

# ÜBER ABEL'S SUMMATION ENDLICHER DIFFERENZENREIHEN.

VON

HEINRICH WEBER

in STRASSBURG.

In der Abhandlung *L'intégrale finie  $\sum^n \varphi(x)$  exprimée par une intégrale définie simple* (Bd II, N° VII der HOLMBOE'schen Ausgabe von ABEL's Werken, Bd I, S. 34 der neuen Ausgabe) giebt ABEL einen häufig angewandten sehr eleganten Ausdruck für das Integral einer Differenzengleichung. Er benutzt bei der Ableitung dieser Formel gewisse bestimmte Integrale über reelle Variable. Aber schon die äussere Form des Resultates weist uns auf die Integration über complexe Variable hin, und in der That erhält man auf diesem Wege die ABEL'sche Formel fast unmittelbar. Dieser Weg soll hier eingeschlagen und dann noch einige Anwendungen des Resultates hinzugefügt werden.

## I.

Die Aufgabe, um die es sich handelt, lässt sich so aussprechen:

*Es soll eine Function  $f(x)$  der Variablen  $x$  gefunden werden, die, wenn  $\varphi(x)$  eine gegebene Function derselben Variablen ist, der Gleichung*

$$(1) \quad f(x + 1) - f(x) = \varphi(x)$$

*genügt.*

Wenn man  $x$  durch  $x + 1, x + 2, \dots, x + n - 1$  ersetzt und dann die Summe aller so gebildeten Gleichungen nimmt, so erhält man aus (1)

$$(2) \quad f(x + n) - f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(x + \nu).$$

Jede der Bedingung (1) genügende Function  $f(x)$  heisst ein *Integral der Differenzengleichung* (1). Ist  $f(x)$  ein solches Integral, und  $P(x)$  eine willkürliche *periodische Function* mit der Periode 1, so ist  $f(x) + P(x)$  das allgemeinste Integral dieser Gleichung.

Mit Hilfe des CAUCHY'schen Satzes über die Integration auf einem geschlossenen Wege lässt sich nun ein solches Integral  $f(x)$  leicht bilden.

Man markire in der Ebene einer complexen Variablen  $z$  den Punkt, der dem Werthe  $x$ , der auch complex sein kann, entspricht, und die Punkte  $x \pm 1, x \pm 2, x \pm 3, \dots$ , die alle auf einer zur reellen Axe parallelen Geraden liegen, die ich die Linie  $X$  nennen will. Durch diese Linie  $X$  wird die Ebene  $z$  in zwei Halbebenen getheilt, die ich die negative und die positive nennen will, jenachdem sie die negativ oder die positiv unendlichen imaginären Werthe von  $z$  enthält.

Nun kann man auf folgende Weise ein Integral  $f(x)$  bilden: Man nehme einen Punkt  $a$  auf der negativen, einen Punkt  $b$  auf der positiven Seite von  $X$  an, und verbinde diese beiden Punkte durch irgend einen Weg, der die Linie  $X$  in einem Punkt  $c$  schneidet, der zwischen  $x$  und  $x + 1$  liegt. Dann ist

$$(3) \quad f(x) = \int_a^b \frac{\varphi(z) dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}}.$$

Man erhält daraus  $f(x + 1)$  wenn man denselben Integranden auf einem anderen Weg nimmt, der die Linie  $X$  in einem zwischen  $x$  und  $x + 1$  gelegenen Punkt  $c'$  schneidet, und für  $f(x + 1) - f(x)$  erhält man dann ein Integral, über einen geschlossenen Weg, der von den Polen des Integranden nur den einen,  $x$ , umschliesst, das also nach dem CAUCHY'schen Satze den Werth  $\varphi(x)$  hat, vorausgesetzt natürlich, dass man sich auf ein Gebiet der  $z$ -Ebene beschränkt, in dem  $\varphi(x)$  stetig ist.

Wenn man in der Formel (3) die Punkte  $a, b$  verändert, ohne sie die Linie  $X$  überschreiten zu lassen, so ändert sich die Function (3) nur um eine periodische Function  $P(x)$ .

## II.

Von dem gewonnenen Resultat soll zunächst eine Anwendung auf die Bestimmung der *Gauss'schen Summen* aus der Kreistheilungstheorie gemacht werden, die sich daraus in sehr einfacher Weise ableiten lässt.

Wenn es die Convergenz des Integrals gestattet, so können wir in (3) die Grenzen  $a$  und  $b$  nach der negativen und positiven Seite ins Unendliche hinaus rücken lassen, und erhalten

$$(4) \quad f(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\varphi(z) dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}},$$

worin der Integrationsweg immer noch zwischen den Punkten  $x$  und  $x - 1$  hindurchgehen muss, während  $z$ , mit endlichem reellem Theil nach der Seite des positiven und negativen Imaginären ins Unendliche geht. Für  $f(x + 1)$  erhält man dieselbe Form, nur dass der Integrationsweg zwischen  $x$  und  $x + 1$  hindurchgeht.

Macht man in dem Integral für  $f(x)$  die Substitution

$$x - z = -it$$

und in dem für  $f(x + 1)$  die Substitution

$$x - z = it$$

so erhält man

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi t} \varphi(x + it) dt}{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}, \\ f(x + 1) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pi t} \varphi(x - it) dt}{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}, \end{array} \right.$$

wobei aber die Integration nach  $t$  nicht auf reellem Wege genommen werden darf, weil sie sonst über den Pol  $t = 0$  führen würde, sondern sie geht über eine Linie in der  $t$ -Ebene, die mit endlichem imaginärem

Theil von negativ unendlichen zu positiv unendlichen reellen Werthen führt, und dabei dem Nullpunkt nach der Seite der *positiv imaginären Werthe* ausweicht.

Nun ist aber nach (1)

$$2f(x) = f(x) + f(x + 1) - \varphi(x),$$

und man erhält also aus (4):

$$(5) \quad f(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi t} \varphi(x + it) - e^{\pi t} \varphi(x - it)}{e^{-\pi t} - e^{\pi t}} dt,$$

und da hierin der Punkt  $t = 0$  nicht mehr Pol des Integranden ist, so darf die Integration jetzt auf reellem Wege von  $-\infty$  nach  $+\infty$  gehen.

Die Anwendung von (2) ergibt, wenn  $n$  eine ganze Zahl ist:

$$(6) \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(\nu) = -\frac{1}{2}(\varphi(n) - \varphi(0)) \\ + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi t}(\varphi(n + it) - \varphi(it)) - e^{\pi t}(\varphi(n - it) - \varphi(-it))}{e^{-\pi t} - e^{\pi t}} dt.$$

Setzen wir hierin

$$\varphi(x) = e^{\frac{-\pi i x^2}{n}},$$

so folgt unter der Voraussetzung dass  $n$  eine gerade Zahl ist:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{-\pi i \nu^2}{n}} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i t^2}{n}} dt,$$

und durch die Substitution von  $\sqrt{n}t$  für  $t$ :

$$(7) \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{-\pi i \nu^2}{n}} = -i\sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i t^2} dt,$$

worin  $\sqrt{n}$  positiv zu nehmen ist.

Um das Integral, was hier noch steht, zu bestimmen, brauchen wir nur  $n = 2$  zu nehmen, und erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i t^2} dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

woraus sich also

$$(8) \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{-\pi i \nu^2}{n}} = \frac{1-i}{2} \sqrt{2n}$$

ergiebt.

Aus diesem speciellen Fall lässt sich der allgemeine Fall der *Gauss'schen Summe*  $\sum e^{\frac{2h\pi i}{n} s^2}$ , in der  $s$  ein volles Restsystem nach dem Modul  $n$  durchläuft und  $n$  eine beliebige gerade oder ungerade Zahl ist, wie DIRICHLET gezeigt hat, durch elementare Hilfsmittel ableiten (DIRICHLET's Werke, Bd I, S. 477, DIRICHLET-DEDEKIND, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Supplement I). Zu bemerken ist noch, dass sich schon KRONECKER der Integration auf complexem Wege bedient hat, um den Werth der GAUSS'schen Summe zu ermitteln (Crelle's Journal, Bd 105, S. 167).

### III.

Der Übergang zu unendlichen Grenzen, von dem im Vorhergehenden Gebrauch gemacht ist, ist in der Formel (3) nur unter ganz besonderen Voraussetzungen über die Function  $\varphi(x)$  gestattet, die in dem vorigen Beispiel erfüllt sind. Zu einer viel allgemeineren Anwendbarkeit dieses Verfahrens gelangt man aber durch eine kleine Umformung.

Ist wie früher  $c$  der Durchschnittspunkt des Integrationsweges mit der Linie  $X$ , so können wir den Ausdruck (3) so zerlegen:

$$f(x) = \int_a^c \varphi(z) dz - \int_a^c \frac{\varphi(z) dz}{1 - e^{-2\pi i(x-z)}} + \int_c^b \frac{\varphi(x) dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}},$$

und wir ändern nun  $f(x)$  nur um eine additive Constante, wenn wir in dem ersten dieser drei Integrale die untere Grenze  $a$  durch einen beliebigen anderen festen Werth ersetzen. Dann können wir in den beiden anderen Integralen  $a$  nach  $-i\infty$ ,  $b$  nach  $+i\infty$  wachsen lassen, selbst dann noch wenn die Function  $\varphi(z)$  mit unendlich wachsendem  $z$  wie irgend eine Potenz von  $z$  unendlich wird. Wir erhalten dann, wenn wir in dem ersten

Integral die untere Grenze, als ganz beliebig, in der Bezeichnung weglassen:

$$f(x) = \int_c^c \varphi(z) dz - \int_{-i\infty}^c \frac{\varphi(z) dz}{1 - e^{-2\pi i(x-z)}} + \int_c^{i\infty} \frac{\varphi(z) dz}{1 - e^{2\pi i(x-z)}},$$

oder wenn wir im zweiten und dritten Integral  $z = x - it$  und  $z = x + it$  substituieren:

$$(9) \quad f(x) = \int_c^c \varphi(z) dz - i \int_{i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x-it) dt}{1 - e^{2\pi t}} + i \int_{-\infty}^{-i(c-x)} \frac{\varphi(x+it) dt}{1 - e^{2\pi t}}.$$

Um  $f(x+1)$  zu erhalten, haben wir den Punkt  $c$  durch den Punkt  $c'$  zu ersetzen, der zwischen  $x$  und  $x+1$  liegt. Es hindert uns aber nichts,  $c-x = x-c'$  d. h.  $c$  und  $c'$  gleich weit von  $x$  entfernt anzunehmen. Dadurch ergibt sich

$$(10) \quad f(x+1) = \int_{c'}^{c'} \varphi(z) dz - i \int_{-i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x-it) dt}{1 - e^{2\pi t}} + i \int_{-\infty}^{-i(c-x)} \frac{\varphi(x+it) dt}{1 - e^{2\pi t}},$$

und wenn man wieder  $f(x+1) + f(x) = 2f(x) + \varphi(x)$  setzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2f(x) = & -\varphi(x) + \int_{c'}^c \varphi(z) dz + \int_c^{c'} \varphi(z) dz \\ & + i \int_{i(c-x)}^{\infty} \frac{\varphi(x+it) - \varphi(x-it)}{1 - e^{2\pi t}} dt + i \int_{-\infty}^{-i(c-x)} \frac{\varphi(x+it) - \varphi(x-it)}{1 - e^{2\pi t}} dt, \end{aligned}$$

und hierin kann man nun, da  $t=0$  wieder kein Pol der Integranden ist,  $c$  und folglich auch  $c'$  mit  $x$  zusammenfallen lassen. So erhält man

$$(11) \quad f(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \int \varphi(x) dx + i \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x+it) - \varphi(x-it)}{1 - e^{2\pi t}} dt.$$

Dies ist die von ABEL gegebene Formel. Von ihren zahlreichen Anwendungen sollen nur einige hier angeführt werden.

Macht man die Annahme  $\varphi(x) = e^{vx}$ , so wird nach (2)

$$f(x+n) - f(x) = e^{vx} \frac{e^{nv} - 1}{e^v - 1},$$

und aus (11) folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin vt \, dt}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{1}{4} \frac{e^v + 1}{e^v - 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{v}.$$

Dieses von CAUCHY auf anderem Wege abgeleitete Integral ist für ABEL der Ausgangspunkt des Beweises.

Die Entwicklung nach dem TAYLOR'schen Lehrsatz ergibt:

$$i(\varphi(x+it) - \varphi(x-it)) = 2 \sum (-1)^n \frac{\varphi^{(2n-1)}(x) t^{2n-1}}{\Pi(2n-1)},$$

worin  $n$  die Reihe der natürlichen Zahlen  $1, 2, 3, 4, \dots$  durchläuft. Wenn man also noch

$$(12) \quad \int_0^\infty \frac{t^{2n-1} dt}{e^{2\pi t} - 1} = \frac{B_n}{4n}$$

setzt, so folgt aus (11)

$$(13) \quad f(x) = -\frac{1}{2} \varphi(x) + \int \varphi(x) dx + \sum (-1)^{n-1} B_n \frac{\varphi^{(2n-1)}(x)}{\Pi(2n)}.$$

Diese Reihe ist freilich im allgemeinen divergent, da die *Bernouilli'schen Zahlen*  $B_n$ , für die man aus (12) auch den Ausdruck

$$B_n = \frac{2\Pi(2n)}{(2\pi)^{2n}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{2n}}$$

findet, mit unendlich wachsenden  $n$  wie  $2\Pi(2n)(2\pi)^{-2n}$  unendlich werden. Will man also die Reihe (13) benutzen, so muss man sich auf eine endliche Anzahl von Gliedern beschränken und den dabei begangenen Fehler abschätzen, was für jede Function  $\varphi(x)$  besonders geschehen muss.

In dem besonderen Fall aber, wenn  $\varphi(x)$  eine ganze rationale Function von  $x$  ist, ist die Formel (13) genau richtig, denn die Reihe bricht dann, wenn  $m$  der Grad von  $\varphi(x)$  ist, ab, sobald  $2n - 1 > m$  wird.

Setzt man  $\varphi(x) = x^m$ , so ergibt sich aus (11) und (13) ein Polynom  $(m+1)^{\text{ten}}$  Grades  $S_m(x)$ , das nach (2) für ein ganzzahliges  $x$  den Werth

$$S_m(x) = 1^m + 2^m + 3^m + \dots + (x-1)^m + S_m(0)$$

darstellt:

$$\begin{aligned} (14) \quad S_m(x) &= -\frac{1}{2}x^m + \frac{x^{m+1}}{m+1} + i \int_0^\infty \frac{(x+it)^m - (x-it)^m}{1 - e^{2\pi t}} dt \\ &= -\frac{1}{2}x^m + \frac{x^{m+1}}{m+1} + \sum^n (-1)^{n-1} \frac{\Pi(m)}{\Pi(2n)\Pi(m-2n+1)} B_n x^{m-2n+1}, \end{aligned}$$

worin die Summe so weit fortzusetzen ist, als  $m-2n+1$  nicht negativ wird. Es ist daher

$$\begin{aligned} S_m(0) &= 0 \quad \text{für ein gerades } m \\ (15) \quad S_m(0) &= \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m+1} B_{\frac{m+1}{2}} \quad \text{für ein ungerades } m. \end{aligned}$$

Aus der Formel

$$S_m(x+1) - S_m(x) = x^m$$

ergibt sich, wenn man  $x=0$  setzt,  $S_m(1) = S_m(0)$  und folglich aus (14) für  $x=1$ :

$$(16) \quad \sum (-1)^{n-1} \frac{\Pi(m)}{\Pi(2n)\Pi(m-2n+1)} B_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1},$$

worin aber die Summe nur so weit auszudehnen ist, als  $m-2n+1$  positiv bleibt, also im Falle eines ungeraden  $m$  das Glied  $2n=m+1$  wegzulassen ist.

Hieraus ergeben sich, wenn man  $m=2n$  oder  $=2n+1$  annimmt, für jedes  $n$  zwei lineare Relationen zwischen den BERNOULLI'schen Zahlen

$$B_1, B_2, \dots, B_n,$$

aus denen man diese Zahlen successive berechnen kann, und zwar jedesmal zwei neue aus den schon gefundenen. Beispielsweise für  $m=4$  und  $m=5$ :

$$2B_1 - B_2 = \frac{3}{10}, \quad B_1 - B_2 = \frac{2}{15},$$



woraus man erhält:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}.$$

Wenn man in der Formel (13)  $\varphi(x) = \log x$  setzt, so erhält man die STIRLING'sche Reihe

$$(17) \quad \log \Gamma(x) = -\frac{1}{2} \log \frac{x}{2\pi} + x(\log x - 1) + \sum (-1)^{n-1} \frac{B_n}{2n(2n-1)} \frac{1}{x^{2n-1}},$$

worin die additive periodische Function aus dem Verhalten von  $\Gamma(x)$  im Unendlichen bestimmt wird.

Eine allgemeinere Entwicklung erhält man aus (11), wenn man  $\varphi(x) = \log(x+c)$  setzt, worin  $c$  eine willkürliche Constante bedeutet, und dann nach fallenden Potenzen von  $x$  entwickelt.

Man erhält so zunächst

$$f(x) = -\frac{1}{2} \log(x+c) + (x+c)(\log(x+c) - 1) \\ - i \sum \frac{(-1)^n}{nx^n} \int_0^\infty \frac{dt}{1-e^{2\pi i t}} ((c+it)^n - (c-it)^n)$$

und dies giebt nach (14)

$$f(x) = -\frac{1}{2} \log(x+c) + (x+c)(\log(x+c) - 1) \\ - \sum \frac{(-1)^n}{nx^n} \left( S_n(c) + \frac{c^n}{2} - \frac{c^{n+1}}{n+1} \right).$$

Wenn man aber noch  $\log(x+c)$  nach fallenden Potenzen von  $x$  entwickelt und ein additive Constante aus  $x = \infty$  bestimmt, so folgt endlich:

$$(18) \quad \log \Gamma(x+c) = -\log \sqrt{\frac{x}{2\pi}} + (x+c) \log x - x - \sum \frac{(-1)^n}{nx^n} S_n(c).$$

Die Abschätzung des Restes dieser Entwicklung, wenn man bei irgend einem Gliede abbricht, ist von HERMITE gegeben (Crelle's Journal, Bd. 115).

Strassburg, Weihnachten 1901.