

Application des coordonnées elliptiques à la recherche des surfaces orthogonales.

(Par M. William Roberts à Dublin.)

1. Soit

$$(1.) \quad F(\varrho) + F_1(\mu) + F_{11}(\nu) = \alpha$$

l'équation d'une des trois séries de surfaces dont il s'agit, exprimée en coordonnées elliptiques, α étant un paramètre variable. Les quantités ϱ , μ , ν s'expriment, comme l'on sait, en x , y , z par les équations suivantes:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1.$$

Maintenant soit

$$P d\varrho + M d\mu + N d\nu = 0$$

la différentielle de (1.): il est clair que P , M , N sont des fonctions de ϱ , μ , ν respectivement, et toutes les surfaces qui appartiennent à ce système seront coupées orthogonalement par celles d'un autre système ayant pour équation différentielle totale

$$P' d\varrho + M' d\mu + N' d\nu = 0$$

pourvu qu'on ait

$$\frac{PP'(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)} + \frac{MM'(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} + \frac{NN'(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} = 0.$$

La condition qu'on vient d'écrire résulte des valeurs des éléments ds' , ds'' , ds''' des lignes de courbure des trois surfaces homofocales au point ϱ , μ , ν , savoir

$$ds' = d\varrho \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}},$$

$$ds'' = d\mu \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}},$$

$$ds''' = d\nu \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}.$$

On s'aperçoit sans difficulté qu'on satisfait à cette condition en faisant

$$PP' = \frac{1}{\varrho^2 - b^2}, \quad MM' = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \quad NN' = -\frac{1}{b^2 - \nu^2}$$

ou bien encore en faisant

$$PP' = \frac{1}{\varrho^2 - c^2}, \quad MM' = -\frac{1}{c^2 - \mu^2}, \quad NN' = -\frac{1}{c^2 - \nu^2}.$$

Par conséquent si l'on pose

$$u = \int \frac{d\varrho}{P(\varrho^2 - b^2)} + \int \frac{d\mu}{M(\mu^2 - b^2)} - \int \frac{d\nu}{N(b^2 - \nu^2)},$$

$$v = \int \frac{d\varrho}{P(\varrho^2 - c^2)} - \int \frac{d\mu}{M(c^2 - \mu^2)} - \int \frac{d\nu}{N(c^2 - \nu^2)}$$

et que l'on désigne par β et γ deux constantes arbitraires, les équations $u = \beta$, $v = \gamma$, $u + \beta v = \gamma$ représenteront trois systèmes dont chacun coupe orthogonalement le système donné (1.). Tous les systèmes de surfaces qui coupent orthogonalement le système donné s'obtiennent, comme on le trouvera aisément, en intégrant l'équation suivante aux différentielles partielles,

$$\frac{P(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)} - \frac{M(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial \varrho}{\partial \mu} - \frac{N(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial \varrho}{\partial \nu} = 0.$$

Mais on voit que cette équation a pour intégrale particulière $u + \beta v = \gamma$: cette intégrale renfermant deux constantes arbitraires, on sait que l'intégrale générale sera

$$\Phi(u, v) = 0,$$

Φ désignant une fonction arbitraire.

2. Nous nous proposons maintenant de déterminer les cas, où deux familles de surfaces, dont chacune est donnée par une relation linéaire entre u et v sont elles-mêmes mutuellement orthogonales. Afin de trouver les formes de P , M , N , qui conduisent au but proposé, faisons

$$u + fv = \beta, \quad u + gv = \gamma,$$

f et g étant des constantes, et supposons que les familles (β) et (γ) qui coupent orthogonalement le système (α) donné par l'équation (1.) s'entre-coupent aussi elles-mêmes à angles droits. Différentiant l'équation du système (β) en regardant β comme constante, on trouvera

$$\frac{d\varrho}{P} \left(\frac{\varrho^2 - \frac{c^2 + fb^2}{1+f}}{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)} \right) + \frac{d\mu}{M} \left(\frac{\frac{c^2 + fb^2}{1+f} - \mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} \right) + \frac{d\nu}{N} \left(\frac{\nu^2 - \frac{c^2 + fb^2}{1+f}}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)} \right) = 0.$$

7 *

Pareillement le système (γ) nous donnera

$$\frac{d\rho}{P} \left(\frac{\rho^2 - \frac{c^2 + gb^2}{1+g}}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} \right) + \frac{d\mu}{M} \left(\frac{\frac{c^2 + gb^2}{1+g} - \mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} \right) + \frac{d\nu}{N} \left(\frac{\nu^2 - \frac{c^2 + gb^2}{1+g}}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)} \right) = 0.$$

Maintenant posons .

$$\frac{c^2 + fb^2}{1+f} = \theta^2, \quad \frac{c^2 + gb^2}{1+g} = \lambda^2,$$

où il est très-important d'observer que les quantités θ et λ sont précisément les mêmes que M. Liouville a désignées par α et β dans son Mémoire intitulé: *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer*. Tome XII (première série) du Journal de Mathématiques pp. 418 et 420. Cela nous fera voir que, en égard aux remarques de M. Liouville, les équations des systèmes (β) et (γ) peuvent s'écrire de la manière suivante

$$\begin{aligned} \int \frac{l^2 d\rho}{P(\rho^2 - \lambda^2)} + \int \frac{m^2 d\mu}{M(\mu^2 - \lambda^2)} - \int \frac{n^2 d\nu}{N(\lambda^2 - \nu^2)} &= \beta, \\ \int \frac{l^2 d\rho}{P(\rho^2 - \theta^2)} - \int \frac{m^2 d\mu}{M(\theta^2 - \mu^2)} - \int \frac{n^2 d\nu}{N(\theta^2 - \nu^2)} &= \gamma, \end{aligned}$$

en mettant pour abréger

$$\begin{aligned} l^2 &= \frac{(\rho^2 - \theta^2)(\rho^2 - \lambda^2)}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}, \\ m^2 &= \frac{(\theta^2 - \mu^2)(\mu^2 - \lambda^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}, \\ n^2 &= \frac{(\theta^2 - \nu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}. \end{aligned}$$

La condition qui exprime l'orthogonalité mutuelle des systèmes (β) et (γ) est

$$(2.) \quad \frac{(\mu^2 - \nu^2)l^2}{P^2} - \frac{(\rho^2 - \nu^2)m^2}{M^2} + \frac{(\rho^2 - \mu^2)n^2}{N^2} = 0.$$

3. On satisfait évidemment à cette condition en faisant

$$\frac{l^2}{P^2} = \frac{m^2}{M^2} = \frac{n^2}{N^2},$$

ce qui ne peut avoir lieu que si chacune de ces quantités a la même valeur constante. Supposons donc

$$\frac{l}{P} = \frac{m}{M} = \frac{n}{N} = 1,$$

ce qui nous donnera le système triple de surfaces orthogonales que voici:

$$(3.) \quad \begin{cases} \int l d\rho + \int m d\mu + \int n d\nu = \alpha, \\ \int \frac{l d\rho}{\rho^2 - \lambda^2} + \int \frac{m d\mu}{\mu^2 - \lambda^2} - \int \frac{n d\nu}{\lambda^2 - \nu^2} = \beta, \\ \int \frac{l d\rho}{\rho^2 - \theta^2} - \int \frac{m d\mu}{\theta^2 - \mu^2} - \int \frac{n d\nu}{\theta^2 - \nu^2} = \gamma. \end{cases}$$

Ce système est précisément celui qui a été donné par M. *Liouville* dans sa Note *Sur un théorème de M. Chasles*, Journal de Mathématiques, cahier de Janvier 1851. Toutes les surfaces (α) sont parallèles entre elles, et elles ont pour lieux des centres de courbure deux surfaces homofocales du second degré, représentées par les constantes θ et λ . Les systèmes (β) et (γ) se composent des surfaces développables dont chacune est le lieu des normales menées à une surface (α) le long d'une de ses lignes de courbure, de sorte qu'à chaque ligne de courbure répond une surface (β) ou (γ).

En supposant que $\theta = c$, $\lambda = b$, les deux surfaces homofocales lieux des centres de courbure de (α) deviennent les coniques focales du système homofocal donné. Par conséquent dans ce cas les surfaces (α) sont celles que M. *Ch. Dupin* a considérées depuis longtemps. (Voir un article de *Hachette*, correspondance de l'école Polytechnique. Tome I, pg. 22.) La surface dont il s'agit, nommée *cyclide* par M. *Ch. Dupin*, est l'enveloppe d'une sphère qui se meut en touchant constamment trois sphères fixes. Dans ce cas particulier les équations (3.) prennent une forme très-simple, savoir:

$$\begin{aligned} \rho + \mu + \nu &= \alpha, \\ \frac{(\rho - b)(\mu - b)(b - \nu)}{(\rho + b)(\mu + b)(b + \nu)} &= \beta, \\ \frac{(\rho - c)(c - \mu)(c - \nu)}{(\rho + c)(c + \mu)(c + \nu)} &= \gamma. \end{aligned}$$

Les surfaces (α) sont des cyclides parallèles entre elles et les surfaces (β) et (γ) des cônes de révolution. Les sommets des cônes (β) sont rangés sur l'ellipse focale, tandis que leur base commune est l'hyperbole focale, les sommets des cônes (γ) au contraire se meuvent sur l'hyperbole focale, tandis que leur base commune est l'ellipse focale.

4. On satisfait encore à la condition (2.) de l'orthogonalité en posant

$$\rho^2 P^2 = l^2, \quad \mu^2 M^2 = m^2, \quad \nu^2 N^2 = n^2,$$

ce qui donne le système triple suivant de surfaces orthogonales:

$$(4.) \quad \begin{cases} \int \frac{l d\rho}{\rho} \pm \int \frac{m d\mu}{\mu} \pm \int \frac{n dv}{v} = \alpha, \\ \int \frac{l\rho d\rho}{\rho^2 - \lambda^2} \pm \int \frac{m\mu d\mu}{\mu^2 - \lambda^2} \mp \int \frac{nv dv}{\lambda^2 - v^2} = \beta, \\ \int \frac{l\rho d\rho}{\rho^2 - \theta^2} \mp \int \frac{m\mu d\mu}{\theta^2 - \mu^2} \mp \int \frac{nv dv}{\theta^2 - v^2} = \gamma. \end{cases}$$

Ce dernier système triple de surfaces mutuellement orthogonales n'a pas encore été considéré, que je sache. Aucune famille de surfaces parallèles ou développables ne s'y trouve comprise, ce qui le rend d'autant plus intéressant. Etudions-en avec un peu de détail quelques cas particuliers.

Supposons en effet que $\theta = c$, et que $\lambda < \mu > \nu$, et notre système deviendra

$$\begin{aligned} \int \frac{d\rho}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - \lambda^2}{\rho^2 - b^2}} \pm \int \frac{d\mu}{\mu} \sqrt{\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2 - b^2}} \pm \int \frac{dv}{v} \sqrt{\frac{\lambda^2 - v^2}{b^2 - v^2}} &= \alpha, \\ \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - \lambda^2)}} \pm \int \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - \lambda^2)}} \mp \int \frac{v dv}{\sqrt{(b^2 - v^2)(\lambda^2 - v^2)}} &= \beta, \\ \int \frac{\rho d\rho}{\rho^2 - c^2} \sqrt{\frac{\rho^2 - \lambda^2}{\rho^2 - b^2}} \mp \int \frac{\mu d\mu}{c^2 - \mu^2} \sqrt{\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2 - b^2}} \mp \int \frac{v dv}{c^2 - v^2} \sqrt{\frac{\lambda^2 - v^2}{b^2 - v^2}} &= \gamma. \end{aligned}$$

Dans ce cas l'équation du système (β), comme on s'en aperçoit sans difficulté, s'intègre algébriquement. Il n'en est pas de même des systèmes (α) et (γ). Mais cependant il est remarquable que les courbes d'intersection d'une surface (β) avec les surfaces qui appartiennent à l'une ou à l'autre des familles (α) et (γ), c'est à dire, les lignes de courbure des surface (β) sont algébriques. En effet l'équation différentielle du système (α) peut être mise sous la forme que voici:

$$\begin{aligned} &\frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - \lambda^2)}} \pm \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - \lambda^2)}} \pm \frac{v dv}{\sqrt{(b^2 - v^2)(\lambda^2 - v^2)}} \\ &- \lambda^2 \left\{ \frac{d\rho}{\rho \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - \lambda^2)}} \pm \frac{d\mu}{\mu \sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - \lambda^2)}} \pm \frac{dv}{v \sqrt{(b^2 - v^2)(\lambda^2 - v^2)}} \right\} = 0 \end{aligned}$$

et celle du système (γ) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} &\frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - \lambda^2)}} \pm \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - \lambda^2)}} \pm \frac{v dv}{\sqrt{(b^2 - v^2)(\lambda^2 - v^2)}} \\ &+ (c^2 - \lambda^2) \left\{ \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 - c^2) \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - \lambda^2)}} \mp \frac{\mu d\mu}{(c^2 - \mu^2) \sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - \lambda^2)}} \right. \\ &\quad \left. \mp \frac{v dv}{(c^2 - v^2) \sqrt{(b^2 - v^2)(\lambda^2 - v^2)}} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Cela nous fait voir que les lignes de courbure de la surface (on écrit maintenant α au lieu de β et *vice versa*) ayant pour équation

$$\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-\lambda^2)}} \pm \int \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} \pm \int \frac{\nu d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} = \alpha$$

sont données par ses intersections avec les deux familles de surfaces

$$\begin{aligned} \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-\lambda^2)}} \pm \int \frac{d\mu}{\mu \sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} \pm \int \frac{d\nu}{\nu \sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} &= \beta, \\ \int \frac{\rho d\rho}{(\rho^2-c^2) \sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-\lambda^2)}} \mp \int \frac{\mu d\mu}{(c^2-\mu^2) \sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} \\ \mp \int \frac{\nu d\nu}{(c^2-\nu^2) \sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} &= \gamma, \end{aligned}$$

dont les équations sont algébriques. Mais dans ce cas les surfaces (β) et (γ) ne sont pas orthogonales ni aux surfaces du système (α) ni entre elles.

Maintenant prenons les signes dans l'équation des surfaces (α) comme il suit:

$$\frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-\lambda^2)}} + \frac{\mu d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} - \frac{\nu d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} = 0.$$

Cette équation, étant intégrée, donne

$$\{\sqrt{\rho^2-b^2} + \sqrt{\rho^2-\lambda^2}\} \{\sqrt{\mu^2-b^2} + \sqrt{\mu^2-\lambda^2}\} \{\sqrt{b^2-\nu^2} + \sqrt{\lambda^2-\nu^2}\} = \alpha.$$

L'une des deux séries des lignes de courbure de la surface représentée par l'équation qu'on vient d'obtenir, sera donnée par ses intersections avec la famille de surfaces données par l'équation différentielle

$$\frac{d\rho}{\rho \sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-\lambda^2)}} + \frac{d\mu}{\mu \sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} - \frac{d\nu}{\nu \sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} = 0$$

qui, étant intégrée, donne

$$\{b\sqrt{\rho^2-\lambda^2} + \lambda\sqrt{\rho^2-b^2}\} \{b\sqrt{\mu^2-\lambda^2} + \lambda\sqrt{\mu^2-b^2}\} \{b\sqrt{\lambda^2-\nu^2} + \lambda\sqrt{b^2-\nu^2}\} = \beta\rho\mu\nu$$

et l'autre série proviendra de ses intersections avec les surfaces ayant pour équation différentielle

$$\frac{\rho d\rho}{(\rho^2-c^2) \sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-\lambda^2)}} - \frac{\mu d\mu}{(c^2-\mu^2) \sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} + \frac{\nu d\nu}{(c^2-\nu^2) \sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} = 0,$$

ce qui donne, en effectuant les intégrations,

$$\begin{aligned} &\{\sqrt{(c^2-b^2)(\rho^2-\lambda^2)} + \sqrt{(c^2-\lambda^2)(\rho^2-b^2)}\} \{\sqrt{(c^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)} + \sqrt{(c^2-\lambda^2)(\mu^2-b^2)}\} \\ &\quad \cdot \{\sqrt{(c^2-b^2)(\lambda^2-\nu^2)} + \sqrt{(c^2-\lambda^2)(b^2-\nu^2)}\} \\ &= \gamma \sqrt{(\rho^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}. \end{aligned}$$

En prenant les signes d'une manière différente, on en déduira que les lignes de courbure de la surface ayant pour équation

$$\frac{\{\sqrt{\varrho^2-b^2}+\sqrt{\varrho^2-\lambda^2}\}\{\sqrt{\mu^2-b^2}+\sqrt{\mu^2-\lambda^2}\}}{\sqrt{b^2-\nu^2}+\sqrt{\lambda^2-\nu^2}} = \alpha$$

seront données par ses intersections avec les deux familles de surfaces, représentées par les équations que voici :

$$\begin{aligned} \frac{\{b\sqrt{\varrho^2-\lambda^2}+\lambda\sqrt{\varrho^2-b^2}\}\{b\sqrt{\mu^2-\lambda^2}+\lambda\sqrt{\mu^2-b^2}\}}{b\sqrt{\lambda^2-\nu^2}+\lambda\sqrt{b^2-\nu^2}} &= \frac{\beta\varrho\mu}{\nu}, \\ \frac{\{\sqrt{(c^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}+\sqrt{(c^2-\lambda^2)(\varrho^2-b^2)}\}\{\sqrt{(c^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}+\sqrt{(c^2-\lambda^2)(\mu^2-b^2)}\}}{\sqrt{(c^2-b^2)(\lambda^2-\nu^2)}+\sqrt{(c^2-\lambda^2)(b^2-\nu^2)}} \\ &= \frac{\gamma\sqrt{(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}{\sqrt{c^2-\nu^2}}. \end{aligned}$$

Revenons maintenant sur notre système triple de surfaces orthogonales (4.).

Si l'on y fait $\theta = c$, $\lambda = b$, les équations différentielles deviendront

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{\varrho} \pm \frac{d\mu}{\mu} \pm \frac{d\nu}{\nu} &= 0, \\ \frac{\varrho d\varrho}{\varrho^2-b^2} \pm \frac{\mu d\mu}{\mu^2-b^2} \mp \frac{\nu d\nu}{b^2-\nu^2} &= 0, \\ \frac{\varrho d\varrho}{\varrho^2-c^2} \mp \frac{\mu d\mu}{c^2-\mu^2} \mp \frac{\nu d\nu}{c^2-\nu^2} &= 0. \end{aligned}$$

Nous ferons abstraction du cas, où tous les signes dans la première de ces équations sont positifs et où le système (α) se réduit à $\varrho\mu\nu = \alpha$, c'est à dire à une suite de plans parallèles au plan des yz . En prenant les signes d'une manière différente, on a le système triple suivant de surfaces mutuellement orthogonales :

$$\begin{aligned} \frac{\mu\nu}{\varrho} &= \alpha, \\ \frac{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{\varrho^2-b^2} &= \beta, \\ \frac{(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{\varrho^2-c^2} &= \gamma. \end{aligned}$$

Les équations des surfaces qui appartiennent au système qu'on vient d'obtenir peuvent s'écrire d'une manière qui mérite d'être signalée. En effet, en se rappelant les valeurs de x , y , z , exprimées en ϱ , μ , ν , savoir

$$\begin{aligned} bcx &= \varrho\mu\nu, \\ b\sqrt{c^2-b^2}y &= \sqrt{(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}, \\ c\sqrt{c^2-b^2}z &= \sqrt{(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}, \end{aligned}$$

on verra que le système triple dont il s'agit peut être présenté sous la forme suivante :

$$\frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{y}{\rho^2 - b^2} = \frac{1}{\beta}, \quad \frac{z}{\rho^2 - c^2} = \frac{1}{\gamma},$$

ρ étant une fonction de x, y, z , donnée par l'équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

Cette observation conduit à une construction géométrique des surfaces dont il s'agit. Voici le théorème qui en résulte.

Étant donnée une série d'ellipsoïdes homofocaux, soit un point pris arbitrairement sur l'un des axes, et considérons ce point comme le sommet de cônes circonscrits aux ellipsoïdes du système homofocal. Le lieu des courbes de contact sera une surface déterminée, et en faisant varier la position du sommet sur le même axe, on aura une série de surfaces renfermant un paramètre arbitraire. Pareillement deux autres systèmes, dont chacun contient une constante arbitraire, s'obtiennent de la même manière, en prenant des points, situés sur les deux autres axes, pour sommets de cônes circonscrits. Les surfaces qui appartiennent respectivement à ces trois systèmes, se coupent mutuellement, deux à deux, à angles droits.

De plus les courbes dans lesquelles ces trois familles de surfaces se coupent deux à deux (ou ce qui est la même chose leurs lignes de courbure) sont des cercles dont les plans sont perpendiculaires aux plans principaux. En effet rappelons-nous que α, β, γ représentent les distances au centre des sommets des cônes circonscrits mesurées respectivement suivant les axes des x, y et z . Soit O le centre et faisons $OA = \alpha, OB = \beta$: il est évident que l'intersection de la surface (α) avec la surface (β) sera le lieu des points (M) , dont un quelconque est situé sur l'un des ellipsoïdes homofocaux et jouit de la propriété que le plan tangent qui y touche l'ellipsoïde coupe les axes des x et des y respectivement aux deux points donnés A et B . D'après un théorème de M. Chasles la normale menée à l'ellipsoïde homofocal au point M perce le plan des xy dans un point P qui est le pôle de la droite AB par rapport à la conique focale située dans ce plan. Par conséquent le point P est donné. Abaissons donc de P une perpendiculaire PQ sur AB , et le lieu de M ou la ligne de courbure provenant de l'intersection de (α) avec (β) sera un cercle décrit avec PQ comme diamètre dans un plan perpendiculaire

à AOB. Pareillement on peut démontrer que les deux autres lignes de courbure (α, γ) et (β, γ) sont des cercles situés comme il a été dit ci-dessus.

Les équations en x, y, z des surfaces qui composent le système triple qu'on vient de considérer, sont

$$\begin{aligned}\frac{x}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha x - b^2} + \frac{z^2}{\alpha x - c^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\beta y + b^2} + \frac{y}{\beta} + \frac{z^2}{\beta y + b^2 - c^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\gamma z + c^2} + \frac{y^2}{\gamma z + c^2 - b^2} + \frac{z}{\gamma} &= 1.\end{aligned}$$

5. On satisfait encore à la condition (2.) de l'orthogonalité en faisant

$$P^2 = \frac{l^2}{h + k\rho^2}, \quad M^2 = \frac{m^2}{h + k\mu^2}, \quad N^2 = \frac{n^2}{h + kv^2},$$

h et k étant deux constantes quelconques, assujetties, bien entendu, aux conditions qu'exige l'emploi des coordonnées elliptiques. Ces valeurs fournissent la solution la plus générale possible, renfermant quatre constantes arbitraires h, k, θ, λ du problème que nous nous étions proposé dans le n° 2. Le système triple de surfaces orthogonales qui en résulte est donné par les équations :

$$\begin{aligned}\int \frac{l d\rho}{\sqrt{h + k\rho^2}} \pm \int \frac{m d\mu}{\sqrt{h + k\mu^2}} \pm \int \frac{n dv}{\sqrt{h + kv^2}} &= \alpha, \\ \int \frac{l\sqrt{h + k\rho^2}}{\rho^2 - \lambda^2} d\rho \pm \int \frac{m\sqrt{h + k\mu^2}}{\mu^2 - \lambda^2} d\mu \mp \int \frac{n\sqrt{h + kv^2}}{\lambda^2 - v^2} dv &= \beta, \\ \int \frac{l\sqrt{h + k\rho^2}}{\rho^2 - \theta^2} d\rho \mp \int \frac{m\sqrt{h + k\mu^2}}{\theta^2 - \mu^2} d\mu \mp \int \frac{n\sqrt{h + kv^2}}{\theta^2 - v^2} dv &= \gamma.\end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas particulier de ce dernier système, qu'on obtient en posant les constantes θ et λ respectivement égales à c et à b . Voici le système triple qui s'ensuit :

$$\begin{aligned}\int \frac{d\rho}{\sqrt{h + k\rho^2}} \pm \int \frac{d\mu}{\sqrt{h + k\mu^2}} \pm \int \frac{dv}{\sqrt{h + kv^2}} &= \alpha, \\ \int \frac{\sqrt{h + k\rho^2}}{\rho^2 - b^2} d\rho \pm \int \frac{\sqrt{h + k\mu^2}}{\mu^2 - b^2} d\mu \mp \int \frac{\sqrt{h + kv^2}}{b^2 - v^2} dv &= \beta, \\ \int \frac{\sqrt{h + k\rho^2}}{\rho^2 - c^2} d\rho \mp \int \frac{\sqrt{h + k\mu^2}}{c^2 - \mu^2} d\mu \mp \int \frac{\sqrt{h + kv^2}}{c^2 - v^2} dv &= \gamma.\end{aligned}$$

La famille des surfaces (α) est algébrique. En général les familles (β) et (γ) ne sont pas algébriques, mais en combinant leurs équations avec celle

du système (α) , on verra que les lignes de courbure des surfaces (α) sont situées sur des surfaces algébriques. En effet les équations différentielles des systèmes (β) et (γ) peuvent s'écrire respectivement comme il suit:

$$(h+kb^2)\left(\frac{d\rho}{(\rho^2-b^2)\sqrt{h+k\rho^2}}\pm\frac{d\mu}{(\mu^2-b^2)\sqrt{h+k\mu^2}}\mp\frac{dv}{(b^2-v^2)\sqrt{h+kv^2}}\right) \\ +k\left(\frac{d\rho}{\sqrt{h+k\rho^2}}\pm\frac{d\mu}{\sqrt{h+k\mu^2}}\pm\frac{dv}{\sqrt{h+kv^2}}\right)=0,$$

$$(h+kc^2)\left(\frac{d\rho}{(\rho^2-c^2)\sqrt{h+k\rho^2}}\mp\frac{d\mu}{(c^2-\mu^2)\sqrt{h+k\mu^2}}\mp\frac{dv}{(c^2-v^2)\sqrt{h+kv^2}}\right) \\ +k\left(\frac{d\rho}{\sqrt{h+k\rho^2}}\pm\frac{d\mu}{\sqrt{h+k\mu^2}}\pm\frac{dv}{\sqrt{h+kv^2}}\right)=0.$$

Par conséquent l'une des deux espèces des lignes de courbure d'une surface appartenant au système (α) est donnée par l'intersection de la surface en question avec la famille de surfaces ayant pour équation différentielle

$$\frac{d\rho}{(\rho^2-b^2)\sqrt{h+k\rho^2}}\pm\frac{d\mu}{(\mu^2-b^2)\sqrt{h+k\mu^2}}\mp\frac{dv}{(b^2-v^2)\sqrt{h+kv^2}}=0,$$

tandis que l'autre espèce des lignes de courbure est donnée par l'intersection avec les surfaces représentées par l'équation différentielle

$$\frac{d\rho}{(\rho^2-c^2)\sqrt{h+k\rho^2}}\mp\frac{d\mu}{(c^2-\mu^2)\sqrt{h+k\mu^2}}\mp\frac{dv}{(c^2-v^2)\sqrt{h+kv^2}}=0,$$

et ces deux équations ont des intégrales algébriques.

Supposons maintenant que $h=a^2$, $k=-1$, et l'on aura pour l'équation différentielle de la famille (α)

$$\frac{d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}+\frac{d\mu}{\sqrt{a^2-\mu^2}}+\frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}=0,$$

ce qui nous donnera

$$\arcsin\left(\frac{\rho}{a}\right)+\arcsin\left(\frac{\mu}{a}\right)+\arcsin\left(\frac{v}{a}\right)=\arcsin\left(\frac{\alpha}{a}\right),$$

d'où l'on déduit pour l'équation algébrique en coordonnées elliptiques de la famille (α)

$$a^2(\rho^2+\mu^2+v^2)^2-4(a^2-\alpha^2)(\rho^2\mu^2+\rho^2v^2+\mu^2v^2)+4a\rho\mu v(\rho^2+\mu^2+v^2+\alpha^2) \\ -2a^2\alpha^2(\rho^2+\mu^2+v^2)+4\rho^2\mu^2v^2-8a^2a\rho\mu v+a^2\alpha^4=0.$$

Les lignes de courbure de cette surface sont données par ses intersections avec les deux familles de surfaces ayant pour équations différentielles

$$\frac{d\rho}{(\rho^2-b^2)\sqrt{a^2-\rho^2}} + \frac{d\mu}{(\mu^2-b^2)\sqrt{a^2-\mu^2}} - \frac{d\nu}{(b^2-\nu^2)\sqrt{a^2-\nu^2}} = 0,$$

$$\frac{d\rho}{(\rho^2-c^2)\sqrt{a^2-\rho^2}} - \frac{d\mu}{(c^2-\mu^2)\sqrt{a^2-\mu^2}} - \frac{d\nu}{(c^2-\nu^2)\sqrt{a^2-\nu^2}} = 0,$$

d'où l'on déduit les équations suivantes de ces familles:

$$\frac{\{\sqrt{a^2-b^2}\rho-b\sqrt{a^2-\rho^2}\}\{\sqrt{a^2-b^2}\mu-b\sqrt{a^2-\mu^2}\}\{\sqrt{a^2-b^2}\nu-b\sqrt{a^2-\nu^2}\}}{\{\sqrt{a^2-b^2}\rho+b\sqrt{a^2-\rho^2}\}\{\sqrt{a^2-b^2}\mu+b\sqrt{a^2-\mu^2}\}\{\sqrt{a^2-b^2}\nu+b\sqrt{a^2-\nu^2}\}} = \beta,$$

$$\frac{\{\sqrt{a^2-c^2}\rho-c\sqrt{a^2-\rho^2}\}\{\sqrt{a^2-c^2}\mu-c\sqrt{a^2-\mu^2}\}\{\sqrt{a^2-c^2}\nu-c\sqrt{a^2-\nu^2}\}}{\{\sqrt{a^2-c^2}\rho+c\sqrt{a^2-\rho^2}\}\{\sqrt{a^2-c^2}\mu+c\sqrt{a^2-\mu^2}\}\{\sqrt{a^2-c^2}\nu+c\sqrt{a^2-\nu^2}\}} = \gamma.$$

On obtient facilement l'équation en x, y, z des surfaces qui composent la famille (α) dans le cas qu'on vient de considérer. La voici:

$$a^2(x^2+y^2+z^2+b^2+c^2-\alpha^2)^2-4(a^2-\alpha^2)(b^2+c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2+b^2c^2) \\ +4abcx(x^2+y^2+z^2+b^2+c^2+\alpha^2-2a^2)+4b^2c^2x^2=0.$$

En y faisant $a=\alpha$, on retombe sur le cas des cyclides dont il a été question dans le n° 3.

Collège de la Trinité. Dublin, le 5 Janvier 1863.