Zur Konvergenztheorie der Integrale $\lim_{z=\infty} \int_a^z f(x) \cos xy\, dx$.

Von

MICHEL PLANCHEREL in Freiburg (Schweiz).

---

§ 1. Ich habe in meiner Habilitationsschrift*) bewiesen, daß, wenn $\int_a^\infty \sqrt[3]{x} f(x)^2 dx$ $(a > 0)$ endlich ist, die Menge der reellen Werte y, für welche $\lim_{z=\infty} \int_a^z f(x) \cos xy\, dx$ nicht existiert, höchstens eine Menge vom Maße Null bildet. Diese Tatsache spreche ich kürzer aus, indem ich sage, daß $\lim_{z=\infty} \int_a^z f(x) \cos xy\, dx$ *fast überall* im Intervall $-\infty < y < +\infty$ existiert. Ich bin jetzt im Stande diesen Satz durch den folgenden, allgemeineren zu ersetzen.

Satz I. *Es sei $f(x)$ eine reelle, im Intervall (a, ∞), $a > 0$ definierte Funktion. Wenn es eine positive Zahl p gibt, derart, daß $\int_a^\infty x^p f(x)^2 dx$ endlich ist, dann existiert $\lim_{z=\infty} \int_a^z f(x) \cos xy\, dx$ fast überall im Intervall $-\infty < y < +\infty$ und stellt eine in diesem Intervall quadratisch integrierbare Funktion dar.***)

Der unten gegebene Beweis ist demjenigen nachgebildet, durch den

---

*) M. Plancherel, Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies [Rend. Circ. Mat. Palermo 30 (1910), S. 289—335, S. 331].

**) Die Funktion $h(x)$ heißt in einem (endlichen oder unendlichen) Intervall (a, b) quadratisch integrierbar, wenn $\int_a^b h(x)^2 dx$ endlich ist.

Herr W. H. Young zu den schönen Sätzen seiner Note*) über die fast überall konvergenten Fourierschen Reihen geführt wurde; Grundlage und Ausgangspunkt des Beweises bilden einige Resultate meiner Habilitationsschrift, die der größeren Verständlichkeit wegen im folgenden Paragraphen zusammengestellt sind.

§ 2. Es sei $f(x)$ eine reelle, im Intervall $(0, \infty)$ im Lebesgueschen Sinne quadratisch integrierbare Funktion.**) Dann existiert fast überall die Funktion

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{d}{dy} \int_0^\infty dx \left(\int_0^y f(x) \cos xt\, dt \right) \tag{1}$$

und stellt eine im Intervall $(-\infty, +\infty)$ quadratisch integrierbare Funktion dar, die wir die *Fouriersche Transformierte* von $f(x)$ nennen wollen. Es gilt die Formel

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y)^2\, dy = \int_0^\infty F(y)^2\, dy = \int_0^\infty f(x)^2\, dx. \tag{2}$$

Wenn $g(x)$ eine zweite im Intervall $(0, \infty)$ quadratisch integrierbare Funktion und $G(y)$ ihre Fouriersche Transformierte ist, hat man noch

$$\int_0^\infty F(y)\, G(y)\, dy = \int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx. \tag{3}$$

Wenn $\lim\limits_{z=\infty} \int_0^z f(x) \cos xy\, dx$ fast überall konvergiert, so gilt fast überall

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \lim_{z=\infty} \int_0^z f(x) \cos xy\, dx. \tag{4}$$

Übrigens, ist es, unabhängig von der Konvergenz oder Divergenz der rechten Seite von (4), immer möglich (und zwar auf unendlich viele Arten), eine von y unabhängige, über alle Grenzen wachsende Folge von Zahlen z_n

$$0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < z_n < \cdots, \quad \lim_{n=\infty} z_n = \infty$$

zu finden, derart, daß fast überall

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{n=\infty} \int_0^{z_n} f(x) \cos xy\, dx.$$

---

*) W. H. Young, Sur les séries de Fourier convergentes presque partout [C. R. 155 (1912), S. 1480—1482].

**) In dieser Arbeit werden alle Integrale im Lebesgueschen Sinne genommen.

Umgekehrt, wenn $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{z_n} f(x)\cos xy\,dx$ für eine solche Folge (z_n) fast überall konvergiert, so ist dieser Limes fast überall gleich $F(y)$.

Führen wir also, wie es in der Theorie der Fourierschen Reihen geschieht, die abgekürzte Schreibweise

$$F(y)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(x)\cos xy\,dx \tag{5}$$

ein, um auszudrücken, daß $F(y)$ die Fouriersche Transformierte (1) von $f(x)$ ist, so verhält sich das Äquivalenzsymbol $(\sim)$ gegenüber Addition und Integration wie das Symbol der Gleichheit $(=)$. Aus (5) folgert man leicht, daß

$$\frac{F(y+u)+F(y-u)}{2}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(x)\cos xy\cdot\cos xu\,dx. \tag{6}$$

Die bekannte Integralformel von Fourier

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\lim_{y=\infty}\int\limits_0 dy\left(\cos xy\cdot\lim_{t=\infty}\int\limits_0^t f(t)\cos ty\,dt\right)$$

bedeutet, wenn sie anwendbar ist, die ganz allgemeine Tatsache, daß wenn F die Fouriersche Transformierte einer im Intervalle $(0,\infty)$ quadratisch integrierbaren Funktion f ist, umgekehrt f die Fouriersche Transformierte von F ist. Sie ist also nichts anderes als die zweimalige Ausführung einer Art involutorischer Funktionaloperation, die jede im Intervall $(0,\infty)$ quadratisch integrierbare Funktion in eine andere, in diesem Intervall ebenfalls quadratisch integrierbare Funktion überführt.

§ 3. Der Satz I ist eine unmittelbare Folge des Satzes:

Satz II. *Wenn die Funktion $h(x)$ im Intervall (a,∞), $a>0$ quadratisch integrierbar und r irgend eine positive Zahl ist, so konvergiert*

$$\lim_{z=\infty}\int\limits_0^z\frac{h(x)\cos xy}{x^r}\,dx$$

fast überall.

In der Tat, setzt man $h(x)=x^{\frac{p}{2}}f(x)$, $r=\frac{p}{2}$, so bekommt man den Satz I. Der Satz II selber beruht wesentlich auf folgendem Lemma:

Ist $h(x)$ im Intervall (a,∞), $a>0$ quadratisch integrierbar und q

irgend eine positive Zahl, dann existiert eine in jedem endlichen Intervall integrierbare Funktion $M(y)$ derart daß für $z \geqq a$, die Ungleichung

$$\left| \int_a^z \frac{h(x) \cos xy}{x^q} dx \right| \leqq M(y), \quad (q>0, z \geqq a > 0, -\infty < y < +\infty)$$

fast überall im Intervall $-\infty < y < +\infty$ *besteht.*

Wenn $q > \frac{1}{2}$, also $\frac{1}{x^q}$ im Intervall (a, ∞) quadratisch integrierbar ist, so ist das Lemma direkt aus der bekannten Ungleichung von Schwarz

$$\left| \int_a^z \frac{h(x) \cos xy}{x^q} dx \right|^2 \leqq \left(\int_0^\infty \left| \frac{h(x)}{x^q} \right| dx \right)^2 \leqq \int_a^\infty \frac{dx}{x^{2q}} \cdot \int_a^\infty h(x)^2 dx$$

abzuleiten. Es genügt also, daß wir es für $q < 1$ beweisen. Bilden wir dazu die Funktionen

$$(7) \qquad S_z(y) = \int_a^z \frac{h(x) \cos xy}{x^q} dx, \quad s_z(y) = \int_a^z \frac{\cos xy}{x^q} dx, \quad 0 < a \leqq z, \ 0 < q < 1,$$

und nennen ferner $H(y)$ die Fouriersche Transformierte einer Funktion, die im Intervall $(0, a)$ gleich Null und im Intervall (a, ∞) gleich $h(x)$ ist,

$$H(y) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty h(x) \cos xy \, dx,$$

so besteht die Formel

$$(8) \qquad S_z(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty s_z(u) \frac{H(y+u) + H(y-u)}{2} du.$$

In der Tat, zunächst sieht man aus dem § 2, daß $s_z(u)$ und $\frac{H(y+u)+H(y-u)}{2}$ im Intervall $(0, \infty)$ quadratisch integrierbar sind, dann folgt aber (8) direkt aus (6), (3), (7).

Mit Hilfe der Substitution $xy = t$ in dem Integral $s_z(y)$ schließt man, daß es eine Konstante b gibt mit der Eigenschaft

$$(9) \qquad |s_z(y)| < \frac{b}{|y|^{1-q}}, \quad z \geqq a, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Andererseits findet man durch partielle Integration desselben Integrales eine Konstante c derart, daß

$$(10) \qquad |s_z(y)| < \frac{c}{|y|}, \quad z \geqq a, \quad -\infty < y < \infty.$$

Zerlegen wir jetzt das Integral rechts in (8) in zwei Integrale $\int_0^1 + \int_1^\infty$, so lehrt uns (10), daß bei dem Ansatz

$$\left|\int_1^\infty\right| < \frac{c}{2}\int_1^\infty |H(y+u) + H(y-u)| \frac{du}{u} = M_1(y)$$

$M_1(y)$ existiert und im ganzen Intervall $(-\infty, +\infty)$ unterhalb einer festen Grenze bleibt, da $\frac{1}{u}$ und $H(y+u) + H(y-u)$ im Intervall $(1, \infty)$ quadratisch integrierbar sind. Ferner wird nach (9) für das erste Integral

$$\left|\int_0^1\right| < \frac{b}{2}\int_0^1 |H(y+u) + H(y-u)| \frac{du}{u^{1-q}}$$

$$\leqq \frac{b}{2}\left[\int_0^1 |H(y+u)| \frac{du}{u^{1-q}} + \int_0^1 |H(y-u)| \frac{du}{u^{1-q}}\right] = M_2(y).$$

Nun hat Herr W. H. Young bewiesen*), daß wenn f und g integrierbar sind, $\int f(y+u)\, g(u)\, du$ fast überall existiert und eine integrierbare Funktion von y darstellt. Aus diesem Youngschen Satze folgt, daß $M_2(y)$ fast überall existiert und in jedem endlichen Intervall integrierbar ist. Bilden wir jetzt die Funktion $M(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[M_1(y) + M_2(y)]$, so genügt sie den Bedingungen des Lemmas, das somit vollständig bewiesen ist.

Um jetzt aus dem Lemma den Satz II zu bekommen, hat man einfach $0 < q < r$ zu nehmen. Schreibt man dann

$$\int_a^z \frac{h(x) \cos xy}{x^r}\, dx = \int_a^z \frac{1}{x^{r-q}} \cdot \frac{h(x) \cos xy}{x^q}\, dx$$

und integriert die rechte Seite partiell, so folgt aus dem Lemma, daß der Limes der rechten Seite, also auch der Limes der linken Seite, für $z = \infty$ fast überall konvergiert. Damit ist der Beweis geliefert. Daß dieser Limes im Intervall $(-\infty, +\infty)$ quadratisch integrierbar ist, ergibt sich unmittelbar aus § 2.

§ 4. Ich schließe mit einigen Bemerkungen.

Fast überall konvergent ist nach einem Satz von Egoroff**) gleichbedeutend mit *wesentlich gleichmäßig konvergent* nach Weyl. In unserem Falle ist das aus der Existenz der Funktion $M(y)$ des Lemmas leicht zu bestätigen.

---

*) W. H. Young, Sur la généralisation du théorème de Parseval [C. R. 155 (1912), S. 30—33].

**) D. Th. Egoroff, Sur les suites de fonctions mesurables [C. R. 152 (1911), S. 244—245].

Verallgemeinernd kann man sagen, daß $F(y) = \lim\limits_{z=\infty} \int\limits_0^z f(x) \cos xy\, dx$ fast überall existiert, wenn es ein $a > 0$ und ein $p > 0$ gibt, sodaß $\int\limits_a^\infty x^p f(x)^2\, dx$ endlich bleibt und wenn ferner $f(x)$ im Intervall $(0, a)$ integrierbar ist (ohne notwendig quadratisch integrierbar zu sein). Indessen existiert $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y)^2\, dy$ nur dann, wenn $f(x)$ im Intervall $(0, a)$ auch noch quadratisch integrierbar ist.

Wir könnten im Satz I x^p durch andere stetige, wachsende Funktionen wie $(\log x)^{2+p}$, $\log^2 x\, (\log\log x)^{2+p}, \cdots$ $(p > 0)$ ersetzen mit nur unwesentlichen Änderungen im Beweise. Es wäre interessant zu wissen, ob man x^p auch durch $\log x$ ersetzen könnte, also ob $\lim\limits_{z=\infty} \int\limits_a^z f(x) \cos xy\, dx$ fast überall konvergiert, wofern nur $\int\limits_a^\infty f(x)^2 \log x\, dx$ endlich bleibt. Dies scheint mir wahrscheinlich, aber nicht durch die hier benutzte Methode beweisbar.

Alle hier angeführten Sätze bleiben gültig, wenn man in ihnen $\cos xy$ durch $\sin xy$ ersetzt.