

ohne Frage durch das Vorhandenseyn bedeutender unregelmäßiger innerer Spannungen der Krystalle, die man bei den vielfachen schlierenartigen Streifungen auf den Flächen der sehr harten Krystalle annehmen muß. Besonders ausgesuchte Krystalle mit gleichmäßig ebenen und vollkommen spiegelnden Flächen haben denn auch einigermassen übereinstimmende Resultate ergeben und die wahrscheinlichen Werthe der Grundform mit einiger Annäherung zu bestimmen erlaubt. Diese Resultate sind in der folgenden Tabelle enthalten:

No. des Krystalles	Beobachtete Winkel	Berechneter Winkel (111) : (111)
1	(111) : (001) = 53° 10',8	73° 58',4
„	( $\bar{1}$ 11) : (001) = 52 55,0	74 10,0
2	(111) : (001) = 52 27,0	75 6,0
„	( $\bar{1}$ 11) : (001) = 52 48,0	74 12,0
3	(111) : (001) = 52 56,7	74 6,6
„	( $\bar{1}$ 11) : (001) = 52 51,0	74 18,0
	Mittel: 52° 51',4	74° 19'
	$\pm 3,9$ .	

Danach ist das Axenverhältniß des beobachteten viergliedrigen Oktaëders:

$$a : c = 1 : 0,9335.$$

Proskau, 9. Oktober 1869.

### III. Ueber einige Punkte in der Theorie der Capillarerscheinungen; von J. Stahl.

Es soll hier nicht das Verhältniß besprochen werden, in dem die Theorie der Capillarerscheinungen zur Erfahrung steht, sondern es soll hier nur versucht werden, einige

Punkte dieser Theorie aufzuhellen, die bis jetzt dunkel geblieben zu seyn scheinen. Dabei soll nicht auf diejenigen Arbeiten Rücksicht genommen werden, welche, wie die von Wertheim <sup>1)</sup> und Holtzmann <sup>2)</sup>, von willkürlichen oder irrigen Voraussetzungen über das Gleichgewicht der Flüssigkeiten ausgehend der gegenwärtigen Theorie keinen bedeutenden Schaden zugefügt haben, ebenso nicht auf diejenigen, in welchen, wie in der kleinen Arbeit von Gilbert <sup>3)</sup> ein aus einer richtigen Rechnung gezogenes richtiges Resultat auf eine unrichtige Art gedeutet wurde etc. Wohl aber müssen hier diejenigen Arbeiten einer Analyse unterworfen werden, welche, obgleich sie in den Ansichten der Physiker über die Erklärung der Capillarerscheinungen keine Revolution erzeugt haben, von der Laplace'schen Theorie in einem Punkte von minderer Wichtigkeit abweichend, große Zweifel über die Richtigkeit und vielleicht auch Möglichkeit einer mathematischen Theorie der Capillarerscheinungen überhaupt unter die Physiker geworfen haben. Bei der Prüfung dieser Arbeiten scheint es am geeignetsten, den historischen Weg zu verfolgen.

Laplace <sup>4)</sup> hat zuerst eine mit der Erfahrung übereinstimmende Theorie der Capillarerscheinungen gegeben, wobei er in der ganzen Ausdehnung der Flüssigkeit die Dichte derselben als constant betrachtete und ferner, Clairaut näher bestimmend, annahm, daß die Moleküle der Körper auf einander anziehend wirken, daß aber diese Anziehung nur in unmerklichen Entfernungen eine merkliche Gröfse habe, in allen merklichen Entfernungen aber verschwindend klein sey. Er stellte die Differentialgleichung für die capillare Oberfläche auf und fand auch das zweite Gesetz der Capillartheorie über die Beständigkeit des Randwinkels

1) *Mém. sur la capillarité*, unter den nachgelassenen Papieren Wertheim's gefunden.

2) Ueber die Theorie der Erscheinungen der Capillarität, Stuttgart 1861.

3) Pogg. Ann. Bd. 102.

4) Supplément zum X. Buch der *Mécanique céleste* -- deutsch von Brandes im 33. Bd. von Gilb. Ann.

zwischen der Oberfläche der Flüssigkeit und der Haarröhrchenwand auf; ohne einen strengen analytischen Beweis dafür zu geben. Gauß<sup>1)</sup> bestätigte durch eine strenge und elegante Rechnung mittelst des Prinzips der virtuellen Bewegungen die Laplace'sche Theorie und gab insbesondere von dem zweiten Hauptsatz dieser Theorie eine bloß auf die Natur der Molecularanziehung gestützte Begründung; doch war auch er von der Annahme einer gleichmäßigen Dichtigkeit durch die gesammte flüssige Masse nicht abgewichen. Gegen die Theorie von Laplace wurden gleich anfangs und später mehrfach Einwürfe erhoben, die indessen entweder selbst keinen innern Halt hatten, oder von Nicht-Mathematikern (Naturphilosophen) herrührten, die wenig geeignet zu seyn scheinen, über eine so schwierige mathematische Theorie richtig zu urtheilen, wohl aber, die Mathematik bei physikalischen Problemen zu verdächtigen. Die Einwürfe aber von einiger Bedeutung wurden siegreich widerlegt (Petit). Auch Young's Angriffe haben keine Bedeutung erlangt. Einen Einwurf zog er aus einer Erscheinung, die mit der Laplace'schen Theorie im Widerspruch stehen sollte; aber Poisson hat später die Uebereinstimmung dieser Erscheinung mit der Theorie von Laplace nachgewiesen. Ein zweiter Einwurf bezog sich darauf, daß Laplace nur anziehende Kräfte angenommen und keine Rücksicht auf die repulsive Kraft der Wärme genommen habe; dieß scheint aber, unter der Voraussetzung, daß die anziehenden Kräfte noch immer über die abstossenden das Uebergewicht behaupten, kein eigentlicher Einwurf zu seyn, da er nur das Wirkungsgesetz der Moleküle näher bestimmt, die Theorie selbst aber wird dadurch nicht geändert.

Desto mehr Aufsehen erregte die Arbeit von Poisson<sup>2)</sup>, in welcher der Laplace'schen Theorie der Einwurf gemacht wird, daß sie nicht vermögend sey, die Erscheinun-

1) *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu equilibrium.* Göttingen 1830.

2) *Nouvelle théorie de l'action capillaire, Paris 1831.*

gen der Capillarität zu erklären, da sie von der Annahme einer gleichmäßigen Dichte der Flüssigkeit ausgehe; es sey aber zur Erklärung der Capillarerscheinungen nothwendig, die Dichte der Flüssigkeit gegen den Umfang zu als veränderlich, gegen eine freie Oberfläche zu als rasch abnehmend, gegen die Wände des Gefäßes zu im Allgemeinen als rasch wachsend anzunehmen. Diesen Schluß zog er aus drei Betrachtungen. Aus der ersten sollte folgen, daß die Gröfse  $K$  in der Laplace'schen Theorie, welche dasselbst als positiv betrachtet wird, im Gegentheil negativ sey; aus der zweiten, daß die Gröfse  $H$  in der Laplace'schen Theorie Null sey, woraus hervorgehen würde, daß die Theorie von Laplace die Capillarerscheinungen nicht zu erklären vermöge; aus der dritten, daß das Wirkungsgesetz zwischen den Moleculen der festen Wände und denen der Flüssigkeit dasselbe sey wie das zwischen den Moleculen der Flüssigkeit untereinander. Alleweil aber blieb das merkwürdig, ja so zu sagen verdächtig, daß Poisson für die capillare Oberfläche und für den Randwinkel wieder Gleichungen von derselben Form gefunden hat wie die in der Theorie von Laplace sind, wenn auch die Ausdrücke in bestimmten Integralen der besonderen beständigen Gröfsen in beiden Theorien andere sind. Die neue Theorie scheint übrigens schon anfangs einen starken Mißton erregt zu haben, indem sie einigen Physikern zu unerquicklichen Raisonsnements [Z. B. Link], Arago sogar zu einem harten Ausspruch über sie Veranlassung gab; Nicht-Mathematiker wie Parrot<sup>1)</sup> und Mile<sup>2)</sup> begannen an der Zulässigkeit der Analysis und Richtigkeit der mathematischen Resultate bei physikalischen Problemen zu zweifeln, aber die meisten Mathematiker, die über diesen Gegenstand geschrieben haben, scheinen die Richtigkeit der Einwürfe Poisson's anerkannt zu haben, ohne daß sie dieselben gehörig untersucht haben. Aber der neuen Theorie blieb eine Hauptschwierigkeit, die sie nicht glücklich hinweg ge-

1) Pogg. Ann. Bd. 26 und 27.

2) Pogg. Ann. Bd. 45.

räumt hat, die nämlich, daß das Princip der virtuellen Bewegungen die Laplace'sche Theorie bestätigt. Hier muß ich auf eine von der Petersburger Akademie gekrönte Abhandlung über die Theorie der Capillarerscheinungen von dem russischen Professor Davidow <sup>1)</sup> aufmerksam machen, welche auf das Princip der virtuellen Bewegungen gegründet und von der Annahme einer raschen Dichtigkeitsänderung der Flüssigkeit gegen den Umfang zu ausgehend, das mit der Poisson'schen Theorie übereinstimmende Resultat liefert, daß eine Theorie der Capillarerscheinungen unmöglich sey, wenn man von den Dichtigkeitsänderungen an der freien Oberfläche abstrahirt. Aber diese Behauptung rührt von der Vernachlässigung eines Gliedes her, die gerade für den Fall einer constanten Dichtigkeit der Flüssigkeit nicht zulässig ist, wie später gezeigt werden wird, und ist darum falsch.

Während Beer <sup>2)</sup> nicht versuchte, an der Richtigkeit der Einwürfe Poisson's zu rütteln, sondern nur die Anwendbarkeit des Princip's der virtuellen Bewegungen bei dieser Art physikalischer Probleme in Frage stellte, hatte Bède <sup>3)</sup> schon die Kühnheit diese Einwürfe anzugreifen, und er stellte sie als Folge einer Vernachlässigung von Gliedern in der Rechnung Poisson's dar. Indefs scheint hiermit die schwierige Frage nicht endgültig gelöst zu seyn, und dann ist diels auch gar nicht der Weg, auf dem solches geschehen könnte. Beer scheint, wenn ich ihn richtig verstanden habe, die virtuellen Momente der Molecularkräfte wie unendlich kleine Größen zweiter Ordnung betrachtet zu haben, und dabei hat ihn wahrscheinlich folgende Betrachtung geführt. Stellt man sich die Körper als aus kleinsten Theilchen Moleculen bestehend vor, die durch endliche, sehr kleine Zwischenräume von einander getrennt

1) *La théorie des phénomènes capillaires* — deutsch in Erman's Archiv Bd. 16.

2) Pogg. Ann. Bd. 96.

3) *Recherches sur la capillarité* in den *mém. couronnées de Brux* 30. Bd.

sind, so werden bei der Ableitung der Variationsformel stillschweigend nur solche Verschiebungen eines Theilchens angenommen, welche nicht bloß gegen die Linieneinheit, sondern auch gegen die Entfernung zweier Nachbarmoleculë als verschwindend klein angesehen werden. Denkt man sich jetzt den Körper als eine stetige Masse, so wird die Entfernung zweier benachbarter Moleculë ein Differential erster, und deswegen die Variation des Ortes des Moleculë ein Differential zweiter Ordnung werden müssen. Deutlich hat sich Beer nicht ausgesprochen, die Stelle, welche mich zum Glauben verleitet hat, als sey Beer wirklich von der vorigen Betrachtung geleitet worden, ist folgende: »Wenn also Molecularkräfte thätig sind, so ist es im Allgemeinen durchaus nicht gestattet, das Zeichen  $\delta$  durch eine Variation zu deuten, wodurch Theilchen der Flüssigkeit aus ihren Gleichgewichtslagen um Größen verschoben werden, die mit der Entfernung zweier nächst an einander liegenden Theilchen in Vergleich treten.« Obgleich er sich die Körper als aus Moleculen bestehend denkt, so scheint es, als ob er hier die Entfernung zweier Flüssigkeitstheilchen als ein Differential betrachtet und seine frühere Hypothese über die Constitution der Körper mit der Annahme, die Körper seyen stetig, vertauscht habe. Es ist aber durchaus kein Grund vorhanden, die Variationen der Oerter der Moleculë als unendlich kleine Größen zweiter Ordnung zu betrachten, weder unter dieser, noch jener Hypothese, und demnach ist auch dieser Versuch eine endgiltige Entscheidung herbeizuführen, als ein mißlungener zu betrachten.

Dies ist der gegenwärtige Stand der Capillartheorie und in der That ist dieser kein erfreulicher. Das große Ansehen Poisson's als Mathematiker ist ohne Zweifel Ursache gewesen, daß sich die Physiker so lange gescheut haben, die Richtigkeit seiner Einwürfe gegen die Laplace'sche Theorie direkt zu untersuchen. Zwar hat Minding <sup>1)</sup> auf eine glückliche Art die Unrichtigkeit der zwei ersten Einwürfe bewiesen, aber er scheint nicht beachtet worden

1) Dove's Repertorium der Physik, Bd. 5.

zu seyn. Und in der That, prüft man die drei Einwürfe Poisson's genau, so wird man nicht umhin können mit Minding im Urtheile über ihre Unrichtigkeit übereinzustimmen. Wenn es nun aber auch keinem Zweifel mehr unterliegt, daß Poisson sich hier geirrt hat, so hat er sich doch um die Theorie selbst viele Verdienste erworben. Er hat nicht allein die Theorie in allen ihren Theilen vervollkommt und vermehrt und aus statischen Betrachtungen auf eine strenge, wenngleich weitläufige Art das Gesetz über die Beständigkeit des Randwinkels bewiesen, sondern er hat auch Irrthümer der ältern Theorie berichtigt. Er hat zuerst den von Laplace aufgestellten Ausdruck für den horizontalen Druck der Flüssigkeit auf eine verticale Ebene, auf dessen Unvollständigkeit schon Young aufmerksam gemacht und woraus er einen Einwurf gegen die Laplace'sche Theorie gezogen hatte, ergänzt, und hat ferner die Erscheinung der scheinbaren Veränderlichkeit des Randwinkels, wenn die Flüssigkeit das Ende des Haarröhrchens erreicht, welche Laplace als seiner Theorie widerstreitend angesehen hat, in Uebereinstimmung mit dieser Theorie gebracht.

Wir gehen nun zur Untersuchung der Einwürfe Poisson's über. Stelle  $AOB$  Fig. 7 Taf. I die capillare Oberfläche und  $O\varepsilon$  einen unendlich dünnen cylindrischen Kanal vor, dessen Projection auf eine Verticale  $h$  sey. Sey ferner  $\varrho$  die Dichte der Flüssigkeit und  $(\lambda \lambda')$  der größste und kleinste Krümmungshalbmesser der Oberfläche im Punkte  $O$ . Nach Poisson kann nur dann der Flüssigkeitskanal im Gleichgewichte seyn, wenn die Summe der auf ihn wirkenden Kräfte, auf die Einheit der Fläche bezogen, gleich Null ist. Diese Kräfte sind aber: die Molecularkraft:  $K - \frac{H}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right)$ , der Druck der Flüssigkeitssäule in  $\varepsilon$ :  $g\varrho h$ , und vielleicht noch ein Oberflächen-  
druck in  $O$ :  $P$ . Demnach muß nach Poisson seyn:

$$K - \frac{H}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) + g\varrho h + P = 0.$$

Daraus folgert Poisson, daß  $K$ , welches in der Theorie von Laplace als eine positive ungeheuer große, constante

Zahl betrachtet wird, auch negativ werden könne. Aber diese Gleichung macht das Princip, worauf sie gegründet ist, von vornherein verdächtig, da sie, lauter Constante und nur eine einzige Veränderliche enthaltend, illusorisch wird. Und in der That ist es zum Gleichgewichte der Flüssigkeitssäule in dem Kanale  $O\varepsilon$  durchaus nicht erforderlich, daß die auf sie wirkenden Kräfte sich aufheben, sondern nur, daß sie dem in  $\varepsilon$  aufwärts wirkenden Gegendrucke das Gleichgewicht halten. Es kann demnach weder die Folgerung aus der ersten Betrachtung, noch die aus der zweiten, daß  $H=0$  sey, als richtig anerkannt werden, da auch die zweite Betrachtung auf dieselbe mangelhafte statische Betrachtung gegründet ist wie die erste.

Wir kommen zur dritten Betrachtung. Bezeichnet  $H'$  einen Ausdruck von derselben Form wie  $H$  ist, und bezieht sich  $H'$  auf das Verhältniß der Flüssigkeit zum Haarröhrchen (Adhäsion) im Gegensatz zu  $H$ , welches die Cohäsion der Flüssigkeit bestimmt, bedeutet ferner  $c$  den Umfang eines Haarröhrchens mit verticalen Wänden, so hat Laplace für das Gewicht  $A$  des vom Haarröhrchen gehobenen Flüssigkeitssäulchens folgenden Ausdruck aufgestellt:

$$A = c(2H' - H).$$

Poisson hat nun in seiner dritten Betrachtung für  $A$  einen zweiten Ausdruck:

$$A = cH$$

abgeleitet, und wenn ich ihn recht verstanden habe, scheint seiner Rechnung folgende Idee zu Grunde zu liegen. So wie das Haarröhrchen, so kann auch das der Wand des Haarröhrchens zunächst anliegende Flüssigkeitshäutchen von beliebiger, aber unmerklicher Dicke als Ursache der Erhebung einer Flüssigkeitssäule betrachtet werden und heißt  $A'$  das Gewicht dieser Säule, so gilt auch für  $A'$  die obere Formel für  $A$ , nur hat man darin für  $H':H$  zu setzen. Daraus folgt  $A' = cH$ , und da  $A'$  von  $A$  nur um eine unmerkliche Größe, um das Gewicht des der Röhrchenwand anliegenden flüssigen Häutchens von unmerklicher Dicke, verschieden ist, so ist auch  $A = cH$ . Daraus folgt nun,



dafs  $H' = H$  ist, dafs also die Röhre in ihrer Wirkung auf das Flüssige nicht verschieden ist von der Flüssigkeit in ihrer Wirkung auf sich selbst, dafs man also Haarröhrchen und Flüssigkeit als wie eine und dieselbe Materie betrachten müsse. In diesem Falle hören aber alle Wirkungen der Capillarität auf.

Abgesehen davon, dafs die letzte Behauptung Poisson's an sich falsch ist und man dieselbe durchaus nicht gelten lassen könnte, wenn nicht der dritten Betrachtung der Beweis von  $H = 0$  vorangegangen wäre, ist auch die Idee, welche Poisson hier geleitet hat, unrichtig. Denn gesetzt auch, das Haarröhrchen sey in seiner Wirkung vom Flüssigen nicht verschieden, so würde doch ein Aufsteigen der Flüssigkeit erfolgen, weil das Haarröhrchen ein starrer Körper ist. Deutlicher ist dies in der Gleichung ausgesprochen, welche das Princip der virtuellen Bewegungen aufstellt. Wenn nun das der Haarröhrchenwand zunächst anliegende Flüssigkeitshäutchen von unmerklicher Dicke als Ursache einer Erhebung einer Flüssigkeitssäule angesehen und hierbei z. B. die von Laplace aufgestellte Formel für  $\Delta$  angewendet werden soll, so müßte man das Flüssigkeitshäutchen als starr betrachten können, wogegen aber die leichte Beweglichkeit der Flüssigkeitstheilchen streitet. Es darf daher  $\Delta$  nicht gleich  $cH$  gesetzt werden, und somit hat auch dieser Einwurf seine Gültigkeit verloren.

Man darf daher bis jetzt jeden Versuch, in der von Laplace aufgestellten Theorie einen inneren Widerspruch zu entdecken, als misslungen betrachten. Aber die Hypothese einer gleichmässigen Dichtigkeit durch die gesamte flüssige Masse ist nicht allein unserer jetzigen Vorstellung über den innern Zustand der Flüssigkeiten nicht mehr nicht conform, sondern es nöthigen uns sogar einige Erscheinungen dieselbe zu verlassen, insbesondere hat Brunner <sup>1)</sup> auf das Verhalten von Alkohol gegenüber Wasser aufmerksam gemacht, welches im directen Widerspruch mit der Formel  $\Delta = c(2H' - H)$  steht.

1) Pogg. Ann. Bd. 70.

Die folgende Untersuchung über die Frage: Muß man Dichtigkeitsänderungen in der Flüssigkeit in die Theorie der Capillarerscheinungen einführen oder nicht? wird die Unzulässigkeit der Behauptung Dawidow's darthun, was aus den von Poisson aufgestellten Ausdrücken für die besonderen beständigen Größen wegen deren Undurchsichtigkeit nicht geschehen kann.

Wir wollen, da die Rechnung nicht viel complicirter wird, annehmen, im Haarröhrchen stehen zwei Flüssigkeiten übereinander; die obere habe die Dichtigkeit  $c$ , die untere die Dichte  $c'$ . Seyen  $\partial m$  und  $\partial m'$  Massenelemente der oberen und unteren Flüssigkeit und  $\partial M$  und  $\partial M'$  Massenelemente der Haarröhre und des großen Behälters  $PQRS$  mit den constanten Dichten  $C$  und  $C'$ . Es mögen  $U$  und  $U'$  (Fig. 8 Taf. I) die obere und untere capillare Oberfläche im Haarröhrchen,  $O$  und  $O'$  die der oberen und unteren Flüssigkeit anliegenden Theile der Röhrenoberfläche, endlich  $U''$  die im Vergleich zu  $U$  und  $U'$  sehr große freie Oberfläche der untern Flüssigkeit außerhalb des Haarröhrchens, welche im größten Theile ihrer Ausdehnung als wie eine horizontale Ebene betrachtet werden kann, und  $O''$  die der Flüssigkeit anliegende Wandfläche des Behälters bedeuten. Während die Dichtigkeiten der Flüssigkeiten im Innern derselben constant sind, sollen sie gegen den Umfang zu als rasch veränderlich, in zum Umfang parallelen Schichten als überall gleich, und als Function der Länge der Normale  $n$  zum Umfang betrachtet und angenommen werden, daß die Dichtigkeitsänderungen nur Wirkungen der Molecularkräfte sind, und daß die Schwere keinen Einfluß darauf habe;  $A = \psi(n)$ ; und  $A' = \psi'(n)$  mögen das Gesetz der Dichtigkeitsänderungen für die obere und untere Flüssigkeit angeben, aber hierbei muß bemerkt werden, daß dieses Gesetz auch bei einer und derselben Flüssigkeit in der ganzen Ausdehnung des Umfanges derselben nicht dasselbe, sondern für die verschiedenen Oberflächen, je nachdem sie frei sind oder an eine starre Wand oder an die zweite Flüssigkeit gränzen, jedesmal ein anderes ist. So bestehen also unsere Flüssig-

keiten aus zwei Partien, einer, in welcher die Dichtigkeit constant ist und welche den größten Theil der flüssigen Masse begreift, und einer andern von unmerklicher Dicke und Masse, welche den Umfang der flüssigen Masse bildet und die vorige Partie der Flüssigkeit einhüllt, und in welcher die Dichtigkeit rasch veränderlich ist; wir wollen diese Partie das Flüssigkeitshäutchen nennen. Aber auch das Flüssigkeitshäutchen ist keine durchaus gleiche Masse, sondern muß als wie aus verschiedenen Stücken zusammengesetzt betrachtet werden, in deren jedem das Gesetz der Dichtigkeitsänderungen, weil von der Nachbarschaft bedingt, ein anderes ist, je nachdem nämlich das Flüssigkeitshäutchen eine freie Oberfläche darbietet, oder an einen starren oder flüssigen Körper gränzt. Es mögen nun  $V$  und  $V'$  die Volumina desjenigen Theiles der obern und untern Flüssigkeit bedeuten, dessen Dichtigkeit constant ist. Die Wirkung der Molecularkräfte soll nur in unmerklichen Entfernungen als merklich, in merklichen Entfernungen hingegen als verschwindend betrachtet werden. Es drücke:

$f(r)$  das Gesetz der Molecularwirkung zwischen den Theilchen der obern Flüssigkeit,

$f_1(r)$  das Gesetz der Molecularwirkung zwischen den Theilchen der untern Flüssigkeit,

$f_2(r)$  das Gesetz der Molecularwirkung zwischen den Theilchen der obern Flüssigkeit und denen der untern Flüssigkeit,

$f_3(r)$  das Gesetz der Molecularwirkung zwischen den Theilchen der obern Flüssigkeit und der Wand des Haarröhrchens,

$f_4(r)$  das Gesetz der Molecularwirkung zwischen den Theilchen der untern Flüssigkeit und der Wand des Haarröhrchens,

$f_5(r)$  das Gesetz der Molecularwirkung zwischen den Theilchen der untern Flüssigkeit und der Wand des Behälters

aus, und es sey ferner:

$$\begin{array}{ll}
 f(r) \cdot \partial r = - \partial \cdot \varphi(r) & f_3(r) \cdot \partial r = - \partial \cdot \varphi_3(r) \\
 f_1(r) \cdot \partial r = - \partial \cdot \varphi_1(r) & f_4(r) \cdot \partial r = - \partial \cdot \varphi_4(r) \\
 f_2(r) \cdot \partial r = - \partial \cdot \varphi_2(r) & f_5(r) \cdot \partial r = - \partial \cdot \varphi_5(r).
 \end{array}$$

Wirkt nun auſſer den Molecularkräften nur noch die Schwere auf die beiden Flüſſigkeiten, ſo muß für den Fall des Gleichgewichtes der beiden Flüſſigkeiten im Haarröhrchen und im Behälter folgender Ausdruck ein Maximum werden. [Man ſehe nach Gauß<sup>1)</sup> und Bertrand<sup>2)</sup>].

$$\begin{aligned}
 W = & -g \int z \partial m - g \int z \partial m' + \frac{1}{2} \int \varphi(r) \cdot \partial m \cdot \partial m \\
 & + \frac{1}{2} \int \varphi_1(r) \cdot \partial m' \cdot \partial m' + \frac{1}{2} \int \varphi_2(r) \cdot \partial m \cdot \partial m' \\
 & + \int \varphi_3(r) \cdot \partial M \cdot \partial m + \int \varphi_4(r) \cdot \partial M \cdot \partial m' \\
 & + \int \varphi_5(r) \cdot \partial M' \cdot \partial m'.
 \end{aligned}$$

Als Z-Axe wurde die Richtung der Schwere, und als Ebene der  $[XY]$  eine beliebige horizontale Ebene angenommen, und zugleich ſoll hier noch bemerkt werden, daß diejenigen Integrale in dieſem Ausdrücke, welche Molecularwirkungen darſtellen, den Factor  $\frac{1}{2}$  oder 1 haben, je nachdem die Körpermoleculẽ, deren Wirkungen aufeinander ſie ausdrücken, beide den Flüſſigkeiten, oder die einen einer Flüſſigkeit und die andern einem ſtarren Körper angehören. Hierauf iſt die Behauptung gegründet, daß Capillarscheinungen ſich auch dann darbieten müſſen, wenn die Materie des Haarröhrchens genau dieſelbe wäre wie die der Flüſſigkeit. Die nächſte Aufgabe iſt nun die der Auswerthung der beſtimmten vielfachen Integrale. Hierbei wird vorausgeſetzt, daß das Haarröhrchen und der Behälter keine ſcharfen Kanten und Spitzen darbieten, und daß ihre Krümmungen ſtets von der Art ſind, daß man ein Oberflächenelement derſelben von der Ausdehnung des Halbmessers der Wirkungssphäre der Moleculẽ als eben betrachten kann. Die beiden erſten, von der Schwere abhängigen, Integrale, in denen ſich

1) »*Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu equilibrium*«  
Göttingen 1830.

2) *Mém. sur la théorie des phénomènes capillaires*, in Liouville Journ.  
für 1848.

die Integrationen über die gesammten Massen der beiden Flüssigkeiten erstrecken, bestimmen die Höhe des Schwerpunktes der beiden Flüssigkeiten über oder unter der zur (XY) angenommenen Horizontalebene. In beiden können diejenigen Glieder, die sich auf die Flüssigkeitshäutchen beziehen, als unmerkliche Größen vernachlässigt werden, und die Integrationen dürfen sich daher, ohne die Genauigkeit der Rechnung zu beeinträchtigen, auf diejenigen Theile der beiden Flüssigkeiten erstrecken, in denen die Dichtigkeit constant ist. Bedeuten daher  $\partial V$  und  $\partial V'$  zwei Raumelemente, die der obern und untern Flüssigkeit angehören, so kann man für:  $-g \int z \partial m - g \int z \partial m'$  folgende andere Integrale substituiren:

$$-g c \int z \partial V - g c' \int z \partial V'$$

und hier erstrecken sich die Integrationen über die früher mit  $V$  und  $V'$  bezeichneten Räume.

Bei den drei letzten Integralen im Ausdrucke  $W'$  in denen sich die Integrationen über die starren Wände und die ihnen anliegenden Flüssigkeitshäutchen erstrecken, geschieht die Auswerthung auf eine und dieselbe Art. Sey  $AB$  (Fig. 9 Taf. I) eine starre Wand,  $C$  ein Element des Flüssigkeitshäutchens mit der Dichtigkeit  $\psi(n)$ ,  $CD = n$  seine Entfernung von der Wand  $AB$ , und  $CE$  der Radius der Wirkungssphäre zwischen den Theilchen der Wand und denen der Flüssigkeit. Der Gang der Rechnung ist nun etwa folgender: Man bestimme zuerst die Wirkung der Wand auf ein Flüssigkeitstheilchen  $C$ , und dehne hierauf, um die Integralwirkung der Wand auf das Flüssigkeitshäutchen zu erhalten, die Integration über das gesammte der Wand anliegende Flüssigkeitshäutchen aus. Die Resultate der Rechnung sind folgende. Setzt man:

$$\begin{aligned}
\int_r^\infty \varphi_3(r) \cdot r^2 \cdot \partial r &= \psi_3(r) & \int_r^\infty \frac{\psi_3(r)}{r^2} \cdot \partial r &= X_3(r) \\
& & 2\pi C \int_0^\infty X_3(n) \cdot \psi'(n) \cdot n \cdot \partial n &= b_3 \\
\int_r^\infty \varphi_4(r) \cdot r^2 \cdot \partial r &= \psi_4(r) & \int_r^\infty \frac{\psi_4(r)}{r^2} \cdot \partial r &= X_4(r) \\
& & 2\pi C \int_0^\infty X_4(n) \cdot \psi'(n) \cdot n \cdot \partial n &= b_4 \\
\int_r^\infty \varphi_5(r) \cdot r^2 \cdot \partial r &= \psi_5(r) & \int_r^\infty \frac{\psi_5(r)}{r^2} \cdot \partial r &= X_5(r) \\
& & 2\pi C' \int_0^\infty X_5(n) \cdot \psi'(n) \cdot n \cdot \partial n &= b_5
\end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned}
\int \varphi_3(r) \cdot \partial M \cdot \partial m &= b_3 O \\
\int \varphi_4(r) \cdot \partial M \cdot \partial m' &= b_4 O' \\
\int \varphi_5(r) \cdot \partial M' \cdot \partial m' &= b_5 O''
\end{aligned}$$

Hier und in den folgenden Rechnungen werden Glieder vernachlässigt, welche sich auf die Grenzen der  $U$ - und  $O$ -Flächen beziehen, und welche als unmerkliche Größen von der Ordnung des Halbmessers der Molecularwirkungssphäre betrachtet werden.

Wir gehen zur Auswerthung des Integrals  $\frac{1}{2} \int \varphi_2(r) \cdot \partial m \cdot \partial m'$  über, in welchem sich die Integration über die der capillaren Oberfläche  $U'$  angränzenden Theilchen der beiden Flüssigkeiten erstreckt. Die Dichtigkeit ist in einer nnd derselben zur  $U$ -Fläche parallelen Schicht überall gleich und ändert sich nur von Schicht zu Schicht und von Flüssigkeit zu Flüssigkeit. Der Gang der Rechnung ist etwa folgender: Stellen  $AB$  (Fig. 10 Taf. I) ein Stück der  $U'$ -Fläche,  $CD$  und  $cd$  Elemente zweier zur  $AB$  parallelen und um  $n$  und  $n'$  von ihr abstehender Schichten der beiden Flüssigkeiten vor. Man berechne nun zuerst die Wirkung z. B. von  $CD$  auf

ein Element der Schichte  $cd$  und dehne hierauf die Integration über alle Schichten der obern und alle Elemente der untern Flüssigkeit aus. Setzt man:

$$\int_r^\infty \varphi_2(r) \cdot r \cdot \partial r = F_2(r), \quad \pi \int_0^\infty \int_0^\infty F_2(n+n') \cdot \psi(n) \cdot \psi'(n') \cdot \partial n \cdot \partial n' = b_2$$

so ist:

$$\frac{1}{2} \int \varphi_2(r) \cdot \partial m \cdot \partial m' = b_2 \cdot U'.$$

Bei den noch übrigen Integralen  $\frac{1}{2} \int \varphi(r) \cdot \partial m \cdot \partial m$  und  $\frac{1}{2} \int \varphi_1(r) \cdot \partial m' \cdot \partial m'$ , in denen sich die Integrationen über die gesammte Masse der beiden Flüssigkeiten erstrecken, erfolgt die Auswerthung gleichfalls auf eine und dieselbe Art. Hierbei wollen wir jedes Integral in zwei Theile theilen, von denen sich der eine auf den Theil der Flüssigkeiten mit der constanten Dichte, der andere auf das Flüssigkeitshäutchen bezieht.

Setzt man:

$$\begin{aligned} \int_r^\infty \varphi(r) \cdot r \cdot \partial r &= F(r) & \int_0^\infty F(r) \cdot \partial r &= h \\ \int_r^\infty \varphi_1(r) \cdot r \cdot \partial r &= F'(r) & \int_0^\infty F'(r) \cdot \partial r &= h', \end{aligned}$$

so sind die Werthe der ersten Theile unserer Integrale:

$$2\pi c^2 h V \text{ und } 2\pi c'^2 h' V'.$$

Obgleich wir die Dicke des Flüssigkeitshäutchens als unmerklich bezeichnet haben, so mag dieselbe doch vielmal gröfser als der Radius der Wirkungssphäre der Molecüle seyn; wir wollen sie mit  $\delta$  bezeichnen. Stelle  $AB$  (Fig. 11 Taf. I) ein Oberflächenelement der Flüssigkeit,  $C$  ein Massenelement des Flüssigkeitshäutchens, dessen Entfernung  $CD$  von  $AB$  gleich  $n$  sey,  $FGHI$  die Wirkungssphäre der Molecüle, und  $HJ$  eine zu  $AB$  parallele Schicht der Flüssigkeit vor, deren Abstand von  $AB$ :  $(n - \varepsilon)$  und deren Dichte eine Function von  $(n - \varepsilon)$  ist. Setzt man allgemein:

$$\int_{\epsilon}^{\infty} \varphi(r) \cdot r \cdot \partial r = F(\epsilon), \quad \int_{\epsilon}^{\infty} \varphi_1(r) \cdot r \cdot \partial r = F^*(r)$$

$$2\pi \left[ \int_0^{\infty} F(\epsilon) \cdot \psi(n+\epsilon) \cdot \partial \epsilon + \int_0^n F(\epsilon) \cdot \psi(n-\epsilon) \cdot \partial \epsilon \right] = 2\pi G(n)$$

$$\pi \int_0^{\delta} G(n) \cdot \psi(n) \cdot \partial n = a$$

$$2\pi \left[ \int_0^{\infty} F'(\epsilon) \cdot \psi'(n+\epsilon) \cdot \partial \epsilon + \int_0^n F'(\epsilon) \cdot \psi'(n-\epsilon) \cdot \partial \epsilon \right] = 2\pi G'(n)$$

$$\pi \int_0^{\delta} G'(n) \cdot \psi'(n) \cdot \partial n = b,$$

und nennt die Worte von  $a$  und  $b$  für die verschiedenen Partien der Flüssigkeitshäutchen:

bei der obern Flüssigkeit für:  $U : a$

„ „ „ „ „  $U' : a'$

„ „ „ „ „  $O : a''$

„ „ untern „ „  $U'' : b$

„ „ „ „ „  $U' : b'$

„ „ „ „ „  $O' : b''$

„ „ „ „ „  $O'' : b'''$

so sind die Werthe der zweiten Theile unserer Integrale folgende:

für die obere Flüssigkeit:  $a U + a' U' + a'' O$

„ „ „ „ „  $b U'' + b' U' + b'' O' + b''' O''$ .

Die Auswerthung der Integrale giebt demnach folgenden Ausdruck für  $W$ :

$$W = -g c \int z \partial V - g c' \int z \partial V' + 2\pi c^2 h V + 2\pi c'^2 h' V' + a U + [a' + b' + b_2] U' + b U'' + [b_3 + a''] O + [b_4 + b''] O' + [b_5 + b'''] O''.$$

Diesen Ausdruck wollen wir indefs noch so gestalten, daß darin nicht  $V$  und  $V'$  vorkommen; dieß geschieht durch **Elimination** von  $V$  und  $V'$  mittelst der folgenden zwei Gleichungen für die Massen der Flüssigkeiten  $M$  und  $M'$ :



für die obere Flüssigkeit:

$$M = Vc + U \int_0^\delta \psi(n) \cdot \partial n + U' \int_0^\delta \psi(n) \cdot \partial n + O \int_0^\delta \psi(n) \cdot \partial n.$$

für die untere Flüssigkeit:

$$M' = V'c' + U' \int_0^\delta \psi'(n) \cdot \partial n + U'' \int_0^\delta \psi'(n) \cdot \partial n + O' \int_0^\delta \psi'(n) \cdot \partial n \\ + O'' \int_0^\delta \psi'(n) \cdot \partial n.$$

Das Resultat der Elimination ist:

$$W - 2\pi chM - 2\pi c'h'M' = -gc \int z \partial V - gc' \int z \partial V' + \\ + U \left[ a - 2\pi ch \int_0^\delta \psi(u) \cdot \partial n \right] + \\ + U' \left[ a' + b' + b_2 - 2\pi ch \int_0^\delta \psi(n) \cdot \partial u - 2\pi c'h' \int_0^\delta \psi'(n) \cdot \partial n \right] + \\ + U'' \left[ b - 2\pi c'h' \int_0^\delta \psi'(n) \cdot \partial n \right] + O \left[ a'' + b_3 - 2\pi ch \int_0^\delta \psi(n) \cdot \partial n \right] \\ + O' \left[ b'' + b_4 - 2\pi c'h' \int_0^\delta \psi'(n) \cdot \partial n \right] + \\ + O'' \left[ b''' + b_5 - 2\pi c'h' \int_0^\delta \psi'(n) \cdot \partial n \right].$$

In diesem Ausdrücke dürfen die Integralglieder, obgleich die Integrale unmerkliche Größen von der Ordnung des Radius der Molecularwirkungssphäre sind, nicht vernachlässigt werden, da sie  $h$  und  $h'$  zu Factoren haben, welche wie Größen von der Ordnung

$$\frac{1}{\text{Radius der Molecularwirkungssphäre}}$$

betrachtet werden müssen.

Die Bedingung für das Gleichgewicht der beiden Flüssigkeiten ist uns in Gestalt eines schwierigen Problems dar-

gestellt, welches in die Variationsrechnung gehört. Bezeichnet man nämlich die Coëfficienten von  $[U, U', U'']$  der Reihe nach mit:  $H, H', H''$ , und die von  $[O, O', O'']$  mit  $F, F', F''$ , und mit  $\theta$  folgenden Ausdruck:

$$\theta = -g c \int z \partial V - g c' \int z \partial V' + H U + H' U' + H'' U'' \\ + F O + F' O' + F'' O'',$$

so muß für den Fall des Gleichgewichtes  $\delta\theta = 0$  seyn, und außerdem sind noch zwei Bedingungen analytisch zu erfüllen, die nämlich, dafs bei einer jeden Variation die Massen constant bleiben. Bei dem Geschäfte der Variation wollen wir uns einer kurzen und eleganten Methode bedienen, die von Bertrand herrührt und in Folgendem besteht.

Man kann sich die Variation der  $U$ -Flächen als aus zwei Theilen bestehend denken, einen, der sich auf die nahezu zu sich parallele Verschiebung der Oberflächenelemente, und einem andern, der sich auf den Umfang der Oberflächen bezieht. Sey  $\varepsilon$  eine zu sich parallele Verschiebung eines Oberflächenelementes in der Richtung seiner Normale. Dieses  $\varepsilon$  ändert sich von einem Oberflächenelement zum andern. Es möge  $\partial\omega$  das Oberflächenelement und  $(R, R')$  sein größter und kleinster Krümmungsradius heißen; alsdann ist

$$\delta\partial\omega = -\varepsilon\partial\omega \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right].$$

Stelle nun  $OO'$  (Fig. 12 Taf. I) eine  $U$ -Fläche, welche nach  $ab$  verschoben wurde, und  $Oa = \nu$  eine unendlich kleine Linie vor, welche, in der starren Wand liegend und senkrecht auf das Element des Umfanges der Schnittlinie  $P$  zwischen Wand und Flüssigkeit aufstehend, die Aenderung des Standes der Flüssigkeit an der Wand bestimmt. Heiße ferner der Randwinkel  $Oao$  in irgend einem Punkte der Schnittlinie  $\omega$ , und ein Element der Schnittlinie  $\partial P$ . Als dann ist der zweite Theil unserer Variation, der sich auf den Umfang der  $P$ -Linie bezieht:

$$\int \cos \omega . \nu . \partial P.$$



Demnach ist:

$$\begin{aligned}
 0 = \partial \theta = & \int \varepsilon \partial U \left[ -H \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) + g c Z \right] + \\
 & + \int \varepsilon' \partial U' \left[ -H' \left( \frac{1}{R'} + \frac{1}{R'_1} \right) + g (c' - c) Z' \right] + \\
 & + \int \varepsilon'' \partial U'' \left[ -H'' \left( \frac{1}{R''} + \frac{1}{R''_1} \right) + g c' Z'' \right] + \\
 & + \int \nu \cdot \partial P (F + H \cos \omega) + \int \nu' \partial P' [F' - F + H' \cos \omega'] + \\
 & + \int \nu'' \partial P'' [F'' + H'' \cos \omega''] + \int \nu''' \cdot \partial P''' [F''' + H'' \cos \omega'''].
 \end{aligned}$$

Werden hierzu folgende zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \int \varepsilon \partial U - \int \varepsilon' \partial U' &= 0 & \text{Factor } \lambda \\
 \int \varepsilon' \partial U' + \int \varepsilon'' \partial U'' &= 0 & \text{„ } \lambda'
 \end{aligned}$$

mit den Constanten  $(\lambda, \lambda')$  multiplicirt, addirt, welche die Bedingung enthalten, dafs bei einer Variation die Massen der Flüssigkeiten, oder mit Vernachlässigung unmerklicher Gröfsen die Volumina  $V$  und  $V'$  constant bleiben, so kann man in dem neuen Ausdrücke für  $\partial \theta$  alle  $\varepsilon$  und  $\nu$  als willkürlich betrachten, und die Gleichung  $\partial \theta = 0$  kann nur so erfüllt werden, dafs folgende Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
 -H \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) + g c Z &= \lambda & F + H \cos \omega &= 0 \\
 -H' \left( \frac{1}{R'} + \frac{1}{R'_1} \right) + g (c' - c) Z' &= \lambda' - \lambda & F' - F + H' \cos \omega' &= 0 \\
 -H'' \left( \frac{1}{R''} + \frac{1}{R''_1} \right) + g c' Z'' &= \lambda' & F'' + H'' \cos \omega'' &= 0 \\
 & & F'' + H'' \cos \omega''' &= 0
 \end{aligned}$$

Wählt man die Lage der  $(XV)$  so, dafs sie in das obere Niveau der Flüssigkeit ausserhalb des Haarröhrchens fällt, so ist  $\lambda' = 0$ . Dies sind die Gleichungen für die capillaren Oberflächen und für die beständigen Randwinkel, und sie stimmen der Form nach genau überein mit denen in der „Nouvelle théorie etc.“. Für den Fall einer einzigen Flüssigkeit im Haarröhrchen, deren Dichte  $c$  ist, wird die capillare Oberfläche, wenn ihre verticalen Ordinaten vom Niveau

der Flüssigkeit außerhalb des Haarröhrchens an gezählt werden, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$H\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) + g c Z = 0$$

und hier ist  $H$  folgender Ausdruck:

$$H = \pi \int_0^\delta \psi(n) \cdot \partial n \left[ \int_0^\infty F_\varepsilon \cdot \partial \varepsilon (\psi(n + \varepsilon) - 2c) + \right. \\ \left. + \int_0^n F(\varepsilon) \cdot \psi(n - \varepsilon) \cdot \partial \varepsilon \right]$$

welcher für den Fall einer constanten Dichte durch die ganze Masse der Flüssigkeit in folgenden übergeht:

$$H = -\pi c^2 \int_0^\infty dn \int_n^\infty F_\varepsilon \cdot \partial \varepsilon.$$

Dawidow hat für die obere Gränze  $n$  im zweiten Integrale in dem Ausdrucke für  $H$ , die Gränze  $\infty$  substituirt, so Glieder vernachlässigend, die sich auf die äußerste Schicht des Flüssigkeitshäutchens beziehen. Aber wenn diese Vernachlässigung auch unter der Hypothese einer raschen Dichtigkeitsabnahme gegen die freie Oberfläche zu erlaubt ist, so ist sie es nicht mehr unter der Annahme einer gleichmäßigen Dichte der Flüssigkeit und Dawidow hat Unrecht, wenn er behauptet, dafs für den Fall einer gleichmäßigen Dichte der Flüssigkeit durch ihre ganze Masse  $H = 0$  sey, und dafs es unter dieser Annahme alsdann keine Theorie der Capillarerscheinungen gebe.

---

In dieser kleinen Untersuchung soll gezeigt werden, auf welche kurze und elegante Weise, im Gegensatze zu den weitläufigen Rechnungen Poisson's, mittelst des Principe der virtuellen Bewegungen die Aufgabe über die Gröfse des Horizontaldrucks einer Flüssigkeit auf eine verticale Ebene gelöst wird.

Wir denken uns die zwischen den beiden unendlich langen, parallelen Ebenen über das äußere Niveau der Flüssig-

keit im Behälter aufstehende Flüssigkeitssäule  $ABCD$  (Fig. 13 Taf. I) sammt den beiden Ebenen  $CE$  und  $DF$  aus der Flüssigkeit herausgehoben und auf einen horizontalen Boden gestellt, so, daß in der gegenseitigen Lage der Ebenen und im Stande der Flüssigkeit sich nichts ändert. Die Wände  $CE$  und  $DF$  seyen wieder vertical und  $CE$  absolut unbeweglich,  $DF$  aber könne in einer horizontalen zu den Ebenen senkrechten Richtung hin- und hergeschoben werden, die wir zugleich als die  $X$ -Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems annehmen. Die verticale  $OY$  bilde die  $Y$ -Axe.

Die Flüssigkeit übt nun einen Druck oder Zug auf die Ebene  $DF$  aus, welchem für die Einheit der Länge der unendlich langen Ebene  $DF$  durch eine Kraft  $P$  das Gleichgewicht gehalten wird. Eine zweite horizontale Ordinate, parallel mit der Länge der Ebenen, braucht hier nicht berücksichtigt zu werden.

Bei einer Variation wird die Wand  $DF$  auf  $OX$  verschoben und die Flüssigkeit ändert ihren Stand. Wir nehmen nun an, bei einer Variation, die wir vornehmen, ändern sich nicht:  $AC = k'$  und  $BD = k$ . Es sey  $OC = X_1$ ,  $OD = X_0$ , und  $\omega$  der Randwinkel zwischen der Flüssigkeit und der starren Wand  $DF$ . Die Coordinaten eines Punktes der capillaren Oberfläche seyen  $XY$ , und hierbei soll bemerkt werden, daß  $X$  als Function von  $Y$  betrachtet und  $Y$  als vom Niveau der Flüssigkeit im Behälter ausgezählt gedacht wird; für den Fall des Gleichgewichtes der Flüssigkeit und der Wand  $DF$  muß:

$$\delta\theta = gc\delta\left[\int Y\partial V\right] + H\delta U + P.\delta X_0 = 0$$

und hier haben die Größen:  $g$ ,  $c$ ,  $V$ ,  $H$ ,  $U$  dieselbe Bedeutung wie in der vorigen Rechnung. Die Gleichung, welche die Bedingung enthält, daß bei einer Variation die Flüssigkeitsmasse constant bleibe, braucht hier nicht berücksichtigt zu werden, da die Constante, womit dieselbe multiplicirt zu  $\delta\theta$  addirt werden sollte, in unserm Falle, da nämlich die  $Y$  gleichsam vom Niveau der Flüssigkeit im Behälter gezählt erscheinen, gleich Null ist. Das nächste Geschäft

ist das der Bestimmung der Variationsausdrücke. Es ist nun:

$$\delta \left[ \int Y \partial V \right] = \frac{k^2}{2} \delta X_0 - \int_{X_1}^{X_0} Y \cdot dY \cdot \delta X$$

$$\delta U = \delta \left[ \int_{X_1}^{X_0} V [dX^2 + dY^2] \right] = \frac{dX \cdot \delta X}{\sqrt{dX^2 + dY^2}} \Big|_{X_1}^{X_0} -$$

$$- \int_{X_0}^{X_1} D_Y \left[ \frac{dX}{\sqrt{dX^2 + dY^2}} \right] \cdot dY \cdot \delta X$$

wobei zu bemerken ist, daß

$$\frac{dX \cdot \delta X}{\sqrt{dX^2 + dY^2}} \Big|_{X_1}^{X_0} = \sin \omega \cdot \delta X_0$$

ist. Demnach ist

$$\delta \theta = \left[ P + \frac{g^c}{2} k^2 + H \sin \omega \right] \delta X_0 -$$

$$- \int \left\{ D_Y \left[ \frac{dX}{\sqrt{dX^2 + dY^2}} \right] \cdot H + g^c Y \right\} \cdot \delta X \cdot dY = 0$$

und  $\delta \theta = 0$  wird nur dann erfüllt, wenn folgende Gleichungen bestehen:

$$P + \frac{g^c}{2} k^2 + H \sin \omega = 0$$

$$H D_Y \left[ \frac{dX}{\sqrt{dX^2 + dY^2}} \right] + g^c Y = 0.$$

Die zweite Gleichung von diesen ist die bekannte für die capillare Oberfläche. Die erste bestimmt die Wirkung der Flüssigkeit auf die Ebene  $DF$ . Die Gröfse  $H \sin \omega$  ist die Correction, welche Poisson an dem von Laplace für  $P$  aufgestellten Ausdruck

$$P + \frac{g^c}{2} k^2 = 0$$

angebracht hat.

---