

## Zwei Anwendungen der Mengenlehre in der elementaren Geometrie.

Von

M. DEHN in Münster i. W.

---

In einer früheren Arbeit\*) habe ich nachgewiesen, daß die Bestimmungsstücke zweier endlich gleicher Polyeder — d. i. solcher inhaltsgleicher Polyeder, die nach Hinzufügen resp. kongruenter Polyeder in kongruente Polyeder zerlegt werden können — gewisse Bedingungen befriedigen müssen. Ich habe gezeigt, daß diese im Euklidischen Raume in gewissen speziellen Fällen — z. Beispiel: reguläres Tetraeder und Würfel — nicht erfüllt werden können, daß es also inhaltsgleiche, nicht endlichgleiche Polyeder gibt. Im folgenden soll nun mit Hilfe sehr viel allgemeinerer, mengentheoretischer Betrachtungen nachgewiesen werden, daß es eine nichtabzählbar unendliche Anzahl von Paaren inhaltsgleicher Polyeder sowohl in dem Euklidischen wie in dem Nichteuklidischen Raume gibt, die diese Bedingungen nicht befriedigen.

### 1) Euklidischer Raum.

Wir gebrauchen die erwähnten Bedingungen nur in folgender spezieller Form:

Wenn ein Tetraeder mit den Flächenwinkeln  $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_6$  einem Würfel endlichgleich sein soll, so muß eine Gleichung von folgender Form bestehen:

$$\nu_1 \tau_1 + \nu_2 \tau_2 + \dots + \nu_6 \tau_6 = \nu R,$$

wo  $R$  den vierten Teil des Vollwinkels bedeutet und  $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_6$  rationale von Null verschiedene Zahlen sind. — Daraus folgt unmittelbar: kein Tetraeder, bei dem  $\tau_6 = \tau_5 = \tau_4 = R$ ,  $\tau_3 = \nu' R$  ist ( $\nu'$  eine rationale Zahl  $< 1$ ) und bei dem keine Beziehung von der Form  $\nu_1 \tau_1 + \nu_2 \tau_2 = \nu R$  besteht, kann einem Würfel endlichgleich sein. Es wird sich im folgenden darum handeln, die Existenz solcher Tetraeder nachzuweisen. Wir schicken folgenden *Hilfssatz* über Punktmengen des Linearkontinuums voraus:

---

\*) Math. Ann. 55.

*Eine abzählbare Menge nirgends überall dichter Mengen von Punkten kann keine Strecke des Kontinuums vollständig erfüllen.*

Unter einer nirgends überall dichten Menge verstehen wir eine Menge von der Eigenschaft, daß sich keine Strecke des Kontinuums finden läßt derart, daß in jedem Teilintervall dieser Strecke ein Punkt der gegebenen Menge liegt.

Wir wählen zwei beliebige Punkte,  $a$  und  $b$ , der Zahlengeraden aus und wollen zeigen, daß es zwischen  $a$  und  $b$  einen Punkt gibt, der keiner der gegebenen Mengen angehört. Diese Mengen seien, irgendwie einfach angeordnet,  $M_1, M_2 \dots$ . Dann liegt zwischen  $a$  und  $b$  nach Voraussetzung ein Intervall  $\xi_1, \xi_1'$  ( $\xi_1 < \xi_1'$ ) von der Eigenschaft, daß weder  $\xi_1$  noch  $\xi_1'$  noch irgend ein innerer Punkt dieses Intervalles ein Punkt der Menge  $M_1$  ist. Innerhalb des Intervalles  $\xi_1 \xi_1'$  gibt es ein zweites Endpunktpaar  $\xi_2 \xi_2'$  ( $\xi_2 < \xi_2'$ ) von derselben Eigenschaft für die Menge  $M_2$  usw.: Die Zahlen  $\xi_i$  und die Zahlen  $\xi_i'$  konvergieren als stets wachsende Größen, die unter einer Grenze bleiben, resp. als stets abnehmende, die über einer Grenze bleiben, gegen 2 Grenzwerte  $X$  und  $X'$ , die auch zusammenfallen können.  $X$  und  $X'$  sind keinesfalls Punkte irgend einer der Mengen  $M_i$  gemäß der Konstruktion und damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Machen wir in einem Tetraeder 3 Flächenwinkel  $\tau_6, \tau_5, \tau_4$ , gleich einem Rechten, so besteht zwischen den 3 übrigen Winkeln die Gleichung:

$$\cos^2 \tau_1 + \cos^2 \tau_2 + \cos^2 \tau_3 = 1.$$

Machen wir  $\tau_3$  gleich  $\nu R$ , wo  $\nu < 1$  ist, so erhalten wir

$$\cos^2 \tau_1 + \cos^2 \tau_2 = \varepsilon. \quad (\varepsilon < 1)$$

Angenommen nun, für jeden Wert von  $\tau_1$  erhielte ich durch diese Gleichung ein  $\tau_2$  so, daß eine Gleichung von der Form

$$\nu_1 \tau_1 + \nu_2 \tau_2 = \nu R$$

bestände, wo  $\nu_1$  und  $\nu_2$  rationale nicht verschwindende Zahlen sind, so ist jedem Werte, den  $\tau_2$  zwischen 0 und  $2R$  annehmen kann, ein bestimmtes Wertetripel  $\nu_1, \nu_2, \nu$  zugeordnet. Die Menge aller möglichen solchen Wertetripel ist abzählbar. Wäre nun jedem Wertetripel eine in keinem Intervalle überall dichte Menge zugeordnet, so würde im Widerspruch zu dem bewiesenen Hilfssatz eine abzählbare Menge von nirgends überall dichten Mengen die Strecke des Kontinuums zwischen 0 und  $\pi$  vollständig erfüllen. So müssen also in einem Intervall  $\xi < \tau_1 < \xi'$  in überall dicht liegenden Punkten gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$\cos^2 \tau_1 + \cos^2 \tau_2 = \varepsilon$$

und

$$\nu_1 \tau_1 + \nu_2 \tau_2 = \nu \pi,$$

wo  $\nu_1, \nu_2, \nu$  jetzt bestimmte rationale Zahlen sind, bestehen. Daher muß,

da  $\tau_2$  nach der zweiten Gleichung eine überall eindeutige analytische, und monogene Funktion von  $\tau_1$ , die erste Beziehung aber analytisch ist, jedes Wertepaar  $\tau_1, \tau_2$ , das die zweite Gleichung befriedigt, auch die erste befriedigen.

Es muß also die durch die erste Gleichung definierte Kurvenmännigfaltigkeit eine Gerade

$$\nu_1 \tau_1 + \nu_2 \tau_2 = \nu \pi$$

in sich enthalten, wo  $\nu_1$  und  $\nu_2$  reelle rationale nichtverschwindende Zahlen sind. Das ist aber nicht der Fall, weil es auf jener Mannigfaltigkeit keinen reellen Punkt gibt, für den  $\tau_1 = 0$  wäre, während doch nach der zweiten Gleichung zu diesem Werte von  $\tau_1$  der Wert

$$\tau_2 = \frac{\nu \pi}{\nu_2}$$

gehört. Es gibt also (und zwar nichtabzählbar) unendlich viele Werte von  $\tau_1$ , für die zusammen mit den zugehörigen  $\tau_2$  keine Beziehung von der Form

$$\nu_1 \tau_1 + \nu_2 \tau_2 = \nu R$$

besteht, womit wir unser Ziel erreicht haben.

2) *Nichteuklidischer Raum.*

Hier brauchen wir von mengentheoretischer Seite nur den einfachsten Fall des vorhin bewiesenen Hilfssatzes, nämlich die Tatsache, daß eine abzählbare Menge von Punkten eine Strecke des Linearkontinuums nicht vollständig erfüllen kann — die Nichtabzählbarkeit der Punkte eines Stückes des Kontinuums.

Dagegen brauchen wir jetzt die a. a. O. abgeleiteten Bedingungen für endlichgleiche Polyeder vollständig. Wir wollen sie in folgender Form aussprechen:

Seien zwei Polyeder  $\Pi$  und  $\Pi'$  mit den Kanten  $p_1, p_2 \dots$  resp.  $p_1', p_2' \dots$  und den an diesen Kanten liegenden Flächenwinkeln  $\pi_1, \pi_2 \dots$  resp.  $\pi_1', \pi_2' \dots$  endlichgleich; es bedeute ferner  $R$  den vierten Teil des Vollwinkels. Dann gibt es eine positive, negative oder auch verschwindende Strecke  $H$  von folgender Beschaffenheit: Seien

$$S_p \begin{cases} l_1(p_1, p_2 \dots p_1', p_2' \dots H) = 0 \\ l_2(p_1, p_2 \dots p_1', p_2' \dots H) = 0 \\ \vdots \end{cases}, \quad S_\pi \begin{cases} \lambda_1(\pi_1, \pi_2 \dots \pi_1', \pi_2' \dots R) = 0 \\ \lambda_2(\pi_1, \pi_2 \dots \pi_1', \pi_2' \dots R) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

die beiden Systeme aller linearen, homogenen, ganzzahligen Beziehungen zwischen  $p_1, p_2 \dots p_1', p_2' \dots H$  und zwischen  $\pi_1, \pi_2 \dots \pi_1', \pi_2' \dots R$ . Dann befriedigen alle Systeme von Werten, die, für  $p_1, p_2 \dots p_1', p_2' \dots H$ ;  $\pi_1, \pi_2 \dots \pi_1', \pi_2' \dots R$  eingesetzt,  $S_p$  und  $S_\pi$  befriedigen, auch die Gleichung:

$$p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2 + \dots = p_1' \pi_1' + p_2' \pi_2' + \dots + RH. \dots \dots I$$

Wir betrachten nun 3 reguläre Tetraeder mit den Kanten  $a, b, c$  und den Flächenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  und wollen mit Hilfe dieses Satzes nachweisen, daß das erste Tetraeder dem Komplex der beiden andern nicht endlichgleich sein kann, wenn zwischen  $a, b$  und  $c$  sowie zwischen  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $R$  je nur *eine* lineare, homogene, ganzzahlige Gleichung besteht.

Sei  $\lambda(\alpha, \beta, \gamma, R) = 0$  die einzige Beziehung zwischen  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $R$  und sei etwa  $\alpha$  durch die übrigen Winkel ausdrückbar:

$$\alpha = \nu_1 \beta + \nu_2 \gamma + \nu R,$$

wo  $\nu_1, \nu_2$  und  $\nu$  rationale Zahlen sind; setzen wir diesen Wert von  $\alpha$  in die Gleichung I, die jetzt:

$$\alpha a = \beta b + \gamma c + RH$$

lautet, ein, so erhalten wir:

$$0 = \beta(b - \nu_1 a) + \gamma(c - \nu_2 a) + R(H - \nu a).$$

Da diese Gleichung nach Voraussetzung für jeden Wert von  $\beta, \gamma$  und  $R$  befriedigt wird, so folgt:

$$b = \nu_1 a, \quad c = \nu_2 a.$$

Gibt es also nur eine lineare Beziehung zwischen  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $R$ , so gibt es sicher zwei Beziehungen zwischen  $a, b$  und  $c$ .

Wir wollen nun nachweisen, daß es drei Tetraeder gibt, die diese Bedingung nicht erfüllen, und von denen gleichzeitig zwei zusammen denselben Inhalt haben wie das dritte, woraus denn folgt, daß es inhaltsgleiche, nicht endlichgleiche Polyeder gibt.

Wir gebrauchen zu dieser Nachweise folgende sehr einfach zu erkennenden Eigenschaften regulärer Nichteuklidischer Tetraeder:

a) Die Kante und der Flächenwinkel können je eine nicht abzählbar unendliche Anzahl von Werten annehmen. (Z. B. im hyperbolischen Raume die Kante jeden positiven Wert, der Flächenwinkel jeden Wert zwischen  $\arccos \frac{1}{3}$  und  $\frac{R}{3}$ ).

b) Zu jedem Werte der Kante gehört ein bestimmter Wert des Flächenwinkels (und umgekehrt).

c) Zu jedem regulären Tetraeder gibt es ein reguläres Tetraeder mit beliebig vorgegebenem kleinerem Inhalt: Zu je zwei regulären Tetraedern gibt es ein reguläres Tetraeder, das der Differenz der beiden inhaltsgleich ist.

Nun bestimmen wir zunächst das Tetraeder mit der Kante  $a$  und dem Flächenwinkel  $\alpha$  so, daß  $\alpha$  kein rationaler Teil des Vollwinkels ist. Dann bestimmen wir das Tetraeder mit der Kante  $b$  und dem Winkel  $\beta$  so, daß keine Beziehung von der Form:

$$\begin{aligned} \nu_1 a + \nu_2 b &= 0 \dots 1) \\ \varrho_1 \alpha + \varrho_2 \beta + \varrho R &= 0 \dots 2) \end{aligned}$$

( $\nu_1, \nu_2, \varrho_1, \varrho_2, \varrho$  rationale Zahlen) besteht. Für ein gegebenes  $a$  gibt es stets nur eine abzählbare Menge von Werten  $b$ , die eine Beziehung von der Form 1) befriedigen, folglich gibt es (nach  $a$  und  $b$ ) eine nicht abzählbare Menge von Werten  $b$  (mit der dazugehörigen ebenfalls nicht abzählbaren Menge von Werten  $\beta$ ), die eine solche Beziehung nicht befriedigen. Aus diesen Werten von  $\beta$  wird bei gegebenem  $\alpha$  durch 2) eine abzählbare Menge herausgehoben. Es bleibt eine nicht abzählbare Menge von Werten  $\beta$  und den zugehörigen Werten  $b$ , die keine der Beziehungen 1) und 2) befriedigen.

Die Differenz des Tetraeders  $(a, \alpha)$  und eines solchen Tetraeders  $(b, \beta)$  kann keinem regulären Tetraeder  $(c, \gamma)$  endlichgleich sein. Denn es dürfte, damit keine Beziehung von der Form 1) oder 2) besteht, nur *eine* lineare Beziehung zwischen  $\alpha, \beta, \gamma, R$  und nur *eine* zwischen  $a, b$  und  $c$  bestehen, was aber wie wir vorher bewiesen haben unmöglich ist. Da es aber nach c) ein reguläres Tetraeder gibt, das der Differenz der beiden ersten *inhaltsgleich* ist, so haben wir wiederum die Existenz nicht abzählbar unendlich vieler Paare von inhaltsgleichen, nicht endlichgleichen Polyedern bewiesen.

Münster i. W., Februar 1904.

---