

This article was downloaded by: [New York University]

On: 27 April 2015, At: 18:30

Publisher: Taylor & Francis

Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954 Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK



Scandinavian Actuarial Journal

Publication details, including instructions for authors and subscription information:

<http://www.tandfonline.com/loi/sact20>

über das Gauss'sche Fehlergesetz

Von J. W. Lindeberg ^a

^a Helsingfors

Published online: 22 Dec 2011.

To cite this article: Von J. W. Lindeberg (1922) über das Gauss'sche Fehlergesetz, Scandinavian Actuarial Journal, 1922:1, 217-234, DOI: [10.1080/03461238.1922.10405360](https://doi.org/10.1080/03461238.1922.10405360)

To link to this article: <http://dx.doi.org/10.1080/03461238.1922.10405360>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Taylor & Francis makes every effort to ensure the accuracy of all the information (the "Content") contained in the publications on our platform. However, Taylor & Francis, our agents, and our licensors make no representations or warranties whatsoever as to the accuracy, completeness, or suitability for any purpose of the Content. Any opinions and views expressed in this publication are the opinions and views of the authors, and are not the views of or endorsed by Taylor & Francis. The accuracy of the Content should not be relied upon and should be independently verified with primary sources of information. Taylor and Francis shall not be liable for any losses, actions, claims, proceedings, demands, costs, expenses, damages, and other liabilities whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with, in relation to or arising out of the use of the Content.

This article may be used for research, teaching, and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, redistribution, reselling, loan, sub-licensing, systematic supply, or distribution in any form to anyone is expressly forbidden. Terms & Conditions of access and use can be found at <http://www.tandfonline.com/page/terms-and-conditions>

Über das Gauss'sche Fehlergesetz.¹

Von J. W. Lindeberg (Helsingfors).

1. Das GAUSS'sche Fehlergesetz besagt bekanntlich, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der zufällige Fehler einer Beobachtung zwischen zwei Grenzen x_1 und x_2 ($> x_1$) liegt, durch das Integral

$$(1) \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx$$

gegeben ist, wo σ eine Konstante bedeutet, die von den Anordnungen bei der Beobachtung und vom Beobachter abhängt. Die Bedeutung dieses Gesetzes ist indessen nicht auf die Fehlertheorie beschränkt, sondern dasselbe spielt eine wichtige Rolle in mehreren Wissensgebieten, wo statistisches Material bearbeitet wird, besonders in der Biologie. Es ist deshalb sehr wünschenswert einen richtigen Einblick darin zu gewinnen, unter welchen Umständen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung von der genannten Art entsteht. GAUSS' eigene Herleitung stützt sich auf verschiedene Annahmen, die vielleicht in der Fehlertheorie plausibel sind, in anderen Gebieten aber keine Berechtigung haben, und dieselbe kann deshalb nicht einer allgemeinen Theorie zu Grunde gelegt werden.

Es gibt aber auch andere Herleitungen. Schon während der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts fing man an den Beobachtungsfehler als das Resultat einer grossen Anzahl von einander unabhängiger Ursachen anzusehen, und es wurde ver-

¹ Vortrag gehalten auf dem V. skandinavischen Mathematikerkongress in Helsingfors 1922.

sucht nachzuweisen, dass ein in dieser Weise entstandener Fehler dem GAUSS'schen Gesetze folgt. Da dieser Gesichtspunkt bei allen Erscheinungen, wo eine Annäherung an das GAUSS'sche Gesetz beobachtet worden ist, geltend gemacht werden kann, ist die Erklärung des Gesetzes unzweifelhaft auf diesem Grunde zu suchen. Wir wollen untersuchen, wie der mathematische Satz lautet, der zum Zwecke dieser Erklärung nachgewiesen werden muss.

Es bezeichne u die Summe einer Folge von Fehlern¹ u_1, u_2, \dots, u_n , die wir als von einander vollständig unabhängig voraussetzen. Wir führen die Annahme ein, dass der wahrscheinliche Wert oder der s. g. Mittelwert jedes Elementarfehlers Null ist. Diese Annahme enthält keine sachliche Einschränkung, bringt aber mit sich eine absehbare formale Vereinfachung des Problems. Aus derselben folgt, dass der Mittelwert des totalen Fehlers u auch Null ist.

Indem wir die Streuungen der Elementarfehler, d. h. die positiven Zahlen, deren Quadrate die wahrscheinlichen Werte von $u_1^2, u_2^2, \dots, u_n^2$ darstellen, mit $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ bezeichnen, führen wir weiter die Voraussetzung ein, dass

$$\sum_{\mu=1}^n \sigma_\mu^2 = 1,$$

woraus folgt, dass die Streuung der Summe u gleich 1 ist. Diese Annahme ist gleich wie die vorige von rein formaler Natur, denn sie kann immer realisiert werden durch passende Wahl der Einheit, in welcher die Fehler ausgedrückt sind.

Betreffs der weiteren Bedingungen, welche den Elementarfehlern auferlegt werden dürfen, ist vor Allem zu beachten, dass nur solche Voraussetzungen eingeführt werden, von welchen angenommen werden kann, dass sie in der Wirklichkeit erfüllt sind. Alle Annahmen, die eine Einschränkung der allgemeinen Natur der Elementarfehler enthalten, oder welche die relative Grösse der verschiedenen Fehler betreffen, scheinen hierbei bedenklich zu sein, denn in den meisten Fällen ist es

¹ Wir sprechen der Kürze halber nur von Fehlern, aber die Entwicklungen sind natürlich für Wahrscheinlichkeitsgrössen beliebiger Art gültig.

unmöglich sich über die hierhergehörigen Verhältnisse irgend eine Vorstellung zu machen. Dagegen scheinen die Annahmen, dass die Anzahl der Elementarfehler gross und die Wirkung jedes einzelnen Fehlers klein ist, in allen Fällen plausibel zu sein. Der Beweis muss also auf diese letzten Annahmen basiert werden.

Die Annahme, dass die Wirkung jedes Elementarfehlers klein ist, wird mathematisch am besten dadurch ausgedrückt, dass die sämtlichen Streuungen σ_μ klein vorausgesetzt werden. Da die Summe u ein endlicher Fehler mit der Streuung 1 sein soll, ist hierin schon die Voraussetzung enthalten, dass die Anzahl der Elementarfehler gross ist, und man könnte deshalb geneigt sein die genannte Annahme als einzige weitere Voraussetzung einzuführen. Es zeigt sich jedoch, dass die Kleinheit der Streuungen nicht genügt um eine Annäherung an das GAUSS'sche Gesetz zu sichern, denn es ist leicht Fehler mit beliebig kleinen Streuungen zu konstruieren, deren Summe die Streuung 1 hat, dem GAUSS'schen Gesetze aber gar nicht folgt.

Bei der hiernach nötigen Verschärfung der Voraussetzungen scheint es natürlich und am wenigstens bedenklich die Werte der Elementarfehler in der Weise begrenzt anzunehmen, dass sie sämtlich einem gewissen kleinen, den Nullpunkt enthaltenden Intervalle angehören müssen. Falls eine Annäherung an das Exponentialgesetz unter dieser Voraussetzung nachgewiesen werden kann, ist schon eine recht befriedigende Erklärung des häufigen Auftretens desselben erhalten, denn da die Wirkung jedes Elementarfehlers klein sein soll, ist es natürlich sich ihre möglichen Werte auch als klein vorzustellen. Wenn man früher von »kleinen Fehlern« sprach, dürfte man in der Tat gerade eine derartige Einschränkung gemeint haben. Wir sind hiermit dazu geführt den Satz, dessen Beweis gesucht werden muss, in folgender Weise zu formulieren:

Wenn die positive Zahl ε beliebig klein gegeben ist, kann eine positive Zahl η so bestimmt werden, dass, wie auch die Zahlen x_1 und x_2 gewählt sind, die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung

$$x_1 < u < x_2$$

durch das Integral

$$(2) \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

mit einem Fehler kleiner als ε gegeben wird, sobald die obere Grenze α der möglichen Absolutwerte der Elementarfehler kleiner ist als η .

Im Folgenden bezeichne ich diesen Satz als den Fundamentalsatz. Später werden wir sehen, dass derselbe erweitert werden kann. Er enthält aber schon in sich das Wesentliche der mathematischen Wahrheit, die dem hier in Frage stehenden Naturgesetz zu Grunde zu liegen scheint.

2. Ich will eine kurze Übersicht der früheren Behandlung der Frage geben.

Die älteren Beweise setzen im Allgemeinen voraus, dass die Summe u eine Fehlerfunktion besitzt, d. h. dass es eine Funktion $u(x)$ derart gibt, dass das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x) dx$$

die Wahrscheinlichkeit, dass u zwischen den Grenzen x_1 und x_2 fällt, darstellt. Von dieser Funktion $u(x)$ wird bewiesen, dass sie gleich der GAUSS'schen Exponentialfunktion ist, wenn die Anzahl der Elementarfehler sehr gross ist. Diese Beweise sind indessen sämtlich in hohem Grade mangelhaft und können nicht als eigentliche mathematische Beweise angesehen werden.

Von den in späterer Zeit gemachten exakten Untersuchungen beziehen sich auch einige auf die Fehlerfunktion $u(x)$ selbst, d. h. auf die Frage, unter welchen Bedingungen dieselbe sich der Exponentialfunktion nähert. Diese Frage hat aber ein ausschliesslich mathematisches Interesse. Bei allen direkten Beobachtungen der Grösse u ist man nämlich gezwungen, die erhaltenen Werte in Klassen endlichen Umfangs zu gruppieren, und selbst wenn es eine Fehlerfunktion gibt, ist bei der Prü-

fung der Theorie nur die Rede von Integralen dieser Funktion, die über endliche Intervalle erstreckt sind. Ausserdem kann offenbar eine Annäherung an das Exponentialgesetz im obigen Sinne nur unter sehr einschränkenden Voraussetzungen hinsichtlich der Elementarfehler stattfinden.

Die unvergleichlich grösste Bedeutung haben die Arbeiten, die das Problem in folgender Form in Angriff nehmen, die ihr Vorbild in der von LAPLACE herrührenden Behandlung einer Versuchsreihe hat, wo bei jedem Versuche die eine oder die andere von zwei Möglichkeiten mit gegebenen festen Wahrscheinlichkeiten auftreten kann.

Es sei u_1, u_2, u_3, \dots eine gegebene *unendliche* Reihe von bestimmten Fehlern mit den Mittelwerten Null und den Streuungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$, und es werde gesetzt

$$\sum_{\mu=1}^n \sigma_{\mu}^2 = r_n^2.$$

Es soll unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen bewiesen werden, dass die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung

$$(3) \quad r_n x_1 < \sum_{\mu=1}^n u_{\mu} < r_n x_2$$

mit unbegrenzt wachsendem n gleichförmig in Bezug auf x_1 und x_2 gegen das Integral (2) konvergiert.

Soweit ich weiss, ist TCHEBYCHEFF der erste, der in diesem Problem Resultate von grösserer Tragweite erhalten hat. Seine Untersuchungen, wo die s. g. Momentenmethode zur Anwendung kommt, wurden später von A. MARKOFF vervollständigt und berichtigt, und ich nenne deshalb dieses Problem das TCHEBYCHEFF-MARKOFF'sche Problem. Das von MARKOFF präzisierete Resultat ist das Folgende:

Wenn die wahrscheinlichen Werte der sämtlichen Potenzen u_{μ}^m , wo m jeden positiven ganzen Zahlwert annehmen kann, endlich sind und der Quotient $\frac{r_n^2}{n}$ mit wachsendem n sich nicht

dem Wert Null nähert, so ist die in Frage stehende Annäherung an das GAUSS'sche Gesetz gesichert.

Wenn man aus diesem Resultate einen Beweis des Fundamentalsatzes zu gewinnen versucht, kann man den folgenden Gedankengang einschlagen.

Es bezeichne $u_{\mu,n}$ den Fehler, der dadurch definiert ist, dass die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung $x_1 < u_{\mu,n} < x_2$ für alle Werte von x_1 und x_2 gleich der Wahrscheinlichkeit der Ungleichung $r_n x_1 < u_{\mu} < r_n x_2$ ist. Bezeichnen wir die Streuung des Fehlers $u_{\mu,n}$ mit $\sigma_{\mu,n}$, so ist

$$\sigma_{\mu,n}^2 = \frac{\sigma_{\mu}^2}{r_n^2}$$

und demnach

$$\sum_{\mu=1}^n \sigma_{\mu,n}^2 = 1,$$

woraus hervorgeht, dass die Fehler $u_{1,n}, u_{2,n}, \dots, u_{n,n}$ eine Folge von der Art, wovon im Fundamentalsatze die Rede ist, bilden.

Die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung

$$(4) \quad x_1 < \sum_{\mu=1}^n u_{\mu,n} < x_2$$

ist nun offenbar gleich der Wahrscheinlichkeit der Ungleichung (3), also nähert sich die erstgenannte Wahrscheinlichkeit dem Werte des Integrals (2), falls die soeben erwähnten Bedingungen erfüllt sind. Wir wollen nachsehen, was diese Bedingungen hinsichtlich der Fehlerfolge $u_{1,n}, u_{2,n}, \dots, u_{n,n}$ besagen.

Dass die wahrscheinlichen Werte der Potenzen der Fehler u_{μ} endlich sein sollen, bedeutet dass dasselbe mit den Fehlern $u_{\mu,n}$ der Fall sein soll. Diese Bedingung ist natürlich reichlich erfüllt, falls die Wertgebiete der Fehler $u_{\mu,n}$ derart begrenzt sind, wie von den im Fundamentalsatze betrachteten Elementarfehlern vorausgesetzt wurde. In diesem Punkte sind also die MARKOFF'sche Voraussetzungen allgemeiner. Die Be-

schränkung der Fehler $u_{\mu, n}$, die in der Annahme liegt, dass $\frac{\gamma_n^2}{n}$ mit wachsenden n nicht gegen Null geht, ist schwer genau zu formulieren; sie enthält aber offenbar eine Bedingung hinsichtlich der relativen Grösse der verschiedenen Streuungen $\sigma_{1, n}, \sigma_{2, n}, \dots, \sigma_{n, n}$. Schon aus diesem Grunde kann das TCHEBYCHEFF-MARKOFF'sche Resultat nicht zu einem Beweise des Fundamentalsatzes führen.

Aber wenn auch bewiesen werden könnte, was in der Tat nicht möglich ist, dass die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung (3), wie auch die Reihe u_1, u_2, u_3, \dots gewählt sein möge, sich dem Integrale (2) näherte, wäre der Fundamentalsatz damit dennoch nicht bewiesen. Ein solches Resultat würde nämlich nicht die Möglichkeit ausschliessen, dass die obere Grenze der möglichen Absolutwerte der Fehler $u_{1, n}, u_{2, n}, \dots, u_{n, n}$ beliebig klein wäre, obgleich n nicht gross genug wäre, damit die Wahrscheinlichkeit von (4) mit irgend einer gegebenen Grade von Genauigkeit durch das Integral (2) dargestellt sei. Das TCHEBYCHEFF-MARKOFF'sche Problem ist somit nicht mit der Aufgabe äquivalent, die für die Erklärung des GAUSS'schen Gesetzes gelöst werden muss.

Indessen hat LIAPOUNOFF in zwei Arbeiten aus den Jahren 1900 und 1901¹ das in Frage stehende Problem mittels einer Methode behandelt, die von derjenigen TCHEBYCHEFF's gänzlich abweicht, und hierbei Resultate erhalten, aus welchen ein Beweis des Fundamentalsatzes tatsächlich abgeleitet werden kann, obgleich LIAPOUNOFF nicht selbst diesen Schluss gezogen hat. In dem allgemeinen Satze, wo er seine Resultate zusammenfasst², gibt er zwar nur die allgemeineren Bedingungen an, unter welchen es ihm gelungen ist die Konvergenz gegen das Exponentialgesetz im TCHEBYCHEFF-MARKOFF'schen Sinne zu beweisen. An einer anderen Stelle derselben Arbeit³ teilt er aber eine Abschätzung des Approximationsgrades mit, auf Grund dessen man den folgenden Satz gewinnen kann:

¹ *Sur une proposition de la théorie des probabilités.* (Bull. de l'Acad. des sciences de St. Pétersbourg, V^e série, T. XIII.)

Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. (Mém. de l'Acad. des sciences de St. Pétersbourg, VIII^e série, T. XIII.)

² Seite 3 der zweiten der zitierten Abhandlungen. ³ Seite 18.

Es bezeichne \mathfrak{P} eine beliebige positive Zahl und die wahrscheinlichen Werte von $|u_1|^{2+\mathfrak{P}}, |u_2|^{2+\mathfrak{P}}, \dots$ mögen mit $k_1^{(2+\mathfrak{P})}, k_2^{(2+\mathfrak{P})}, \dots$ bezeichnet werden. Zu jedem positiven ε gehört dann eine nur von ε und \mathfrak{P} abhängige positive Zahl η derart, dass die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung (3) durch das Integral (2) mit einem Fehler kleiner als ε gegeben wird, sobald die Ungleichung

$$\frac{\sum_{\mu=1}^n k_{\mu}^{(2+\mathfrak{P})}}{r_n^{2+\mathfrak{P}}} < \eta$$

besteht.

Gehen wir hier zu den oben definierten Fehlerfolgen $u_{1,n}, u_{2,n}, \dots, u_{n,n}$ über und bezeichnen den wahrscheinlichen Wert von $|u_{\mu,n}|^{2+\mathfrak{P}}$ mit $k_{\mu,n}^{(2+\mathfrak{P})}$, erhalten wir als einzige Bedingung dafür, dass das Integral (2) die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung (4) mit einem Fehler kleiner als ε darstelle, die Ungleichung

$$\sum_{\mu=1}^n k_{\mu,n}^{(2+\mathfrak{P})} < \eta.$$

Die Tatsache, dass die Fehler $u_{\mu,n}$ als durch eine Art von Reduction aus den n ersten Fehlern einer unendlichen Reihe entstanden gedacht sind, enthält an und für sich keine Einschränkung derselben, und das Resultat kann deshalb auf die im Fundamentalsatze betrachtete Summe direkt angewandt werden.

Machen wir diese Anwendung unter der Annahme $\mathfrak{P} = 1$, so ergibt sich, indem wir den wahrscheinlichen Wert von $|u_{\mu}|^3$ mit $k_{\mu}^{(3)}$ bezeichnen, dass zu jedem ε eine positive Zahl η gehört derart, dass die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung $x_1 < u < x_2$ durch das Integral (2) mit einem Fehler kleiner

als ε dargestellt wird, sobald $\sum_{\mu=1}^n k_{\mu}^{(3)} < \eta$ ist. Nun ist aber

$$\sum_{\mu=1}^n k_{\mu}^{(3)} \leq \alpha \sum_{\mu=1}^n \sigma_{\mu}^2 = \alpha.$$

Nehmen wir an dass $\alpha < \eta$ ist, wird deshalb auch $\sum_{\mu=1}^n k_{\mu}^{(3)} < \eta$, und also ist mit dem obigen Resultate ein Beweis des Fundamentalsatzes gewonnen.

Es scheint, als ob LIAPOUNOFF selbst nicht die volle Bedeutung seiner Abschätzung des Approximationsgrades eingesehen hätte. Jedenfalls ist dieselbe von späteren Verfassern vollständig unbeachtet gelassen worden.

Noch sei eine neulich erschienene Arbeit des Herrn R. v. MISES¹ erwähnt, die zwar in der Hauptfrage bei viel engeren Resultaten als diejenige von LIAPOUNOFF stehen bleibt, die aber darin bemerkenswert ist, dass die Entwicklungen in aller Strenge konsequent an den Begriff der »Verteilung« knüpfen. Durch die Heranziehung dieses Begriffes, kombiniert mit der Benutzung der bekannten STIELTJES'schen Integraldefinition, wird es möglich Fehler von allgemeinsten Art vom Anfang an in einer einheitlichen Analyse mitzunehmen, was meines Wissens in strenger Weise früher nicht geschehen ist. Im Folgenden werden wir uns auch der genannten Begriffe bedienen.

Unter der zu einem Fehler gehörigen Verteilung wird die Funktion von x verstanden, deren Wert für jedes x die Wahrscheinlichkeit angibt, dass der Fehler kleiner oder gleich x sei. Sie ist also eine mit x monoton wachsende Funktion, die für $x = -\infty$ gleich Null und für $x = +\infty$ gleich 1 ist.

Wenn die zum Fehler u_{μ} gehörige Verteilung mit $U_{\mu}(x)$, bezeichnet wird, so sind die wahrscheinlichen Werte von u_{μ} und u_{μ}^2 durch die Stieltjes'sche Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dU_{\mu}(x) \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dU_{\mu}(x)$$

dargestellt. Die im Fundamentalsatze ausgesprochenen Voraussetzungen besagen also, dass das erste Integral für jedes μ gleich Null und die Summe der Werte des zweiten Integrals gleich 1 ist. Wenn $U(x)$ die zur Summe u gehörige Ver-

¹ *Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Mathematische Zeitschrift, Bd. 4.

teilung bezeichnet, kann der genannte Satz selbst so ausgesprochen werden:

Zu jedem positiven ε gehört eine positive Zahl η derart, dass für jedes x

$$(5) \quad \left| U(x) - \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| < \varepsilon$$

ist, sobald $\alpha < \eta$.

Der aus den Untersuchungen LIAPOUNOFF's unter denselben Voraussetzungen folgende Satz erhält wieder die folgende Form:

Zu jedem positiven ε gehört eine positive Zahl η derart dass die Ungleichung (5) stattfindet, sobald

$$\sum_{\mu=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2+\vartheta} dU_{\mu}(x) < \eta.$$

3. In einer in Annales Academiae Scientiarum Fennicae publizierten Arbeit habe ich diesen letztgenannten Satze im Falle $\vartheta = 1$ bewiesen und die daraus herfliessenden Folgerungen hervorgehoben. Zur Zeit der Abfassung dieser Arbeit hatte ich keine nähere Kenntniss der Arbeiten von LIAPOUNOFF. Da sowohl MARKOFF in seinem Lehrbuche der Wahrscheinlichkeitsrechnung als v. MISES in seiner schon erwähnten Abhandlung die Resultate von LIAPOUNOFF vollständig vernachlässigen, konnte ich nicht denken, dass diese so wesentlich über den von ihnen selber angeführten hinausgingen. Nachdem ich durch eine Arbeit des Herrn POLYA, wo er sagt, dass er vermittels einer anderen Methode zu einem ebenso umfassenden Resultate wie LIAPOUNOFF gelangt sei, veranlasst wurde die Arbeiten des letzteren näher zu studieren, habe ich die Frage auf's Neue aufgenommen und dabei gefunden, dass die von mir angewandte Methode durch eine unbedeutende Modifikation zu einem noch allgemeineren Resultate führt. Ich habe hierüber eine Arbeit verfasst, die in der Mathematischen Zeitschrift erscheinen wird. Mein Resultat, welches

das allgemeinste sein dürfte, das betreffs der Summe von unabhängigen Elementarfehlern überhaupt erreichbar ist, ist das folgende:

Zu jedem positiven ε gehört eine positive Zahl η derart, dass die Ungleichung (5) besteht, sobald

$$(6) \quad \int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^n \int_{-\tau}^{+\tau} x^2 dU_\mu(x) > 1 - \eta.$$

Da der Inhalt der hier auftretenden Bedingung nicht ohne weiteres deutlich sein dürfte, will ich versuchen denselben näher zu erklären.

Auf Grund unserer Voraussetzung

$$(7) \quad \sum_{\mu=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dU_\mu(x) = 1,$$

ist die im Integrale (6) auftretende Summe eine Funktion von τ , die von 0 bis 1 wächst, wenn τ von 0 bis $+\infty$ geht. Wenn die Bedingung (6) für ein kleines η erfüllt ist, sind also die Werte dieser Funktion schon für kleine Werte von τ nahezu gleich 1, d. h. der Wert 1 der Integralsumme (7) rührt grösstenteils aus den Integrationen in der nächsten Umgebung des Nullpunktes her. Dies bedeutet wiederum, dass der Hauptteil der Werte, die die Elementarfehler erhalten können, in der nächsten Nähe des Nullpunktes liegen.

Die in unserem Resultate liegende Erweiterung des Fundamentalsatzes kann hiernach als unbedeutend erscheinen, dieselbe hat jedoch eine gewisse Bedeutung als Verstärkung des Fundamentes des GAUSS'schen Gesetzes. In rein mathematischer Hinsicht knüpft sich an dieselbe ein absehbares Interesse. Es liegt nämlich aus mathematischem Gesichtspunkt gesehen etwas sehr unbefriedigendes in der Annahme, dass die Wertgebiete der Elementarfehler begrenzt sind, da ja die Fehler, die selbst dem Exponentialgesetze folgen und deren Summe schon bei endlicher Anzahl von Summanden demsel-

ben exakt folgt, hinsichtlich ihrer Wertgebiete nicht begrenzt sind. Diese Fehler sind nun in dem erhaltenen Satze mit begriffen.

Gegenüber dem oben genannten Satze, der aus den Untersuchungen LIAPOUNOFF's folgt, bedeutet der zuletzt angeführte Satz eine Erweiterung in der Beziehung, dass derselbe hinsichtlich des Verhaltens der Verteilungen $U_\mu(x)$ im Unendlichen nichts anderes verlangt, als was in der Annahme der Endlichkeit der Streuungen liegt. In diesem Punkte wenigstens ist der Satz abschliessend.

Ich muss indessen erwähnen, dass das Resultat, das ich mit meiner Methode erhalte, nicht in allen Hinsichten das bestmögliche ist. Ich kann nämlich hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen den im Fundamentalsatze auftretenden Zahlen ε und α nur das behaupten, dass ε wenigstens von der Kleinheitsordnung $\alpha^{1/4}$ ist, während aus den Untersuchungen LIAPOUNOFF's gefolgert werden kann, dass ε wenigstens von der Ordnung $\alpha |\log \alpha|$ ist.

4. Zum Schluss sei nun noch eine kurze Darstellung meiner Beweismethode gegeben. Sie scheint mir viel einfacher zu sein als diejenige LIAPOUNOFF's sowie alle anderen mir bekannten Methoden. Der Einfachheit halber werde ich hier nicht das allgemeinste Resultat sondern nur den Fundamentalsatz ableiten.

Zunächst leite ich die fundamentale Ungleichung ab, die meiner Methode zu Grunde liegt.

Mit $f(x)$ bezeichnen wir eine für alle reellen Werte von x erklärte Funktion, die den zwei folgenden Bedingungen genügt:

1:o. Sie ist nebst ihren Ableitungen bis auf der dritten Ordnung überall endlich und stetig.

2:o. Der absolute Betrag ihrer dritten Ableitung ist überall kleiner als eine gewisse positive Konstante k .

Wir bezeichnen noch mit $V(x)$ die Verteilung, die zu einem Fehler v mit dem Mittelwerte Null und der Streuung σ gehört. $V(x)$ ist somit eine Funktion, die den Gleichungen

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dV(x) = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x dV(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dV(x) = \sigma^2$$

genügt.

Wir betrachten die Funktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) dV(t).$$

Nach dem Lehrsatz von Taylor ist

$$f(x-t) = f(x) - f'(x)t + f''(x)\frac{t^2}{2} + \zeta(x, t)\frac{t^3}{6},$$

wo $|\zeta(x, t)| < k$. Wird diese Summe im obigen Integral eingeführt, erhalten wir mit Rücksicht auf (8)

$$F(x) = f(x) + \frac{f''(x)}{2} \sigma^2 + R,$$

wo

$$|R| < \frac{k}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^3 dV(x).$$

Dieses Resultat gilt insbesondere auch, falls v ein Fehler mit der Fehlerfunktion $\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ist. Setzen wir

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dt,$$

erhalten wir deshalb

$$\left| \Phi(x) - f(x) - \frac{f''(x)}{2} \sigma^2 \right| < \frac{2k\sigma^3}{3\sqrt{2\pi}},$$

und es ergibt sich somit für jeden Wert von x

$$|F(x) - \Phi(x)| < \frac{k}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^3 dV(x) + \frac{2k\sigma^3}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Nehmen wir an, dass das Wertgebiet des Fehlers v begrenzt ist, und bezeichnen wir mit α die obere Grenze der möglichen Absolutwerte dieses Fehlers, so ist offenbar

$$\sigma \leq \alpha, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^3 dV(x) \leq \alpha \sigma^2,$$

und die obige Ungleichung kann geschrieben werden

$$(9) \quad |F(x) - \Phi(x)| < k\alpha\sigma^2.$$

Diese ist die soeben erwähnte fundamentale Ungleichung.

Indem wir jetzt zur Hauptfrage übergehen, will ich noch ausdrücklich unsere Voraussetzungen hinsichtlich der Elementarfehler hervorheben. Diese sind folgende:

- 1:o. Die Fehler sind von einander vollständig unabhängig.
- 2:o. Ihre Mittelwerte sind Null und die Summe der Quadrate der Streuungen ist gleich 1.
- 3:o. Sie sind in der Weise begrenzt, dass die obere Grenze ihrer möglichen Absolutwerte kleiner ist als die Zahl α .

Indem wir wie vorher mit $U_1(x)$, $U_2(x)$, ..., $U_n(x)$ die zu den Elementarfehlern gehörigen Verteilungen verstehen, definieren wir zwei Funktionenfolgen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ und $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ..., $\Phi_n(x)$ durch die Gleichungen

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) dU_1(t), \quad \Phi_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}}}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} dt$$

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-t) dU_2(t), \quad \Phi_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(x-t) \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma_2^2}}}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} dt$$

.....

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{n-1}(x-t) dU_n(t), \quad \Phi_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{n-1}(x-t) \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma_n^2}}}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} dt.$$

Schreiben wir

$$F_1(x) = \Phi_1(x) + \mathcal{A}_1(x),$$

so gibt die Ungleichung (9) unmittelbar

$$|\mathcal{A}_1(x)| < k\alpha\sigma_1^2.$$

Wenn wir in den Ausdruck von $F_2(x)$ die Summe $\Phi_1(x) + \mathcal{A}_1(x)$ anstatt $F_1(x)$ einführen, erhalten wir

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(x-t) dU_2(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_1(x-t) dU_2(t).$$

Man findet leicht, dass die Funktion $\Phi_1(x)$ gleich wie alle folgenden Funktionen $\Phi_\mu(x)$ allen der Funktion $f(x)$ auferlegten Bedingungen erfüllen, und gemäss der Ungleichung (9) unterscheidet sich deshalb der Wert des ersten Integrals für jedes x von $\Phi_2(x)$ um weniger als $k\alpha\sigma_2^2$. Da das zweite Integral offenbar für jedes x dem absoluten Betrage nach kleiner oder höchstens gleich dem Maximalwert von $|\mathcal{A}_1(x)|$ ist, ergibt sich deshalb, indem wir

$$F_2(x) = \Phi_2(x) + \mathcal{A}_2(x)$$

setzen, die Ungleichung

$$|\mathcal{A}_2(x)| < k\alpha(\sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

In dieser Weise können wir weiter gehen und erhalten schliesslich

$$|F_n(x) - \Phi_n(x)| < k\alpha \sum_{\mu=1}^n \sigma_\mu^2 = k\alpha.$$

Infolge der Definition der Funktionen $\Phi_\mu(x)$ und der Au-

nehme $\sum_{\mu=1}^n \sigma_{\mu}^2 = 1$, ist indessen

$$\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt,$$

und da die Elementarfehler von einander unabhängig vorausgesetzt sind, hat man, wenn die zur Summe u der Elementarfehler gehörige Verteilung wie vorher mit $U(x)$ bezeichnet wird,

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) dU(t).$$

Die obige Ungleichung kann deshalb geschrieben werden

$$(10) \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) dU(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| < k\alpha.$$

Da x hier einen beliebigen Wert erhalten kann und die Funktion $f(x)$ innerhalb weiter Grenzen beliebig ist, geht schon

hieraus hervor, dass zwischen den Funktionen $U(x)$ und $\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ ein enger Zusammenhang besteht. Wir können aber aus der erhaltenen Ungleichung eine obere Grenze der linken Seite von (5) ableiten.

Wenn a eine genügend grosse numerische Konstante bezeichnet, ist es, welchen Wert auch α hat, möglich eine Funktion $g(x)$ mit den folgenden Eigenschaften zu definieren:

1:o. Sie ist gleich Null für $x < 0$ und gleich 1 für $x > a\alpha$.
 2:o. Wenn x von 0 bis $a\alpha$ wächst, so wächst die Funktion $g(x)$ von 0 bis 1 in der Weise, dass sie nebst ihren Ableitungen bis auf der dritten Ordnung überall endlich und stetig verbleibt.

3:o. Der absolute Wert der dritten Ableitung von $g(x)$ ist überall kleiner als $\alpha^{-\frac{3}{4}}$.

Führen wir in (10) $f(x) = g(x)$ und $k = \alpha^{-\frac{1}{2}}$ ein, so ergibt sich

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) dU(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| < \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

In gleicher Weise erhalten wir durch Einführung von $g(x + a\alpha^{\frac{1}{2}})$ anstatt $f(x)$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t + a\alpha^{\frac{1}{2}}) dU(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t + a\alpha^{\frac{1}{2}}) \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| < \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Auf Grund der Definition der Funktion $g(x)$ findet man leicht dass

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) dU(t) &\leq \int_{-\infty}^x dU(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t + a\alpha^{\frac{1}{2}}) dU(t), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt &< \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt < \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t + a\alpha^{\frac{1}{2}}) \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \end{aligned}$$

und

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t + a\alpha^{\frac{1}{2}}) \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| < \frac{a\alpha^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Durch Kombination dieser sämtlichen Ungleichungen ergibt sich schliesslich, wenn mit A eine neue numerische Konstante bezeichnet wird,

$$\left| U(x) - \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| < A\alpha^{\frac{1}{2}},$$

und mit diesem Ergebnisse ist der Fundamentalsatz bewiesen.

Es sei schliesslich erwähnt dass meines Wissens Herr v. Mises der einzige ist, der bisher in strenger Weise die

Frage des GAUSS'schen Gesetzes in mehreren Dimensionen behandelt hat. Er bleibt aber hier, gleich wie im eindimensionalen Falle, bei Resultaten stehen, die nicht zu dem Satze führen können, der dem Fundamentalsatze entspricht. Was meine Methode betrifft, ist sie im mehrdimensionalen Falle unter gleich allgemeinen Bedingungen durchführbar wie im Falle einer Dimension.