , und wenn  $h$  grösser als  $\frac{N}{28}$  sein soll, so muss

$$36d > \frac{\Pi(8)36}{28},$$

d. h.

$$d > \frac{\Pi(8)}{28}$$

sein. Wir haben also nur diejenigen Divisoren  $\mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{S}$  zu berücksichtigen, deren Index (nach Cauchy u. Serret) kleiner als 28 ist.

Was zunächst die *intransitiven* Divisoren von  $\mathfrak{S}$  betrifft, so sind darunter nur zwei Typen, deren Index  $< 28$  ist\*), nämlich die Gruppe sämtlicher Vertauschungen von nur sieben Elementen, und die alternirende Gruppe von sieben Elementen. Die Indices dieser beiden Gruppen sind bezw. 8 und 16. Lassen wir in beiden Gruppen dieselbe Ziffer, etwa 8 ungeändert, so enthält die erste die zweite. Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass eine Gruppe  $\mathfrak{H}$ , welche eine dieser beiden Gruppen und ausserdem noch irgend eine Substitution  $S U_{i,i',i'',i'''}$  enthält, mit  $\mathfrak{G}$  identisch ist. Der Beweis dieser Behauptung setzt sich folgendermassen zusammen.

Es bedeute  $\mathfrak{A}$  die Gruppe sämtlicher Substitutionen der 7 Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,  $\mathfrak{A}'$  die darin enthaltene alternirende Gruppe und es sei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''.$$

Eine in  $\mathfrak{S}$  enthaltene Gruppe, welche  $\mathfrak{A}'$  enthält, und ausserdem eine Substitution aus  $\mathfrak{A}''(1, 8)$ , enthält die ganze Gruppe  $\mathfrak{S}$ , und wenn sie eine Substitution aus  $\mathfrak{A}'(1, 8)$  enthält, so ist sie mit  $\mathfrak{S}$  identisch.

Eine in  $\mathfrak{G}$  enthaltene Gruppe  $\mathfrak{H}$  möge nun  $\mathfrak{A}'$  und ausserdem eine Substitution

$$H = S U_{i,i',i'',i'''}$$

enthalten. Es sind dann folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Die Substitution  $H$  hat die Form

$$A' U_{1,2,3,4}.$$

\*) Vgl. Serret, Alg. sup. II, p. 322 ff.

In diesem Falle enthält die Gruppe  $\S$  auch  $U_{1,2,3,4}$  und sämtliche  $U_{\iota, \iota', \iota'', \iota'''} (da man die letztere Bezeichnung immer so wählen kann, dass der Index 8 nicht unter den  $\iota, \iota', \iota'', \iota'''$  vorkommt). Folglich kommt in  $\S$  auch$

$$U_{1,2,3,4} U_{1,2,3,5} U_{1,2,3,4} = (4, 5)$$

und mithin die ganze Gruppe  $\mathfrak{A}$  vor; ebenso aber auch

$$U_{1,2,3,7} U_{1,2,3,8} U_{1,2,3,7} = (7, 8),$$

mithin die ganze Gruppe  $\S$  und folglich ist  $\S$  mit  $\mathfrak{G}$  identisch.

2.  $H$  ist von der Form

$$A'' U_{1,2,3,4}.$$

In diesem Falle enthält  $\S$  das ganze System  $\mathfrak{A}'' U_{\iota, \iota', \iota'', \iota'''$ , also auch:

$$(4, 5) U_{1,2,3,8} U_{1,4,5,8} (6, 7) = (1, 8) (2, 3) U_{1,6,7,8}$$

und folglich auch  $(1, 8)$ , also die ganze Gruppe  $\S$  und mithin wie oben  $\mathfrak{G}$ .

3.  $H$  habe die Form

$$A(1, 8) U_{1,2,3,4}.$$

Dann enthält  $\S$  auch  $A_1(1, 8) U_{1,2,3,5}$  (Zusammensetzung mit  $(4, 5, 6)$ ;  $A_{(4,5,6)} = A_1$  gesetzt) und folglich auch:

$$A(1, 8) U_{1,2,3,4} U_{1,2,3,5} (1, 8) A_1^{-1} = A(1, 8) (4, 5) U_{1,2,3,4} (1, 8) A_1^{-1},$$

also auch  $A(4, 5) U_{2,3,4,8} A_1^{-1}$ , wodurch dieser Fall auf 2. zurückgeführt ist. Ganz ebenso schliesst man, wenn  $H$  die Form

$$A(7, 8) U_{1,2,3,4}$$

hat.

Der nächst niedrige Werth, den der Index einer intransitiven Gruppe bei 8 Elementen haben kann, ist 28. Eine solche Gruppe entsteht nur dadurch, dass zwei Elemente unter sich und die übrigen 6 unter sich auf alle möglichen Arten vertauscht werden. Hieraus ergibt sich ein Divisor von  $\mathfrak{G}$  vom Grade  $\frac{N}{28}$ , welcher aus allen den Substitutionen von  $\mathfrak{G}$  besteht, welche eine Wurzel der Doppeltangentengleichung ungeändert lassen.

Unter den transitiven Divisoren von  $\S$  kommen aber überhaupt keine vor, deren Index kleiner als 28 ist. Denn bei einer *imprimitiven* Gruppe kann der Index nicht kleiner als 35 sein (vgl. Netto, Substitutionstheorie, Leipzig 1883, Seite 79) und für eine primitive und transitive Gruppe von  $n$  Elementen besteht ein allgemeiner Satz (Netto, l. c. Seite 126), wonach ihr Index durch jede Primzahl, die  $< \frac{2n}{3}$  ist, theilbar sein muss. Für unsern Fall ( $n = 8$ ) muss also der Index einer jeden transitiven und primitiven Gruppe durch 30 theilbar sein.

## § 7.

1. Unsere bisherige Untersuchung hat uns auf einen Divisor  $\mathfrak{S}$  der Gruppe der Doppeltangentengleichung geführt, welcher vom Grade  $\frac{N}{36}$  ist. Da durch Substitution der Gruppe  $\mathfrak{S}$  jedes Paar 1, 2 in jedes andere, also jede Wurzel in jede andere übergehen kann, so ist diese Gruppe noch *transitiv*. Aber sie ist nur einfach transitiv, da man durch Substitutionen von  $\mathfrak{S}$  beispielsweise nicht gleichzeitig  $\xi_{1,2}$  ungeändert lassen und  $\xi_{1,3}$  in  $\xi_{1,5}$  überführen kann.

Eine Function der Wurzeln, welche durch die Substitutionen von  $\mathfrak{S}$  ungeändert bleibt, dagegen durch jede nicht in  $\mathfrak{S}$  enthaltene Substitution sich ändert, genügt einer irreductibeln Gleichung 36<sup>ten</sup> Grades. Eine solche Function ist z. B. wenn man

$$v_1 = \xi_{1,2} \xi_{1,3} \xi_{1,4} \xi_{1,5} \xi_{1,6} \xi_{1,7} \xi_{1,8}$$

setzt:

$$u = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8.$$

Durch Adjunction einer Wurzel dieser Gleichung wird die Doppeltangentengleichung selbst noch nicht reducirt, aber ihre Gruppe reducirt sich auf die Gruppe  $\mathfrak{S}$ , d. h. auf die Gruppe einer allgemeinen Gleichung des 8<sup>ten</sup> Grades. Die Grössen  $v_1, v_2, \dots, v_8$  sind die Wurzeln einer solchen, nach deren vollständiger Auflösung auch die Gleichung der Doppeltangenten gelöst ist.

2. Unter den übrigen Divisoren der Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist zunächst noch derjenige hervorzuheben, den wir schon in § 6 erwähnt haben, welcher eine Wurzel, etwa  $\xi_{7,8}$  ungeändert lässt, und welcher vom Grade  $\frac{N}{28}$  ist.

Bedeutet  $\mathfrak{A}$  das System der sämtlichen Vertauschungen der Elemente 1, 2, 3  $\dots$  6, so lässt sich diese Gruppe folgendermassen darstellen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}(7, 8) + \sum_{1,6}^{x,\lambda,\mu} \mathfrak{A} U_{x,\lambda,\mu,8} \\ + \sum_{1,6}^{x,\lambda,\mu} \mathfrak{A}(7, 8) U_{x,\lambda,\mu,8} + \sum_{1,6}^{x,\lambda} \mathfrak{A}(7, x) (8, \lambda) U_{x,\lambda,7,8}, \end{aligned}$$

Diese Gruppe stimmt nach einer schon von O. Jordan benutzten Bemerkung von Geiser\*) mit der Gruppe der Gleichung 27<sup>ten</sup> Grades überein, von welcher die 27 Geraden auf einer allgemeinen Fläche 3<sup>ter</sup> Ordnung abhängen.

Die Gruppe  $\mathfrak{T}$  ist intransitiv; auf sie wird durch Adjunction der Wurzel  $\xi_{7,8}$  die Gruppe der Doppeltangentengleichung reducirt. Die

\*) Mathemat. Annalen, Bd. I, S. 129.

Gleichung selbst reducirt sich dadurch auf den 27<sup>ten</sup> Grad. Adjungirt man eine zweite Wurzel, etwa  $\xi_{6,8}$ , so reducirt sich die Gruppe  $\mathfrak{Z}$  noch weiter, und zwar, wenn man mit  $\mathfrak{B}$  die Gruppe der Substitutionen der Elemente 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet, auf

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \sum_{1,5}^{x,\lambda,\mu} \mathfrak{B} U_{x,\lambda,\mu,8} + \sum_{1,5}^x \mathfrak{B}(6,7)(8,x) U_{6,7,8,x},$$

welche  $\Pi(5) \cdot 16$  Substitutionen enthält. Diese Gruppe ist aber auch für die 26 übrigen Wurzeln nicht mehr transitiv, denn sie vertauscht die Wurzeln

$$\xi_{1,6}, \xi_{1,7}, \xi_{2,6}, \xi_{2,7}, \xi_{3,6}, \xi_{3,7}, \xi_{4,6}, \xi_{4,7}, \xi_{5,6}, \xi_{5,7}$$

nur unter einander, welche daher als Wurzeln einer Gleichung 10<sup>ten</sup> Grades bestimmt sind. Diese Gleichung 10<sup>ten</sup> Grades ist keine andere als die in § 1 erwähnte Gleichung (6), und  $\mathfrak{B}$  ist die Gruppe dieser Gleichung.  $\mathfrak{B}$  besitzt einen Divisor von  $\Pi(4) \cdot 16$  Substitutionen, welcher alle diejenigen Substitutionen umfasst, welche ein Product wie  $\xi_{5,6}\xi_{5,7}$  ungeändert lässt, und diese Producte sind also die Wurzeln einer Gleichung 5<sup>ten</sup> Grades.

3) Hat  $\mathfrak{A}$  dieselbe Bedeutung wie oben, so findet man leicht noch den folgenden Divisor von  $\mathfrak{G}$ :

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}(7,8) + \sum_{1,6}^{x,\lambda} \mathfrak{A} U_{x,\lambda,7,8} + \sum_{1,6}^x \mathfrak{A}(7,8) U_{x,\lambda,7,8},$$

dessen Grad  $\frac{N}{63}$  ist. Auch diese Gruppe ist intransitiv, indem sie die Wurzeln

$$\begin{aligned} \xi_{1,8}, \xi_{2,8}, \xi_{3,8}, \xi_{4,8}, \xi_{5,8}, \xi_{6,8}, \\ \xi_{1,7}, \xi_{2,7}, \xi_{3,7}, \xi_{4,7}, \xi_{5,7}, \xi_{6,7} \end{aligned}$$

nur unter einander vertauscht.

Eine Function welche durch die Substitutionen von  $\mathfrak{M}$  und nur durch diese ungeändert bleibt, und daher einer Gleichung 63<sup>ten</sup> Grades genügt, ist z. B.

$$v = \xi_{1,7}\xi_{1,8} + \xi_{2,7}\xi_{2,8} + \xi_{3,7}\xi_{3,8} + \cdots + \xi_{6,7}\xi_{6,8};$$

die Adjunction einer Wurzel dieser Gleichung 63<sup>ten</sup> Grades bewirkt ein Zerfallen der Doppeltangentengleichung in eine Gleichung 12<sup>ten</sup> und eine 16<sup>ten</sup> Grades.

4. Es möge endlich noch ein Divisor von  $\mathfrak{G}$  vom Grade  $\frac{N}{336}$  erwähnt sein. Es bedeute  $\mathfrak{C}$  die Gruppe derjenigen Substitutionen der Elemente 1, 2, ..., 8, welche 1, 2, 3, 4, 5 einerseits, 6, 7, 8 andererseits unter einander vertauschen. Die erwähnte Gruppe ist dann

$$G + \sum_{1,3}^{\kappa} G U_{6,7,\lambda,\kappa}.$$

Auch diese Gruppe ist intransitiv, denn sie vertauscht die Wurzeln  $\xi_{\lambda,\lambda}$  ( $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$ ) nur unter einander. Eine zu dieser Gruppe gehörige Function, welche Wurzel einer Gleichung 336<sup>ten</sup> Grades ist, ist folgende:

$$w = \xi_{1,6} \xi_{2,6} \xi_{3,6} \xi_{4,6} \xi_{5,6} \xi_{7,8} + \xi_{1,7} \xi_{2,7} \xi_{3,7} \xi_{4,7} \xi_{5,7} \xi_{6,8} \\ + \xi_{1,8} \xi_{2,8} \xi_{3,8} \xi_{4,8} \xi_{5,8} \xi_{6,7}.$$

Dieser Gruppe kann die folgende geometrische Interpretation gegeben werden:

Es lassen sich auf 336 Arten 18 Doppeltangenten auswählen, welche drei Brianchon'sche Sechsecke bilden.

Charlottenburg, im October 1883.