

# Die partiellen Differentialgleichungen der Abel'schen Thetafunctionen dreier Argumente.

Von

ED. WILTHERSS in Halle a./S.

Durch Herrn Klein wurde in der Sitzung am 1. Juni 1889 der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen eine vom Verf. ausgeführte Entwicklung derjenigen partiellen Differentialgleichungen der Abel'schen Thetafunctionen dreier Argumente vorgelegt, in welcher die Invarianteneigenschaft der Thetafunctionen vollkommen zur Geltung kommt. Diese Entwicklung, die dort nur in kurzen Zügen angegeben war, will ich im folgenden in ihrer Vollständigkeit mittheilen.

## § 1.

### Die Normalintegrale erster und zweiter Gattung.

Die Curve vierter Ordnung, welche den Abel'schen Integralen vom Range III zu Grunde liegt, sei

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^4 \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu} x_1^\lambda x_2^\mu x_3^{4-\lambda-\mu},$$

und werde symbolisch mit

$$a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = \dots$$

bezeichnet. Es sind dann die drei Normalintegrale erster Gattung bekanntlich gleich

$$\int x_1 \frac{(kx dx)}{a_x^3 a_k}, \quad \int x_2 \frac{(kx dx)}{a_x^3 a_k}, \quad \int x_3 \frac{(kx dx)}{a_x^3 a_k}.$$

Indem ich dieselben mit den Variablen  $U_1$ , bez.  $U_2$ ,  $U_3$ , die zu  $x_1$ , bez.  $x_2$ ,  $x_3$  contragredient sind, multiplicire und addire:

$$(1) \quad J(x, U) = \int U_x \frac{(kx dx)}{a_x^3 a_k},$$

erhalte ich eine Zusammenfassung dieser Integrale, welche die In-

varianteneigenschaft besitzt, d. h. welche abgesehen von einer multiplicativ hinzutretenden Potenz der Substitutionsdeterminante ungeändert bleibt, wenn man für  $x_1, x_2, x_3$  und  $k_1, k_2, k_3$  durch lineare Substitution neue Variable einführt und zugleich mit  $U_1, U_2, U_3$  und den Coefficienten von  $f(x)$  die entsprechenden Aenderungen vornimmt.

Die drei Normalintegrale zweiter Gattung will ich von vornherein mit Hilfe der Variablen  $y_1, y_2, y_3$  in der Weise in ein Integral zusammengezogen einführen, dass ihre Invarianteneigenschaft zum Ausdruck kommt. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen, je nach den Functionen, die man zu dieser Darstellung benutzt. Setzt man nämlich

$$2) \quad \gamma(x, y, z) = \gamma(y, x, z) = 2a_x^3 a_z b_y^3 b_z + 2a_x^2 a_y a_z b_x b_y^2 b_z - a_x^2 a_z^2 b_x b_y^3 \\ - a_x a_y a_z^2 b_x^2 b_y^2 - a_y^2 a_z^2 b_x^3 b_y,$$

$$(3) \quad \Gamma(x, y) = (abc)^2 [a_x^2 b_x^2 c_y^2 + a_x a_y b_x b_y c_x^2],$$

$$(4) \quad \Gamma_1(x, y) = \Gamma_1(y, x) = (abc)^2 [3a_x^2 b_x b_y c_y^2 + a_x a_y b_x b_y c_x c_y],$$

wobei die Variablen  $z_1, z_2, z_3$  vollkommen beliebig sind, die Variablen  $y_1, y_2, y_3$  dagegen der Bedingung  $f(y) = 0$  unterliegen, so kann man dies Integral in der folgenden Weise schreiben:

$$(5) \quad J'(x, y) = \int \frac{\gamma(x, y, z)}{4(xy z)^2} \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k} = \int \frac{\Gamma(x, y)}{8a_x^3 a_y} \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k} \\ = \int \frac{\Gamma_1(x, y)}{12a_x^2 a_y^2} \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k}.$$

Die beiden ersten Formen des Integrals sind bekannt.\*) Die dritte Form wird hier zum ersten Mal angeführt; sie hat mit der ersten die Eigenschaft gemein, in  $x_1, x_2, x_3$  einerseits und  $y_1, y_2, y_3$  andererseits symmetrisch zu sein, zeichnet sich aber vor derselben dadurch aus, dass sie die Variablen  $z_1, z_2, z_3$  nicht enthält.

Die Gleichheit dieser drei Formen des Integrals beruht auf dem Umstand, dass

$$(6) \quad \frac{\gamma(x, y, z)}{(xy z)^2} = \frac{\Gamma(x, y)}{2a_x^3 a_y} = \frac{\Gamma_1(x, y)}{3a_x^2 a_y^2}$$

ist, und diese Relation beweist man am leichtesten, indem man  $\Gamma(x, y)$  und  $\Gamma_1(x, y)$  mit  $(xy z)^2$  multiplicirt und zur Umformung die Identität

$$(7) \quad (abc)(xy z) = a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y b_z c_x - a_y b_x c_z + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x$$

benutzt. Man bekommt nämlich auf diese Weise

---

\*) Die erste Form gab Herr Pick an (Math. Annalen Bd. 29, S. 259) an, die zweite verdankt man Herrn Klein (Math. Annalen Bd. 36, S. 20).

$$\begin{aligned}\Gamma(x, y)(xyz)^2 = & 2a_x^3 a_y \gamma(x, y, z) + 2a_x^4 b_x^2 b_y^2 c_y^2 c_z^2 + 2a_x^4 b_x b_y^3 c_x c_y c_z^2 \\ & + 2a_x^4 b_y^4 c_x^2 c_z^2 - 4a_x^4 b_x^2 b_y b_z c_y^3 c_z - 2a_x^4 b_x b_y^2 b_z c_x c_y^2 c_z \\ & - 2a_y^4 b_x^3 b_z c_x^3 c_z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_1(x, y)(xyz)^2 = & 3a_x^2 a_y^2 \gamma(x, y, z) + 3a_x^4 b_y^4 c_x c_y c_z^2 + 3a_x^4 b_x b_y^3 c_y^2 c_z^2 \\ & + 3a_y^4 b_x^3 b_y c_x^2 c_z^2 - 6a_x^4 b_x b_y^2 b_z c_y^3 c_z - 6a_y^4 b_x^2 b_y b_z c_x^3 c_z,\end{aligned}$$

und, da  $a_x^4 = f(x) = 0$  und  $a_y^4 = f(y) = 0$ , so folgt hieraus die Richtigkeit der obigen Gleichung (6). —

Da die erste Polare von  $2\Gamma(x, y)$ , die unter Einführung von  $y_1, y_2, y_3$  an Stelle von  $x_1, x_2, x_3$  gebildet wird, mit  $\Gamma_1(x, y)$  identisch ist, so kann man dem letzten Theil dieser Gleichung (6), wenn man die symbolische Bezeichnung

$$\Gamma(x, y) = A_x^4 B_y^2$$

gebraucht, auch die Form

$$(8) \quad 4a_x^3 a_y A_x^3 A_y B_y^2 - 3a_x^2 a_y^2 A_x^4 B_y^2 = 0$$

geben, in welcher diese Beziehung in der Folge benutzt werden wird.

## § 2.

### Die Function Th.

Die Jacobi'schen Thetafunctionen  $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$ , mit deren Hilfe die Umkehrung der Abel'schen Integrale ausgeführt wird, genügen den von Riemann aufgestellten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}(1) \quad 4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\alpha}} &= \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_\alpha^2}, \\ 2\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\beta}} &= \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_\alpha \partial v_\beta},\end{aligned}$$

(wobei  $\alpha$  und  $\beta$  die Werthe 1, 2, 3 annehmen können, und  $\tau_{\alpha\beta}$  die einzigen Parameter sind, die in der Function  $\vartheta$  vorkommen,) und sind in der Weise periodisch, dass

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3) = \pm \vartheta(v_1 + 1, v_2, v_3) = \dots,$$

und

$$\vartheta(v_1 + \tau_{1\alpha}, v_2 + \tau_{2\alpha}, v_3 + \tau_{3\alpha}) = \pm \vartheta(v_1, v_2, v_3) e^{-\left(\tau_\alpha + \frac{1}{2} \tau_{\alpha\alpha}\right) 2\pi i}.$$

Diese Thetafunctionen lassen sich nun so umformen, dass bei ihrer Reihenentwicklung nach Potenzen der Argumente die Glieder derselben Dimension Covarianten, freilich keine rationalen, von  $f$  sind\*). Man erreicht dies, indem man an Stelle der Argumente  $v_1, v_2, v_3$  durch die lineare Substitution

\*) Vergl. den Aufsatz von Herrn Klein: Zur Theorie der Abel'schen Functionen, § 25 und 27 in den Math. Annalen Bd. 36.

$$(2) \quad v_\alpha = c_{\alpha 1} u_1 + c_{\alpha 2} u_2 + c_{\alpha 3} u_3, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

neue Variable  $u_1, u_2, u_3$  einführt, und ausserdem die Thetafunction mit einer Constanten  $c$  und einem Exponentialfactor  $e^{\eta(u_1, u_2, u_3)}$ , der quadratisch in den Argumenten ist:

$$(3) \quad \eta(u_1, u_2, u_3) = \sum_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta, \quad H_{\alpha\beta} = H_{\beta\alpha},$$

multiplicirt. Bei der so entstehenden Function, die ich mit  $\text{Th}(u_1, u_2, u_3)$  bezeichne:

$$(4) \quad \text{Th}(u_1, u_2, u_3) = c e^{\eta(u_1, u_2, u_3)} \vartheta(v_1, v_2, v_3),$$

drückt sich die Periodeneigenschaft in der Weise aus, dass für sechs verschiedene Werthsysteme  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  und  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  die Gleichung

$$(5) \quad \text{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3) = \pm \text{Th}(u_1, u_2, u_3) e^{\sum \eta_\alpha \left(u_\alpha + \frac{1}{2} \omega_\alpha\right)}$$

besteht. Insbesondere kann man es durch passende Bestimmung der Coefficienten  $H_{\alpha\beta}$  und  $c_{\alpha\beta}$  dahin bringen, dass die Grössen  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  und  $-\eta_1, -\eta_2, -\eta_3$  Periodensysteme der Normalintegrale erster und zweiter Gattung werden und zwar der Art, dass die Integration des Integrals (1) auf einem geschlossenen Wege

$$(6) \quad \omega_1 U_1 + \omega_2 U_2 + \omega_3 U_3$$

liefert, während man dadurch bei dem Integral (5)

$$(7) \quad -\eta_1 y_1 - \eta_2 y_2 - \eta_3 y_3$$

bekommt\*). Es enthalten alsdann die Coefficienten  $c_{\alpha\beta}$  und  $H_{\alpha\beta}$  und der Factor  $c$  nur transcendente Parameter, indem die  $c_{\alpha\beta}$  und  $c$  Aggregate der verschiedenen Periodensysteme  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sind, während sich in den  $H_{\alpha\beta}$  ausserdem noch die Periodensysteme  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  vorfinden. Sie haben ausserdem für alle 64 Thetafunctionen denselben Werth. —

Wegen ihrer Invarianteneigenschaft genügen die Functionen  $\text{Th}$  den beiden Differentialgleichungen

$$(8) \quad \begin{aligned} m \text{Th} + u_1 \frac{\partial \text{Th}}{\partial u_1} &= \sum_{\lambda=1}^4 \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \lambda A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu} \frac{\partial \text{Th}}{\partial A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}}, \\ u_2 \frac{\partial \text{Th}}{\partial u_1} &= \sum_{\lambda=1}^4 \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \lambda A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu} \frac{\partial \text{Th}}{\partial A_{\lambda-1, \mu+1, 4-\lambda-\mu}}, \end{aligned}$$

und ausserdem noch den sieben weiteren Differentialgleichungen, welche durch die Vertauschung der Indices entstehen. Da aber die Form  $f$  fünfzehn Coefficienten hat und bezüglich jeder derselben eine Differentialgleichung bestehen muss, so existiren ausser jenen neun Gleichungen

\*) Vergl. § 3 in der oben erwähnten Arbeit von Herrn Klein.

noch sechs andere Differentialgleichungen für die Function Th. Diese werden den sechs Riemann'schen Differentialgleichungen (1) entsprechen und sich aus denselben ableiten lassen. Dies ist nun die Aufgabe, die ich im folgenden zu lösen habe.

### § 3.

Die Form der Differentialgleichung für die Function Th.

Zuerst will ich die Form bestimmen, auf welche man die Differentialgleichung der Function Th mit Rücksicht auf ihre Invarianteneigenschaft bringen wird. Die Entwicklung ist im wesentlichen analog derjenigen, welche ich bei den hyperelliptischen Thetafunctionen gemacht habe, aber sie unterscheidet sich doch in einigen Punkten von derselben, und deshalb will ich sie noch einmal ganz durchführen.

Um aus den Riemann'schen Differentialgleichungen (1) in § 2 für die Function  $\vartheta$  diejenigen für die Function Th abzuleiten, muss ich damit beginnen, die Beziehungen aufzustellen, die zwischen den partiellen Ableitungen beider Functionen bestehen. Zu dem Zwecke differentiire ich die Gleichung

$$(1) \quad e^{-\eta} \text{Th} = c \vartheta,$$

welche dieselben verbindet (vergl. (4) in § 2), zuerst zweimal partiell nach den Argumenten  $u_1, u_2, u_3$ , indem ich die Ausdrücke (2) und (3) in § 2 berücksichtige:

$$e^{-\eta} \frac{\partial \text{Th}}{\partial u_\alpha} - 2e^{-\eta} \text{Th} \sum_\gamma H_{\alpha\gamma} u_\gamma = c \sum_\gamma c_{\gamma\alpha} \frac{\partial \vartheta}{\partial v_\gamma}$$

und

$$(2) \quad e^{-\eta} \frac{\partial^2 \text{Th}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} - 2e^{-\eta} \frac{\partial \text{Th}}{\partial u_\alpha} \sum_\gamma H_{\beta\gamma} u_\gamma - 2e^{-\eta} \frac{\partial \text{Th}}{\partial u_\beta} \sum_\gamma H_{\alpha\gamma} u_\gamma \\ + 4e^{-\eta} \text{Th} \sum_{\gamma\delta} H_{\alpha\gamma} H_{\beta\delta} u_\gamma u_\delta - 2e^{-\eta} \text{Th} H_{\alpha\beta} = c \sum_{\gamma\delta} c_{\gamma\alpha} c_{\delta\beta} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_\gamma \partial v_\delta}.$$

Die Indices  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  haben hierin wie im folgenden die Werthe 1, 2, 3 anzunehmen. Das erste dieser Gleichungssysteme kann ich, da die Determinante  $|c_{\alpha\beta}|$  von Null verschieden sein muss, weil sonst zu Folge der Gleichungen (2) in § 2 die Argumente  $v_1, v_2, v_3$  linear von einander abhängig wären, nach den  $\frac{\partial \vartheta}{\partial v_\beta}$  auflösen:

$$(3) \quad c \frac{\partial \vartheta}{\partial v_\beta} = \sum_\alpha c'_{\beta\alpha} e^{-\eta} \frac{\partial \text{Th}}{\partial u_\alpha} - 2e^{-\eta} \text{Th} \sum_{\alpha\gamma} c'_{\beta\alpha} H_{\alpha\gamma} u_\gamma,$$

wo  $c'_{\beta\alpha}$  die durch  $|c_{\alpha\beta}|$  dividirten, adjungirten Subdeterminanten von  $c_{\beta\alpha}$  bedeuten.

Sodann bezeichne ich, aber nur vorübergehend, sechs beliebige der Coefficienten der Form  $f$  mit  $A_1, A_2, \dots, A_6$  und differentiire partiell die Gleichung (1) nach einem dieser Coefficienten:

$$e^{-\eta} \frac{\partial \text{Th}}{\partial A_\lambda} - e^{-\eta} \text{Th} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial A_\lambda} u_\alpha u_\beta = \frac{\partial c}{\partial A_\lambda} \vartheta + c \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial \vartheta}{\partial v_\alpha} \frac{\partial c_{\alpha\beta}}{\partial A_\lambda} u_\beta \\ + c \sum \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\beta}} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial A_\lambda},$$

wobei die letzte Summe bezüglich der sechs verschiedenen Parameter  $\tau_{\alpha\beta}$  ausgeführt werden soll. Da diese sechs Parameter  $\tau_{\alpha\beta}$  vollkommen beliebig sind, ist die Determinante

$$\left| \frac{\partial \tau_{11}}{\partial A_\lambda}, \frac{\partial \tau_{22}}{\partial A_\lambda}, \frac{\partial \tau_{33}}{\partial A_\lambda}, \frac{\partial \tau_{12}}{\partial A_\lambda}, \frac{\partial \tau_{13}}{\partial A_\lambda}, \frac{\partial \tau_{23}}{\partial A_\lambda} \right|$$

nicht Null; man kann demnach aus diesen Gleichungen die Ausdrücke für  $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\beta}}$  bestimmen. Wenn man zugleich  $\frac{\partial \vartheta}{\partial v_\alpha}$  mittels der Gleichung (3) und  $\vartheta$  selbst mittels der Gleichung (1) eliminirt, so erhält man die folgende Darstellung:

$$(4) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\beta}} = \sum_{\lambda=1}^6 e^{-\eta} \mathfrak{A}_\lambda^{(\alpha\beta)} \frac{\partial \text{Th}}{\partial A_\lambda} + e^{-\eta} \sum_{\gamma\delta} \mathfrak{F}_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)} u_\gamma \frac{\partial \text{Th}}{\partial u_\delta} \\ + e^{-\eta} \text{Th} \sum_{\gamma\delta} \mathfrak{I}_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)} u_\gamma u_\delta + \mathfrak{G}_{\alpha\beta} e^{-\eta} \text{Th}.$$

Da durch die Betrachtung in diesem Paragraphen nur die Form der Differentialgleichungen festgestellt werden soll, so kommt es auf die nähere Bestimmung der Coefficienten  $\mathfrak{A}_\lambda^{(\alpha\beta)}$ ,  $\mathfrak{F}_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}$ ,  $\mathfrak{I}_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}$  und  $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}$  nicht an.

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen (2) und (4) kann man nun aus den Riemann'schen Differentialgleichungen diejenigen für die Function Th herstellen. Ersetzt man nämlich in der ersteren gemäss der Riemann'schen Relationen (vergl. (1) in § 2)  $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_\alpha^2}$  durch  $4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\alpha}}$ ,  $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}$  durch  $2\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\beta}}$  und substituirt für  $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\beta}}$  den aus der zweiten Gleichung sich dafür ergebenden Ausdruck, so resultirt eine Differentialgleichung für Th von der Form

$$\frac{\partial^2 \text{Th}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \sum_{\lambda=1}^6 \overline{A}_\lambda^{(\alpha\beta)} \frac{\partial \text{Th}}{\partial A_\lambda} + \sum_{\gamma\delta} k_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)} u_\gamma \frac{\partial \text{Th}}{\partial u_\delta} + \frac{1}{288} \text{Th} \sum_{\gamma\delta} l_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)} u_\gamma u_\delta \\ + C'_{\alpha\beta} \text{Th} = 0.$$

Dieselbe vereinfache ich noch dadurch, dass ich mittelst der Bedingungsgleichungen für die Invarianteneigenschaft der Function Th

(vergl. (8) in § 2) die Terme  $w_\gamma \frac{\partial \text{Th}}{\partial u_\delta}$  entferne. Es ändert sich dadurch nur das zweite und das letzte Glied der Gleichung, und zwar das zweite Glied insofern, als jetzt in demselben nach den sämtlichen Coefficienten von  $f$  differentiirt wird. Ich erhalte auf diese Weise die endgültige Gestalt der Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \text{Th}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \sum_{\lambda=0}^4 \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \overline{A}_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}^{(\alpha\beta)} \frac{\partial \text{Th}}{\partial A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}} + \frac{1}{288} \text{Th} \sum_{\gamma\delta} l_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)} u_\gamma u_\delta + C_{\alpha\beta} \text{Th} = 0,$$

wobei  $\alpha, \beta$  die sechs Werthsysteme

$$1, 1; \quad 2, 2; \quad 3, 3; \quad 1, 2; \quad 1, 3; \quad 2, 3$$

annehmen kann.

Diese sechs Differentialgleichungen bestehen, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, gleichmässig für alle die vierundsechzig existirenden Functionen Th. Die transcendenten Parameter haben sich in derselben weggehoben, denn substituirt man für Th die Reihenentwicklung nach Potenzen der Argumente, so müssen die Gleichungen identisch erfüllt sein, und da die Glieder dieser Reihenentwicklung, wie schon oben in § 2 erwähnt, algebraische Functionen der Coefficienten von  $f$  sind, so folgt daraus, dass die  $\overline{A}_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}^{(\alpha\beta)}$ ,  $l_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}$  und  $C_{\alpha\beta}$  dieselbe Eigenschaft haben und keine transcendenten Constanten enthalten. Zieht man jetzt noch weiter den Umstand mit in Betracht, dass die Differentialgleichungen für alle Functionen Th gelten, so muss man schliessen, dass die Grössen  $\overline{A}_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}^{(\alpha\beta)}$ ,  $l_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}$  und  $C_{\alpha\beta}$  eindeutig, also rationale Functionen der Coefficienten von  $f$  sind. —

Um nun die Invarianteneigenschaft dieser Differentialgleichungen zum Ausdruck zu bringen, multiplicire ich (5) mit  $w_\alpha w_\beta$ , wo  $w_1, w_2, w_3$  ein mit  $u_1, u_2, u_3$  cogredientes Variablensystem sein soll, und summire über  $\alpha$  und  $\beta$ , indem ich

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\beta} \overline{A}_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}^{(\alpha\beta)} w_\alpha w_\beta &= \overline{A}_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}, \\ \sum_{\alpha\beta} l_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)} w_\alpha w_\beta &= l_{\gamma\delta}, \\ \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta &= C \end{aligned}$$

setze:

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \text{Th}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} w_\alpha w_\beta + \sum_{\lambda=0}^4 \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \overline{A}_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu} \frac{\partial \text{Th}}{\partial A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}} + \frac{1}{288} \text{Th} \sum_{\gamma\delta} l_{\gamma\delta} u_\gamma u_\delta + C \text{Th} = 0,$$

oder wenn ich

$$(6) \quad \sum_{\lambda=0}^4 \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \bar{A}_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu} \frac{\partial}{\partial A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}} = \delta,$$

$$(7) \quad \sum_{\gamma\delta} l_{\gamma\delta} u_{\gamma} u_{\delta} = L$$

bezeichne:

$$(8) \quad \delta \text{ Th} + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \text{ Th}}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}} w_{\alpha} w_{\beta} + \frac{1}{288} L \text{ Th} + C \text{ Th} = 0.$$

Hierin kann man ohne dadurch eine Beschränkung einzuführen,

$$(9) \quad l_{\alpha\beta} = l_{\beta\alpha}$$

annehmen. — Da die Function Th die Invarianteneigenschaft hat und  $w_1, w_2, w_3$  und  $u_1, u_2, u_3$  cogrediente Variabeln sind, so besitzt

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \text{ Th}}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}} w_{\alpha} w_{\beta}$$

ebenfalls diese Eigenschaft, und dasselbe muss mithin bezüglich der übrigen Glieder der Gleichung der Fall sein; es müssen also  $L$  sowohl wie  $C$ , und wenn

$$\sum_{\lambda=0}^4 \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \bar{A}_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu} x_1^{\lambda} x_2^{\mu} x_3^{4-\lambda-\mu} = \bar{f}$$

gesetzt wird, auch  $\bar{f}$  eine Covariante sein, und demgemäss muss  $\delta$  einen Aronhold'schen Process bedeuten.

#### § 4.

##### Die Differentialgleichungen der Normalintegrale.

Die Bestimmung der Covarianten  $\bar{f}$  und  $L$  will ich genau in derselben Weise, wie ich es bei den hyperelliptischen Functionen gethan habe, mit Hilfe der Periodicität der Thetafunctionen auf die Differentialgleichungen der Normalintegrale erster und zweiter Gattung zurückführen. Theils der Vollständigkeit halber, theils weil ich im Anschluss an die Arbeiten von Herrn Klein\*) die Perioden der Normalintegrale, die ich auf einem und demselben Integrationswege erhalte, mit  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , bez. —  $\eta_1, -\eta_2, -\eta_3$  bezeichne, werde ich diese Betrachtung wiederholen.

Die Gleichung (5) in § 2, welche die Periodicität der Function Th ausdrückt, kann ich in der Form

\*) Es ist damit hauptsächlich der oben in § 2 angeführte Aufsatz gemeint.



$$\begin{aligned} & \lg \operatorname{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3) \\ &= \lg \operatorname{Th}(u_1, u_2, u_3) + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha} \left( u_{\alpha} + \frac{1}{2} \omega_{\alpha} \right) + \varepsilon \pi i \end{aligned}$$

schreiben, wo  $\varepsilon$  je nach der Thetafunction, die unter Th verstanden werden soll, und je nach dem Periodensystem, welches die  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  bedeuten, entweder den Werth 0 oder den Werth 1 hat. Durch partielle Differentiation nach den Argumenten folgt hieraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lg \operatorname{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3)}{\partial u_{\alpha}} &= \frac{\partial \lg \operatorname{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_{\alpha}} + \eta_{\alpha}, \\ \frac{\partial^2 \lg \operatorname{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3)}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}} &= \frac{\partial^2 \lg \operatorname{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}}. \end{aligned}$$

Sodann ergibt sich bei der Ausführung der Operation  $\delta$ , wenn man berücksichtigt, dass  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  ebenfalls von den Coefficienten von  $f$  abhängen und dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lg \operatorname{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3)}{\partial \omega_{\alpha}} &= \frac{\partial \lg \operatorname{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3)}{\partial u_{\alpha}} \\ &= \frac{\partial \lg \operatorname{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_{\alpha}} + \eta_{\alpha} \end{aligned}$$

ist, die Gleichung

$$\begin{aligned} & \delta \lg \operatorname{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3) = \delta \lg \operatorname{Th}(u_1, u_2, u_3) \\ & + \sum_{\alpha} \left( u_{\alpha} + \frac{1}{2} \omega_{\alpha} \right) \delta \eta_{\alpha} - \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial \lg \operatorname{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_{\alpha}} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha} \right) \delta \omega_{\alpha}. \end{aligned}$$

Nun besteht die Differentialgleichung (8) in § 3 für alle Werthe der Variablen  $u_1, u_2, u_3$ . Man kann also  $u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3$  an Stelle von  $u_1, u_2, u_3$  setzen. Durch diese Substitution, und indem ich zugleich  $\lg \operatorname{Th}$  an Stelle von Th einführe, bekomme ich

$$\begin{aligned} & \delta \lg \operatorname{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3) \\ & + \sum_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial^2 \lg \operatorname{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3)}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}} + \frac{\partial \lg \operatorname{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3)}{\partial u_{\alpha}} \right. \\ & \quad \left. \cdot \frac{\partial \lg \operatorname{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3)}{\partial u_{\beta}} \right) \omega_{\alpha} \omega_{\beta} \\ & + \frac{1}{288} \sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} (u_{\alpha} + \omega_{\alpha}) (u_{\beta} + \omega_{\beta}) + C = 0, \end{aligned}$$

oder wenn ich unter Benutzung der eben aufgestellten Gleichungen die partiellen Ableitungen von  $\operatorname{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3)$  durch solche von  $\operatorname{Th}(u_1, u_2, u_3)$  ersetze, und dabei beachte, dass  $l_{\alpha\beta} = l_{\beta\alpha}$  (vergl. (9) in § 3) ist:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \delta \lg \text{Th}(u_1, u_2, u_3) + \sum_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial^2 \lg \text{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \frac{\partial \lg \text{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_\alpha} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cdot \frac{\partial \lg \text{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_\beta} \right) w_\alpha w_\beta + \frac{1}{288} \sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + C \right\} \\
& + \sum_\alpha \left( u_\alpha + \frac{1}{2} \omega_\alpha \right) \left\{ \delta \eta_\alpha + \frac{1}{144} \sum_\beta l_{\alpha\beta} \omega_\beta \right\} \\
& - \sum_\alpha \left( \frac{\partial \lg \text{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_\alpha} + \frac{1}{2} \eta_\alpha \right) \left\{ \delta \omega_\alpha - 2 w_\alpha \sum_\beta w_\beta \eta_\beta \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Die erste Klammer ist wieder die ursprüngliche Gleichung und hat also den Werth Null; die übrigen Klammern müssen, da die  $u_1, u_2, u_3$  und die  $\frac{\partial \text{Th}}{\partial u_1}, \frac{\partial \text{Th}}{\partial u_2}, \frac{\partial \text{Th}}{\partial u_3}$  linear unabhängig sind, einzeln ebenfalls Null sein. Dieser Umstand liefert die Differentialgleichungen der Perioden:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \delta \omega_\alpha = 2 w_\alpha \sum_\beta \eta_\beta w_\beta, \\
& \delta \eta_\alpha = \frac{-1}{144} \sum_\beta \omega_\beta l_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Da aber wie schon oben in § 2 bemerkt, die Integration der Normalintegrale (1), bez. (5) in § 1 auf einem geschlossenen Integrationsweg gleichzeitig die Ausdrücke

$$\omega_1 U_1 + \omega_2 U_2 + \omega_3 U_3,$$

bez.

$$- \eta_1 y_1 - \eta_2 y_2 - \eta_3 y_3$$

ergeben, so bestehen nothwendig auch Differentialgleichungen dieser Integrale, welche den eben abgeleiteten Differentialgleichungen der Perioden entsprechen:

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \delta J(x, U) = -2 U_w J'(x, w) + \Psi, \\
& \delta J'(x, y) = \frac{1}{144} \int L(x, y) \frac{(kx dx)}{a_x^3 a_k} + \Psi_1,
\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$(3) \quad \sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = L(x, y)$$

bezeichnet ist und  $\Psi$  und  $\Psi_1$  Functionen bedeuten, deren genauere Beschaffenheit erst im folgenden festgestellt werden wird.

Diese Gleichungen bilden den Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen über die Functionen  $\bar{f}$  und  $L$ . Ehe ich aber direct darin fortfahren kann, muss ich erst feststellen, wie sich die Ausführung der Operation  $\delta$  an Integralen mit homogenen ternären Variablen gestaltet.

## § 5.

Ausführung der Operation  $\delta$  an Integralen mit homogenen ternären Variablen.

Die Operation  $\delta$  besteht ihrer Definition nach darin, dass die Function  $g$ , an welcher die Operation ausgeführt werden soll, nach den in derselben vorkommenden Coefficienten  $A_{\lambda, \mu, \nu}$  einer anderen Function  $f$  partiell differentiiert, die Ableitungen mit dem entsprechenden Coefficienten  $\overline{A}_{\lambda, \mu, \nu}$  einer dritten Function  $\overline{f}$ , die mit  $f$  gleicher Dimension ist, multiplicirt, und dann die sämmtlichen erhaltenen Ausdrücke addirt werden. Wenn nun  $g$  noch die Variablen  $x_1, x_2, x_3$  enthält, welche durch die Gleichung

$$f(x) = 0$$

von den Coefficienten  $A_{\lambda, \mu, \nu}$  abhängig gemacht sind, so müssen beim Differentiiren nach diesen Coefficienten diese Grössen  $x_1, x_2, x_3$  als variable betrachtet werden, denn wenn man sich die  $A_{\lambda, \mu, \nu}$  ändern lässt, so ändern sich zu Folge der Gleichung  $f(x) = 0$  auch die  $x_1, x_2, x_3$ . Demnach bekommt man beim Differentiiren nach  $A_{\lambda, \mu, \nu}$  den Ausdruck

$$\frac{\partial g}{\partial A_{\lambda, \mu, \nu}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial A_{\lambda, \mu, \nu}},$$

und multiplicire ich denselben mit  $\overline{A}_{\lambda, \mu, \nu}$  und summire über die verschiedenen Indicessysteme, so gelange ich zu einer Darstellung, welche ich gemäss der eben angeführten Definition der Operation  $\delta$  als das Resultat dieser Operation ansehen muss:

$$(1a) \quad \delta g = \sum \overline{A}_{\lambda, \mu, \nu} \frac{\partial g}{\partial A_{\lambda, \mu, \nu}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i} \sum \overline{A}_{\lambda, \mu, \nu} \frac{\partial x_i}{\partial A_{\lambda, \mu, \nu}},$$

oder wenn ich

$$\begin{aligned} \sum \overline{A}_{\lambda, \mu, \nu} \frac{\partial g}{\partial A_{\lambda, \mu, \nu}} &= \overline{g}, \\ \sum \overline{A}_{\lambda, \mu, \nu} \frac{\partial x_i}{\partial A_{\lambda, \mu, \nu}} &= \delta x_i \end{aligned}$$

bezeichne:

$$(1b) \quad \delta g = \overline{g} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_i.$$

Die Operation  $\delta$  ist demnach in diesem Fall, wo  $g$  auch eine Function der Variablen  $x_1, x_2, x_3$  ist, die durch die Gleichung  $f(x) = 0$  verbunden sind, kein unmittelbarer Aronhold'scher Process mehr, sondern besteht aus einem gewöhnlichen Aronhold'schen Process, — welcher

$g$  in  $\bar{g}$  überführt, — und einer partiellen Differentiation nach den Variablen  $x_1, x_2, x_3$ .

Die Grössen  $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$  sind übrigens nicht ganz beliebig, sondern durch eine lineare Gleichung verbunden. Denn, da  $f(x) = 0$ , muss auch

$$\delta f(x) = 0$$

sein, und da ich für  $\delta f(x)$  gemäss der Formel (1 b), wenn ich berücksichtige, dass  $\sum \bar{A}_{\lambda, \mu, \nu} \frac{\partial f}{\partial A_{\lambda, \mu, \nu}} = \bar{f}$  ist, den Ausdruck  $\bar{f} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$  finde, so besteht also die Gleichung

$$(2) \quad \bar{f} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0.$$

Zu Folge derselben sind zwei der Grössen  $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$  beliebig, die dritte aber alsdann dadurch bestimmt. —

Diese Formel (1) muss ich speciell auch benutzen, wenn ich die Operation  $\delta$  an einem Integrale  $\int \varphi(kx dx)$  ausführen will. Nach derselben erhalte ich, wenn

$$(3) \quad \sum \bar{A}_{\lambda, \mu, \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial A_{\lambda, \mu, \nu}} = \bar{\varphi}$$

gesetzt wird:

$$\delta \int \varphi(kx dx) = \int \left\{ \left( \bar{\varphi} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i \right) (kx dx) + \varphi(k \delta x dx) + \varphi(kx d\delta x) \right\}.$$

Hierin kann ich durch Integration die Grössen  $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$  unter dem Integralzeichen entfernen. Um die dazu nothwendigen Umformungen zu machen, gehe ich von der bekannten Identität

$$(kx dx) \alpha_{\delta x} - (kx \delta x) \alpha_{dx} + (k dx \delta x) \alpha_x - (x dx \delta x) \alpha_k = 0$$

aus, in der  $\alpha_{\delta x} = \alpha_1 \delta x_1 + \alpha_2 \delta x_2 + \alpha_3 \delta x_3$ , u. s. w. ist, und substituirt in derselben für  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  die Ableitungen von  $\varphi$ , bez. von  $f$  nach den  $x_1, x_2, x_3$ . Dadurch ergeben sich, wenn ich beachte, dass  $f$  von der Dimension  $-2$  sein muss, weil sonst bekanntlich das Integral keinen Sinn hätte, und wenn ich mit  $D_k$  die Polarenbildung unter Einführung der Variablen  $k_1, k_2, k_3$  bezeichne, die beiden Beziehungen

$$(kx dx) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i - (kx \delta x) d\varphi - (k dx \delta x) 2\varphi + (x dx \delta x) 2D_k \varphi = 0,$$

$$(kx dx) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i - (kx \delta x) df + (k dx \delta x) 4f - (x dx \delta x) 4D_k f = 0,$$

von denen sich die letztere, da  $f = 0$ ,  $df = 0$  und nach (2)

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = -\bar{f}$$

ist, in

$$(k x dx) \bar{f} + (x dx \delta x) 4 D_k f = 0$$

vereinfacht. Aus denselben eliminire ich  $(x dx \delta x)$  und setze den

Ausdruck von  $(k x dx) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i$ , den ich dadurch erhalte:

$$(k x dx) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i = \frac{1}{2} (k x dx) \bar{f} \frac{D_k \varphi}{D_k f} + (k x \delta x) d\varphi + (k dx \delta x) 2\varphi,$$

in obiges Integral ein:

$$\delta \int \varphi (k x dx) = \int \left\{ \left( \bar{\varphi} + \frac{1}{2} \bar{f} \frac{D_k \varphi}{D_k f} \right) (k x dx) + \left( (k x \delta x) d\varphi + (k dx \delta x) \varphi + (k x d\delta x) \varphi \right) \right\}.$$

Die zweite Klammer hierin ist aber das Differential von  $(k x \delta x) \varphi$  und lässt sich also unmittelbar integrieren. Man bekommt dadurch die definitive Formel:

$$(4) \quad \delta \int \varphi (k x dx) = (k x \delta x) \varphi + \int \left( \bar{\varphi} + \frac{1}{2} \bar{f} \frac{D_k \varphi}{D_k f} \right) (k x dx),$$

welche anzeigt, wie man die Operation  $\delta$  an Integralen mit homogenen ternären Variablen auszuführen hat.

Diese Formel will ich insofern noch ein wenig weiter bilden, als ich  $\psi : D_k f$  für  $\varphi$  setze:

$$(5) \quad \varphi = \frac{\psi}{D_k f} = \frac{\psi}{a_x^3 a_k},$$

da ja bekanntlich  $\varphi$  diese Form haben muss, sobald das Integral von  $k_1, k_2, k_3$  unabhängig sein soll. Es ist dann zu Folge der Bedeutung von  $\bar{\varphi}$  (vesgl. (3)), wenn ich dabei die symbolische Bezeichnung

$$\bar{f} = \bar{a}_x^4$$

gebrauche:

$$\bar{\varphi} = \frac{\bar{\psi}}{a_x^3 a_k} - \frac{\psi \bar{a}_x^3 \bar{a}_k}{(a_x^3 a_k)^2},$$

(wo wiederum

$$\bar{\psi} = \sum \bar{A}_{\lambda, \mu, \nu} \frac{\partial \psi}{\partial A_{\lambda, \mu, \nu}}$$

ist,) und ferner, (da, wie aus (5) hervorgeht,  $\psi$  von der ersten Dimension ist):

$$-2D_k\varphi = \frac{D_k\psi}{a_x^3 a_k} - \frac{3\psi a_x^2 a_k^2}{(a_x^3 a_k)^2},$$

so dass die Gleichung (4) die Form

$$(6) \quad \delta \int \psi \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k} = \frac{(k x \delta x)}{a_x^3 a_k} \psi + \int \left\{ \left[ \bar{\psi} - \frac{1}{4} D_k \psi \frac{\bar{a}_x^4}{a_x^3 a_k} \right] - \frac{1}{4} \frac{\psi}{(a_x^3 a_k)^2} [4 a_x^3 a_k \bar{a}_x^3 \bar{a}_k - 3 a_x^2 a_k^2 \bar{a}_x^4] \right\} \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k}$$

annimmt.

## § 6.

### Die Bestimmung der Function $\bar{f}$ .

Führe ich nun die Operation  $\delta$  an den Normalintegralen erster Gattung aus, so erhalte ich gemäss der eben aufgestellten Formel

$$\delta J(x, U) = \delta \int U_x \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k} = \frac{(k x \delta x)}{a_x^3 a_k} U_x - \frac{1}{4} \int \left\{ U_k \frac{\bar{a}_x^4}{a_x^3 a_k} + \frac{U_x}{(a_x^3 a_k)^2} [4 a_x^3 a_k \bar{a}_x^3 \bar{a}_k - 3 a_x^2 a_k^2 \bar{a}_x^4] \right\} \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k}.$$

Da das Differential  $\frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k}$ , und mithin auch die ganze linke Seite, von  $k_1, k_2, k_3$  unabhängig ist, kann sich die Bedeutung der Gleichung durch Specialisirung dieser Grössen nicht ändern. Ich werde daher, damit nicht zwei verschiedene Reihen von Variablen in dem zu integrierenden Ausdruck vorkommen,  $k_1, k_2, k_3$  gleich  $w_1, w_2, w_3$  werden lassen, dann aber der Gleichförmigkeit halber für  $\frac{(w x dx)}{a_x^3 a_w}$  den davon nur in der Bezeichnung verschiedenen Ausdruck  $\frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k}$  schreiben:

$$\delta J(x, U) = \frac{(w x \delta x)}{a_x^3 a_w} U_x - \frac{1}{4} \int \left\{ U_w \frac{\bar{a}_x^4}{a_x^3 a_w} + \frac{U_x}{(a_x^3 a_w)^2} [4 a_x^3 a_w \bar{a}_x^3 \bar{a}_w - 3 a_x^2 a_w^2 \bar{a}_x^4] \right\} \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k}.$$

Aber durch anderweitige Betrachtung haben wir oben in § 4 (vergl. (2)) gefunden:

$$\delta J(x, U) = -2 U_w J'(x, w) + \psi.$$

Die Vergleichung dieser beiden Relationen liefert nun unmittelbar

die Functionen  $\Phi$  und  $\bar{f}$ . Denn zu Folge der in § 1 aufgestellten Gleichung (8):

$$4 a_x^3 a_y A_x^3 A_y B_y^2 - 3 a_x^2 a_y^2 A_x^4 B_y^2 = 0,$$

und da

$$\int \frac{A_x^4 B_w^2}{8 a_x^3 a_w} \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k} = \int \frac{\Gamma(x, w)}{8 a_x^3 a_w} \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k}$$

eine Form des Integrals  $J'(x, w)$  ist, geht eine derselben in die andere über, wenn man  $\frac{(w x \delta x)}{a_x^3 a_w} U_x$  für  $\Phi$  und  $A_x^4 B_w^2$  für  $\bar{a}_x^4 = \bar{f}$  annimmt.

Dadurch ist jetzt  $\bar{f}$  bestimmt: es ist

$$\bar{f} = \Gamma(x, w) = (abc)^2 [a_x^2 b_x^2 c_w^2 + a_x a_w b_x b_w c_x^2]. -$$

Dass  $\bar{f}$  gleich diesem Ausdruck sein muss, hätte ich auch in derselben Weise feststellen können, wie ich es im 33. Bd. (Seite 279 u. f.) der Math. Annalen bei den hyperelliptischen Functionen gethan habe. Man kommt in derselben Weise wie dort zu dem Schlusse, dass die Operation  $\delta$  an der Discriminante von  $f$  ausgeführt, entweder Null geben, oder dieselbe reproduciren muss. Die Differentialausdrücke aber, die diese Eigenschaft haben, sind, wenn dies auch nicht ausdrücklich hervorgehoben wurde, durch die Form der Discriminante von  $f$ , wie sie Herr Gordan mitgetheilt hat\*), vollständig gegeben. Dieselbe ist nämlich dort so dargestellt, dass sie zugleich die Determinante ist, welche als Nenner auftritt, wenn man die Gleichungen (8) in § 2 und (5) in § 3 nach den  $\frac{\partial Th}{\partial A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}}$  auflöst.

## § 7.

### Bestimmung der Function $L$ .

In § 4 sind wir zu der Gleichung

$$(1) \quad \delta J'(x, y) = \frac{1}{144} \int L(x, y) \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k} + \Psi_1$$

gelangt und aus derselben erhält man den Ausdruck von  $L(x, y)$ , indem man die Operation  $\delta$  thatsächlich ausführt und  $\Psi_1$  so bestimmt, dass  $L(x, y)$  eine ganze Function wird. Dabei muss noch ein Punkt besonders berücksichtigt werden: Wie aus der Entwicklung dieser Gleichung hervorgeht, bezieht sich die Operation  $\delta$  nur auf die Coefficienten von  $y_1, y_2, y_3$  in diesem Integral. Es dürfen dementsprechend die Variablen  $y_1, y_2, y_3$  während der Ausführung der Operation  $\delta$  nicht

\*) Sitzungsberichte der Academie der Wissenschaften zu München, Sitzung am 3. December 1887.

der Bedingung  $f(y) = 0$  unterliegen, sondern müssen dabei ganz beliebig sein, (denn sonst müssten nach der Betrachtung am Anfange des Paragraphen 5 auch diese Grössen bei der Operation  $\delta$  berücksichtigt werden,) und erst, wenn dieselbe beendet ist, darf man sie auf solche Werthe beschränken, für welche  $f(y) = 0$  ist. Freilich ist dann während der Operation das betreffende Integral kein Normalintegral zweiter Gattung.

Demgemäss wende ich also unter der Voraussetzung, dass  $f(y)$  nicht Null ist, die Formel (6) in § 5 auf das Integral

$$\int \frac{\gamma(x, y, z)}{4(xy z)^2} \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k}$$

an, welches für  $f(y) = 0$  die zu der weiteren Rechnung geeignetste Form des Integrals  $J'(x, y)$  zu sein scheint, und bekomme

$$\begin{aligned} \delta \int \frac{\gamma(x, y, z)}{4(xy z)^2} \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k} &= \frac{(k x \delta x)}{a_x^3 a_k} \frac{\gamma(x, y, z)}{4(xy z)^2} + \frac{1}{4} \int \left\{ \frac{\bar{\gamma}(x, y, z)}{(xy z)^2} \right. \\ &\quad - \frac{3}{4} \frac{A_x^4 B_w^2 D_k \gamma(x, y, z)}{(xy z)^2 a_x^3 a_k} + \frac{1}{2} \frac{A_x^4 B_w^2 \gamma(x, y, z) (k y z)}{(xy z)^3 a_x^3 a_k} \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{\gamma(x, y, z)}{(xy z)^2 (a_x^3 a_k)^2} [4 a_x^3 a_k A_x^3 A_k B_w^2 - 3 a_x^2 a_k^2 A_x^4 B_w^2] \right\} \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k}, \end{aligned}$$

wo

$$(2) \quad \bar{\gamma}(x, y, z) = \sum_{\lambda=0}^4 \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \bar{A}_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu} \frac{\partial \gamma(x, y, z)}{\partial A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}}$$

bedeutet und  $A_x^4 B_w^2$  die schon öfters gebrauchte symbolische Bezeichnung für  $\Gamma(x, w) = \bar{f}$  ist. Alsdann gebe ich den  $y_1, y_2, y_3$  solche Werthe, für welche  $f(y) = 0$ , so dass dadurch die rechte Seite der Ausdruck von  $\delta J'(x, y)$  wird, und substituire denselben in die obige Gleichung (1), indem ich zu gleicher Zeit

$$\psi_1 - \frac{(k x \delta x)}{a_x^3 a_k} \frac{\gamma(x, y, z)}{4(xy z)^2} = \Phi$$

setze:

$$\begin{aligned} \int L(x, y) \frac{(k x \delta x)}{a_x^3 a_k} &= -144 \Phi + 9 \int \left\{ 4 \frac{\bar{\gamma}(x, y, z)}{(xy z)^2} \right. \\ &\quad - 3 \frac{A_x^4 B_w^2 D_k \gamma(x, y, z)}{(xy z)^2 a_x^3 a_k} + 2 \frac{A_x^4 B_w^2 \gamma(x, y, z) (k y z)}{(xy z)^3 a_x^3 a_k} \\ &\quad \left. - \frac{\gamma(x, y, z)}{(xy z)^2 (a_x^3 a_k)^2} [4 a_x^3 a_k A_x^3 A_k B_w^2 - 3 a_x^2 a_k^2 A_x^4 B_w^2] \right\} \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k}. \end{aligned}$$

Indem ich jetzt diese Gleichung differentiire, erhalte ich die Darstellung von  $L(x, y)$  selbst:



$$L(x, y) = 9 \left\{ 4 \frac{\bar{\gamma}(x, y, z)}{(xyz)^2} - 3 \frac{A_x^4 B_w^2 D_k \gamma(x, y, z)}{(xyz)^2 a_x^3 a_k} + 2 \frac{A_x^4 B_w^2 \gamma(x, \bar{y}, z) (kyz)}{(xyz)^3 a_x^3 a_k} \right. \\ \left. - \frac{\gamma(x, y, z)}{(xyz)^2 (a_x^3 a_k)^2} [4 a_x^3 a_k A_x^3 A_k B_w^2 - 3 a_x^2 a_k^2 A_x^4 B_w^2] \right. \\ \left. - 16 \frac{a_x^3 a_k}{(k x dx)} d\Phi \right\}.$$

Da in  $L(x, y)$  die Variablen  $k_1, k_2, k_3$  und  $z_1, z_2, z_3$  nicht vorkommen, muss auch die rechte Seite von diesen Grössen unabhängig sein, und folglich kann man, ohne damit eine Beschränkung einzuführen, dieselben mit  $w_1, w_2, w_3$  zusammenfallen lassen. Wenn man ausserdem diese  $w_1, w_2, w_3$  noch der Bedingung  $f(w) = 0$  unterwirft und die Gleichung (8) in § 1 berücksichtigt, so vereinfacht sich dieser Ausdruck in

$$(3) \quad L(x, y) = 9 \left\{ 4 \frac{\bar{\gamma}(x, y, w)}{(xyw)^2} - 3 \frac{A_x^4 B_w^2 D_w \gamma(x, y, w)}{(xyw)^2 a_x^3 a_w} - 16 \frac{a_x^3 a_w}{(wx dx)} d\Phi \right\}.$$

Auf der rechten Seite kommt noch der Term  $\frac{a_x^3 a_w}{(wx dx)} d\Phi$  vor, und es ist nun zuerst nothwendig, denselben auf die Form einer gewöhnlichen Covariante zu bringen. Aus dem Umstande, dass  $L(x, y)$  sowohl wie  $\frac{a_x^3 a_w}{(wx dx)}$  von der Dimension 1 bezüglich  $x_1, x_2, x_3$  ist, folgt, dass  $\Phi$  hierin von der Dimension 0, also der Quotient zweier Functionen gleich hoher Dimension,  $g = g_x^\lambda$  und  $h = h_x^\lambda$ , sein muss:

$$\Phi = \frac{g_x^\lambda}{h_x^\lambda}.$$

Demnach ist

$$d\Phi = \left( h_x^\lambda \cdot \lambda g_x^{\lambda-1} \sum_{\alpha} g_{\alpha} dx_{\alpha} - g_x^\lambda \cdot \lambda h_x^{\lambda-1} \sum_{\alpha} h_{\alpha} dx_{\alpha} \right) : (h_x^\lambda)^2,$$

oder da

$$g_x^\lambda = g_x^{\lambda-1} \sum_{\alpha} g_{\alpha} x_{\alpha}$$

und

$$h_x^\lambda = h_x^{\lambda-1} \sum_{\alpha} h_{\alpha} x_{\alpha}$$

ist:

$$d\Phi = \lambda \frac{g_x^{\lambda-1} h_x^{\lambda-1}}{(h_x^\lambda)^2} \left\{ (h_1 g_2 - h_2 g_1) (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \right. \\ \left. + (h_2 g_3 - h_3 g_2) (x_2 dx_3 - x_3 dx_2) \right. \\ \left. + (h_3 g_1 - h_1 g_3) (x_3 dx_1 - x_1 dx_3) \right\}.$$

Hieraus eliminirt man die Differentialausdrücke mittels der Relationen

$$\frac{x_2 dx_3 - x_3 dx_2}{a_x^3 a_1} = \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{a_x^3 a_2} = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{a_x^3 a_3} = \frac{(k x dx)}{a_x^3 a_k},$$

welche sich aus

$$a_x^4 = a_x^3 \sum_{\alpha} a_{\alpha} x_{\alpha} = 0$$

und

$$d a_x^4 = 4 x_x^3 \sum_{\alpha} a_{\alpha} dx_{\alpha} = 0$$

ableiten lassen und bekanntlich gebraucht werden, um ein gewöhnliches Integral in ein solches mit homogenem ternären Differential überzuführen. Nimmt man zugleich für die beliebigen Grössen  $k_1, k_2, k_3$  die Werthe  $w_1, w_2, w_3$ , so resultirt

$$d\Phi = \lambda \frac{(ahg) a_x^3 g_x^{\lambda-1} h_x^{\lambda-1}}{(h_x^{\lambda})^2} \cdot \frac{(wx dx)}{a_x^3 a_w}.$$

In Folge davon verwandelt sich die rechte Seite von (3) in einen Ausdruck, der nur noch aus Covarianten besteht:

$$(4) L(x, y) = 9 \left\{ 4 \frac{\bar{\gamma}(x, y, w)}{(xyw)^2} - 3 \frac{A_x^4 B_w^2 D_w \gamma(x, y, w)}{(xyw)^2 a_x^3 a_w} - 16 \lambda \frac{(ahg) a_x^3 g_x^{\lambda-1} h_x^{\lambda-1}}{(h_x^{\lambda})^2} \right\}.$$

Für die Functionen  $g_x^{\lambda}$  und  $h_x^{\lambda}$  müssen, wie dies aus den Bemerkungen am Anfange des Paragraphen, die bezüglich  $\Psi_1$  gemacht wurden, hervorgeht, solche Aggregate genommen werden, dass  $L(x, y)$  eine ganze Function wird. Dieser Forderung genügt man, wie die weitere Rechnung zeigt, wenn man

$$g_x^{\lambda} = \frac{3}{4} a_x a_y a_w^2 \frac{A_w^4 B_y^2}{a_y a_w^3} - \frac{1}{2} A_x A_w^3 B_y^2,$$

$$h_x^{\lambda} = (xyw),$$

(wo also  $\lambda = 1$  ist,) annimmt. Alsdann ist

$$\lambda (ahg) a_x^3 g_x^{\lambda-1} h_x^{\lambda-1} = \frac{3}{4} (a_y^2 a_w^2 b_x^3 b_w - a_y a_w^3 b_x^3 b_y) \frac{A_w^4 B_y^2}{a_y a_w^3} - \frac{1}{2} (a_x^3 a_w A_y A_w^3 B_y^2 - a_x^3 a_y A_w^4 B_y^2),$$

oder wenn man die Beziehung

$$4 a_y a_w^3 A_w^3 A_y B_y^2 - 3 a_y^2 a_w^2 A_w^4 B_y^2 = 0,$$

(vergl. (8) in § 1,) zur Vereinfachung benutzt:

$$\lambda (ahg) a_x^3 g_x^{\lambda-1} h_x^{\lambda-1} = \frac{1}{2} a_x^3 a_w A_y A_w^3 B_y^2 - \frac{1}{4} a_x^3 a_y A_w^4 B_y^2.$$

Setzt man jetzt dies in die Gleichung (4) ein, so geht dieselbe über in

$$(5) \quad L(x, y) = 9 \left\{ 4\bar{\gamma}(x, y, w) + [4a_x^3 a_y A_w^4 B_y^2 - 8a_x^3 a_w A_y A_w^3 B_y^2] \right. \\ \left. - 3 \frac{A_x^4 B_w^2 D_w \gamma(x, y, w)}{a_x^3 a_w} \right\} : (xyw)^2.$$

Ehe ich aber hierin auf der rechten Seite die Nenner durch Division entferne, will ich noch eine solche Umformung mit derselben vornehmen, dass die Variablen  $x_1, x_2, x_3$  einerseits und  $y_1, y_2, y_3$  andererseits symmetrisch auftreten. Dazu gebrauche ich die Identität

$$3 D_w \gamma(x, y, w) = \gamma(w, y, x) + 6a_x^2 a_w^2 b_y^3 b_w - 4a_x a_w^3 b_x b_y^3,$$

deren Richtigkeit man einfach dadurch nachweist, dass man die Polare  $D_w \gamma(x, y, w)$  thatsächlich bildet. Da nun nach (2), (6) und (8) in § 1

$$\frac{A_x^4 B_w^2}{a_x^3 a_w} = 2 \frac{\gamma(w, x, y)}{(xyw)^2} = \frac{A_w^4 B_x^2}{a_x^3 a_w}, \\ 3 \frac{A_w^4 B_x^2}{a_x^3 a_w} = 4 \frac{A_w^3 A_x B_x^2}{a_x^2 a_w^2}$$

ist, so folgt aus dieser

$$3 \frac{A_x^4 B_w^2}{a_x^3 a_w} D_w \gamma(x, y, w) = 2 \frac{\gamma(w, x, y) \gamma(w, y, x)}{(xyw)^2} - 4a_x a_y^3 A_w^4 B_x^2 \\ + 8a_y^3 a_w A_w^3 A_x B_x^2.$$

Dementsprechend nimmt die Darstellung der Function  $L(x, y)$  die Form

$$L(x, y) = 9 \left\{ 4\bar{\gamma}(x, y, w) + 4[a_x^3 a_y A_w^4 B_y^2 + a_x a_y^3 A_w^4 B_x^2] \right. \\ \left. - 8[a_x^3 a_w A_w^3 A_y B_y^2 + a_y^3 a_w A_w^3 A_x B_x^2] \right. \\ \left. - 2 \frac{\gamma(w, x, y) \gamma(w, y, x)}{(xyw)^2} \right\} : (xyw)^2$$

an.

## § 8.

### Fortsetzung.

Um nun den gefundenen Ausdruck für  $L(x, y)$  in eine ganze Function zu verwandeln, verfähre ich auf eine höchst elementare Weise, indem ich von der Identität

$$1) \quad (abc)^2 (xyw)^2 = (a_x b_y c_w - a_x b_w c_y + a_y b_w c_x - a_y b_x c_w + a_w b_x c_y - a_w b_y c_x)^2 \\ = a_x^2 b_y^2 c_w^2 - 2a_x^2 b_y b_w c_y c_w + 2a_x a_y b_y b_w c_x c_w - \dots$$

Gebrauch mache. Bei der Bezeichnung

$$\begin{aligned}
C(x, y) = (abc)^2 \{ & e_x^3 e_w (a_y a_w b_y b_w c_y c_w - a_y^2 b_y b_w c_w^2) \\
& + e_x^2 e_y^2 (a_x a_y b_w^2 c_w^2 - 5 a_x a_w b_y b_w c_w^2) \\
& + e_x^2 e_y e_w (6 a_x a_y b_y b_w c_w^2 + 3 a_x a_w b_y b_w c_y c_w + 7 a_x a_w b_y^2 c_w^2) \\
& - e_x^2 e_w^2 (4 a_x a_y b_y^2 b_w^2 + 4 a_x a_y b_y b_w c_y c_w) \\
& - e_x e_y e_w^2 (2 a_x a_y b_x b_y c_w^2 + 2 a_x a_w b_x b_w c_y^2) \\
& + e_x e_w^3 (a_x a_y b_x b_y c_y c_w - a_x^2 b_y^2 c_y c_w) \}
\end{aligned}$$

erhalte ich durch einfache Ausmultiplication, indem ich auf der rechten Seite die eben angeführte Identität (1) zu Hilfe nehme,

$$2 \gamma(w, x, y) \gamma(w, y, x) = \{C(x, y) + C(y, x)\} (xyz)^2,$$

so dass

$$\begin{aligned}
L(x, y) = 9 \{ & 4 \bar{\gamma}(x, y, w) + 4 [a_x^3 a_y A_w^4 B_y^2 + a_x a_y^3 A_w^4 B_x^2] \\
& - 8 [a_x^3 a_w A_w^3 A_y B_y^2 + a_y^3 a_w A_w^3 A_x B_x^2] \\
& - C(x, y) - C(y, x) \} : (xyw)^2.
\end{aligned}$$

Hierin substituire ich für  $\bar{\gamma}(x, y, w)$  den Ausdruck, den ich nach (2) in § 7 dafür bekomme, d. i.

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}(x, y, w) = & \sum_{\lambda=1}^2 2 (a_x^{1+\lambda} a_y^{2-\lambda} a_w A_x^{2-\lambda} A_y^{1+\lambda} A_w B_w^2 + a_x^{2-\lambda} a_y^{1+\lambda} a_w A_x^{1+\lambda} A_y^{2-\lambda} A_w B_w^2) \\
& - \sum_{\lambda=-1}^1 (a_x^{1+\lambda} a_y^{1-\lambda} a_w A_x^{2-\lambda} A_y^{2+\lambda} B_w^2 + a_x^{2-\lambda} a_y^{2+\lambda} A_x^{1+\lambda} A_y^{1-\lambda} A_w B_w^2),
\end{aligned}$$

und ersetze hierauf die Polaren von  $A_x^4 B_y^2$ , die alsdann in der Gleichung für  $L(x, y)$  vorhanden sind, durch die betreffenden Aggregate, die sich für dieselben aus  $(abc)^2 [a_x^2 b_x^2 c_y^2 + a_x a_y b_x b_y c_x^2]$  ergeben. Dadurch gelange ich zu einem Werthe von  $L(x, y)$ , den ich in der folgenden Form

$$L(x, y) = 9 (C_1(x, y) + C_1(y, x)) - 5 C_2(x, y)$$

schreiben kann, wenn

$$\begin{aligned}
C_1(x, y) = (abc)^2 \{ & e_x^3 e_y (2 a_y^2 b_w^2 c_w^2 - 2 a_y a_w b_y b_w c_y c_w) \\
& + e_x^3 e_w (a_y^2 b_y b_w c_w^2 - a_y a_w b_y b_w c_y c_w) \\
& + e_x^2 e_y^2 (2 a_x a_w b_y b_w c_w^2 - 2 a_x a_y b_w^2 c_w^2) \\
& + e_x^2 e_y e_w (2 a_x a_y b_y b_w c_w^2 + a_x a_w b_y b_w c_y c_w - 3 a_x a_w b_y^2 c_w^2) \\
& + e_x^2 e_w^2 (2 a_x a_y b_y b_w c_y c_w - 2 a_x a_w b_y b_w c_y^2) \\
& + e_x e_y e_w^2 (a_x^2 b_y^2 c_w^2 - 2 a_x^2 b_y b_w c_y c_w - a_x a_y b_x b_y c_w^2 + 2 a_x a_y b_x b_w c_y c_w) \\
& + e_x e_w^3 (a_x^2 b_y^2 c_y c_w - a_x a_y b_x b_y c_y c_w) \},
\end{aligned}$$

$$C_2(x, y) = 6(abc)^2 \left\{ a_x^2 b_y^2 c_w^2 - a_x^2 b_y b_w c_y c_w - a_y^2 b_x b_w c_x c_w - a_x a_y b_x b_y c_w^2 \right. \\ \left. + 2 a_x a_y b_x b_w c_y c_w \right\} e_x e_y e_w^2$$

bedeutet. Zur weiteren Reduction habe ich wieder die Identität (1) selbst und diejenige Identität, die daraus durch Vertauschung von  $e$  mit  $c$  entsteht, nothwendig. Auf Grund derselben finde ich

$$C_1(x, y) + C_1(y, x) = (abc)^2 (abe)^2 \left[ \frac{1}{2} c_x c_w e_y e_w + \frac{1}{2} c_y c_w e_x e_w + e_x e_y c_w^2 \right], \\ C_2(x, y) = (abc)^4 e_x e_y e_w^2.$$

Demnach ist

$$(2) \quad L(x, y) = 9(abc)^2 (abe)^2 [c_x c_w e_y e_w + c_x c_y e_w^2] - 5(abc)^4 e_x e_y e_w^2, \\ \text{und mithin speciell, da } L = L(u, u) \text{ ist:}$$

$$(3) \quad L = 9(abc)^2 (abe)^2 [c_u c_w e_u e_w + c_u^2 e_w^2] - 5(abc)^4 e_u^2 e_w^2. -$$

Diese beiden Gleichungen gelten ihrer Herleitung nach nur für solche Werthe von  $w_1, w_2, w_3$ , für welche  $f(w) = 0$  ist. Da dieselben aber von der Dimension 2 sind, die Bedingungsgleichung dagegen die Dimension 4 hat, so ist diese Beschränkung hinfällig und die Gleichungen gelten für alle Werthe von  $w_1, w_2, w_3$ .

## § 9.

### Bestimmung von $C$ .

Zu dem Ausdrucke von  $C$  gelangt man wohl am einfachsten durch folgende Betrachtung. Setzt man in die Differentialgleichung (8) in § 3  $ce^n \vartheta$  für  $\text{Th}$  und eliminirt mittels der Riemann'schen Relationen (1) in § 2 die Glieder  $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\beta}}$ , so werden in derselben nur die Function  $\vartheta$  selbst und ihre ersten und zweiten Ableitungen nach den Argumenten zurückbleiben. Da zwischen diesen, wie man auch unmittelbar mit Hilfe der Periodicität der Function  $\vartheta$  nachweisen kann, keine linearen Gleichungen bestehen können, so müssen die Coefficienten derselben einzeln verschwinden. Insbesondere muss dies auch mit demjenigen von  $\vartheta$  der Fall sein; dieser ist aber, wie man sich leicht überzeugt, [vergl. die Entwicklung in § 3,] gleich

$$C + \delta c + 2 \sum_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta.$$

Folglich ist

$$C = -\delta c - 2 \sum_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta.$$

Dies Aggregat enthält nur transcendente Parameter, denn die  $H_{\alpha\beta}$  haben schon an und für sich diese Beschaffenheit, und da  $c$  nur aus Periodensystemen  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  gebildet ist, kommen nach (1) in § 4 auch in  $\delta c$  keine andern als transcendente Parameter vor. Nach den Bemerkungen aber in § 3 heben sich in der Differentialgleichung für  $Th$  und also speciell in dem Gliede  $C$  derselben, die transcendenten Grössen hinweg, und da die eventuell dazu benutzten Gleichungen zwischen den  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  und  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  bekanntlich keine von den Coefficienten  $A_{\lambda, \mu, \nu}$  algebraisch abhängenden Terme enthalten, so müssen die Coefficienten der  $w_1, w_2, w_3$  in dem Ausdrucke von  $C$ , wenn welche überhaupt übrig geblieben wären, numerische Constanten sein. Dies ist aber unmöglich, weil  $C$ , wie die übrigen Theile der Differentialgleichung, die Invarianteneigenschaft haben muss. Demnach kann  $C$  keinen andern Werth als Null:

$$C = 0$$

haben.

## § 10.

### Das Resultat.

Zur Uebersicht will ich die im vorhergehenden gefundenen Ergebnisse zusammenstellen:

*Die Curve vierter Ordnung, welche den Abel'schen Integralen vom Range III zu Grunde liegt, sei*

$$f = \sum_{\lambda=0}^4 \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu} x_1^\lambda x_2^\mu x_3^{4-\lambda-\mu},$$

und werde symbolisch mit

$$a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = e_x^4$$

bezeichnet. Wenn man nun unter Einführung eines willkürlichen Variablensystems  $w_1, w_2, w_3$

$$9(ab c)^2 (a b e)^2 [c_u c_w e_u e_w + c_u^2 e_w^2] - 5(ab c)^4 e_u^2 e_w^4 = L,$$

$$(ab c)^2 [a_x^2 b_x^2 c_w^2 + a_x a_w b_x b_w c_x^2] = \bar{f} = \sum_{\lambda=0}^4 \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \bar{A}_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu} x_1^\lambda x_2^\mu x_3^{4-\lambda-\mu}$$

setzt, wenn man ferner das Operationszeichen

$$\delta = \sum_{\lambda=0}^4 \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \bar{A}_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu} \frac{\partial}{\partial A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}}$$

einführt, so genügen die sämtlichen 64 Thetafunctionen  $\text{Th}$ , welche zu der Curve  $f$  gehören, der Differentialgleichung

$$\delta \text{Th} + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \text{Th}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} w_\alpha w_\beta + \frac{1}{288} L \text{Th} = 0.$$

*Diese Differentialgleichung hat die Invarianteneigenschaft. In derselben sind sechs einzelne Differentialgleichungen zusammengefasst, welche sich daraus ergeben dadurch, dass die Coefficienten der  $w_1, w_2, w_3$  einzeln gleich Null gesetzt werden.*

Umformungen dieser Differentialgleichung, speciell der Operation  $\delta$ , wie sie der Beschaffenheit der Coefficienten in den geraden, bez. ungeraden Functionen  $\text{Th}$  entsprechen, sind zum Theil bereits durch Herrn Pascal (Annali di Matematica, S. II, t. XVII) ausgeführt worden.

Halle, im Juni 1890.

---