SUR LA THÉORIE DES GROUPES

ET DES

SURFACES ALGÉBRIQUES;

par M. **Émile Picard**, à Paris.

Adunanza del 23 giugno 1895.

Dans mes recherches sur les fonctions algébriques de deux variables indépendantes (Journal de Mathématiques, 1889), je me suis occupé des surfaces admettant un groupe fini et continu de transformations birationnelles. Cette question se rattache à l'étude des groupes algébriques en même temps qu'à la théorie des équations différentielles; c'est ce que j'ai montré succinctement (Comptes Rendus, 28 avril 1890) dans une Note où j'ai étudié certaines équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, et j'ai indiqué plus récemment (Comptes Rendus, 25 mars 1895) comment les considérations que j'avais précédemment développées conduisaient immédiatement à une proposition générale sur les groupes algébriques. Il m'a semblé qu'il y avait quelque intérêt à rassembler ces résultats un peu épars; c'est que je me propose de faire ici.

I.

1. Rappelons d'abord une proposition bien connue dans la théorie des groupes continus. Soit un groupe relatif à n lettres $x_1, x_2, \dots x_n$

et dépendant de r paramètres

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

On suppose que toutes les substitutions du groupe sont deux à deux *échangeables*; dans ces conditions on peut choisir les paramètres a, de telle sorte que les équations donnant les x' en fonctions des a soient de la forme

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \xi_{ik}(x'_1, x'_2, \ldots x'_n) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots r \end{pmatrix},$$

les ξ dépendant seulement des x.

2. Ceci posé, nous allons établir un théorème général sur les équations de la forme

$$(1) \qquad f(y, y', \ldots y^{(m)}) = 0,$$

en désignant par $y, y', \ldots y^{(m)}$ une fonction de x et ses dérivées jusqu'à l'ordre m; l'équation différentielle ne renferme pas explicitement la variable x. Considérons une intégrale y de cette équation, qui soit uniforme dans une certaine région du plan R, et soit R' une région du plan intérieure à R. Le point x étant dans R', le point $x + h$ sera dans R, si la constante h est suffisamment petite; soient alors

$$Y, Y', \ldots Y^{(m)}$$

les valeurs de $y, y', \ldots y^{(m)}$ quand on y remplace x par $x + h$. Il est clair que les Y sont fonctions des y et de h, sans que x entre explicitement dans ces expressions. Posons donc

$$\begin{aligned} Y &= F(h, y, y', \ldots y^{(m)}), \\ Y' &= F_1(h, y, y', \ldots y^{(m)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y^{(m)} &= F_m(h, y, y', \ldots y^{(m)}); \end{aligned}$$

les Y sont des fonctions bien déterminées de y et inversement. Nous allons étudier le cas où *cette transformation biuniforme entre*

$$y,\ y',\ \ldots\ y^{(m)} \quad \text{et} \quad Y,\ Y',\ \ldots\ Y^{(m)}$$

serait birationnelle.

Dans les fractions rationnelles F, mettons comme coefficients de $y, y', \ldots y^{(m)}$ des constantes indéterminées, et écrivons que Y est une solution de l'équation (1). Nous obtiendrons ainsi un certain nombre de relations algébriques entre ces constantes; celles-ci s'exprimeront alors rationnellement en fonction d'un certain nombre n de paramètres liés par une relation algébrique. Désignons ces paramètres par $x_1, x_2, \ldots x_n$ et par

$$S(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n) = 0 \tag{2}$$

la relation algébrique à laquelle ils satisfont. Quand dans une solution de l'équation (1), correspondant à des valeurs arbitraires des paramètres $x_1, x_2, \ldots x_n$, on change x en $x + h$, les paramètres $x_1, x_2, \ldots x_n$ se changent en $X_1, X_2, \ldots X_n$, ceux-ci étant des fonctions rationnelles de ceux-là. Ceci revient à dire que la *surface* algébrique S représentée par l'équation (2) admet un groupe de transformations birationnelles en elle-même dépendant d'un paramètre arbitraire h, et pour $h = 0$, cette transformation devient la transformation identique. Ce groupe sera déterminé par des équations de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_{0i}(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n),$$

les ξ étant des fonctions rationnelles des x.

3. Je représente par

$$\begin{aligned}
X_1 &= f_1(h,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n),\\
X_2 &= f_2(h,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_n &= f_n(h,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n)
\end{aligned} \tag{3}$$

(les f étant rationnelles en $x_1, x_2, \ldots x_n$) la substitution birationnelle transformant S en elle-même. Dans les fractions rationnelles f, mettons encore comme plus haut des lettres indéterminées comme coefficients des x. Nous considérons le groupe de transformations contenu dans la substitution précédente, *dépendant du plus grand nombre possible de paramètres et tel que toutes ses transformations soient deux à deux échangeables*. Ce groupe, que nous désignons par G, dépend au moins d'un paramètre, puisqu'il contiendra manifestement la substitution (3); de plus, si r désigne le nombre des paramètres, les coefficients des x dans la transformation pourront être regardés comme des fonctions *rationnelles* de $r+1$ paramètres liés par une relation *algébrique*. Ceci résulte de ce que les relations à écrire entre les lettres indéterminées, figurant comme coefficients, sont toutes algébriques, puisque nous envisageons le groupe contenant le plus grand nombre possible d'arbitraires.

On peut d'autre part, d'après le n° 1, choisir les paramètres que nous désignerons par

$$h, h_1, \ldots h_{r-1}$$

de manière que le groupe G soit défini par les équations :

$$\frac{\partial X_i}{\partial h} = \xi_{0i}(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial h_k} = \xi_{ki}(X_1, X_2, \ldots X_n) \quad (k = 1, 2, \ldots r-1);$$

le premier de ces paramètres, désigné par h, ne sera autre que le paramètre h qui figurait dans (3), et les ξ_0 sont les fonctions rationnelles écrites à la fin du n° 2; tous les ξ sont d'ailleurs des fonctions rationnelles des X, qui, bien entendu, satisfont à la relation

$$S(X_1, X_2, \ldots X_n) = 0.$$

Deux circonstances peuvent se présenter relativement au groupe G. Il peut être possible de faire correspondre au moyen d'une substitution du groupe un point arbitraire de la surface S à un autre point de cette surface, c'est-à-dire que le groupe peut être $n - 1$ fois transitif; ou bien au contraire la transitivité de G sera d'ordre inférieur à $n - 1$. Mais il est aisé de voir que ce second cas se ramène au premier, car on pourra alors détacher dans S une multiplicité *algébrique* d'un moindre nombre de dimensions, que laisseront invariable les substitutions de G, et tel qu'un point quelconque de cette multiplicité pourra correspondre à un autre par une substitution de ce groupe.

Supposons donc G transitif de la manière indiquée; le nombre r sera alors au moins égal à $n - 1$, et si, portant son attention sur les variables $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$ (la dernière X_n étant fonction des autres) on considère le tableau rectangulaire

$$\begin{matrix} \xi_{0,1} & \xi_{0,2} & \ldots & \xi_{0,n-1} \\ \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \ldots & \xi_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{r-1,1} & \xi_{r-1,2} & \ldots & \xi_{r-1,n-1} \end{matrix} \qquad r \overline{>} n - 1$$

tous les déterminants formés avec les $n - 1$ colonnes verticales et $n - 1$ des lignes horizontales ne seront pas identiquement nuls, et il y aura alors nécessairement au moins un de ces déterminants, où figure la première ligne, qui ne sera pas identiquement nul. Nous pouvons donc supposer que le déterminant formé par les $n - 1$ colonnes et les $n - 1$ premières lignes n'est pas identiquement nul. On a ainsi les équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned} dX_1 &= \xi_{0,1}\, dh + \xi_{1,1}\, dh_1 + \ldots + \xi_{n-2,1}\, dh_{n-2} \\ dX_2 &= \xi_{0,2}\, dh + \xi_{1,2}\, dh_1 + \ldots + \xi_{n-2,2}\, dh_{n-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dX_{n-1} &= \xi_{0,n-1}\, dh + \xi_{1,n-1}\, dh_1 + \ldots + \xi_{n-2,n-1}\, dh_{n-2} \end{aligned}$$

qui définissent

$$X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_{n-1}$$

en fonction de

$$h, h_1, \ldots h_{n-2}.$$

En résolvant les équations précédentes par rapport à $d h_1$, $d h_2, \ldots d h_{n-2}$, on aura

$$(4)\quad \begin{aligned} dh &= P_{1,1}\, dX_1 + P_{1,2}\, dX_2 + \ldots + P_{1,n-1}\, dX_{n-1}, \\ dh_1 &= P_{2,1}\, dX_1 + P_{2,2}\, dX_2 + \ldots + P_{2,n-1}\, dX_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dh_{n-2} &= P_{n-1,1}\, dX_1 + P_{n-1,2}\, dX_2 + \ldots + P_{n-1,n-1}\, dX_{n-1}, \end{aligned}$$

où les P sont des fonctions rationnelles de $X_1, X_2, \ldots X_n$, la dernière de ces lettres étant liée aux autres par la relation $S = 0$. Les conditions d'intégrabilité sont évidemment vérifiées, et ***nous avons donc à faire l'inversion d'un système d'intégrales de différentielles totales relatives à la surface*** $S = 0$.

Or les X sont des fonctions *uniformes* de $h_1, h_2, \ldots h_{n-2}$, ayant pour toutes les valeurs finies de ces variables le caractère de fonctions rationnelles. Montrons-le, par exemple, pour la variable h; il suffit de répéter un mode de raisonnement classique dans la théorie des fonctions abéliennes : les relations (3) permettent d'étendre de proche en proche les fonctions d'une manière uniforme.

Nous pouvons donc conclure que les X sont des fonctions abéliennes (ou dégénérescences) des h, et en particulier de la variable h qui nous intéresse particulièrement; nous entendons par fonction abélienne d'une variable, ce que devient une fonction abélienne d'un certain nombre d'arguments, quand on laisse constants tous les arguments moins un seul qui devient la variable.

Si maintenant nous revenons à l'équation (1), on voit que les coefficients de $y, y', \ldots y^{(m)}$ dans les relations

$$\begin{aligned} Y &= F(h, y, y', \ldots y^{(m)}), \\ Y' &= F_1(h, y, y', \ldots y^{(m)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y^{(m)} &= F_m(h, y, y', \ldots y^{(m)}) \end{aligned}$$

seront des fonctions abéliennes (ou dégénérescences) de h. Si nous considérons, non pas x, mais h comme la variable, nous pouvons dire que Y est une fonction abélienne de h, et par suite y est une fonction abélienne de x.

Nous énoncerons donc le théorème suivant qui résume cette analyse :

Sous les hypothèses faites, l'intégrale générale de l'équation (1) *s'exprime à l'aide des transcendantes de la théorie des fonctions abéliennes.*

Au lieu de l'équation différentielle (1), on pourrait évidemment considérer le système d'équations différentielles du premier ordre :

$$(\Sigma) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

avec la relation algébrique $S(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$. Si on a

$$x_i(t+h) = f_i\,(h, x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

les f_i étant rationnelles en $x_1, x_2, \ldots x_n$, les intégrales du système (Σ) s'expriment à l'aide des transcendantes de la théorie des fonctions abéliennes.

4. J'indiquerai une conséquence de cette proposition. Soit une équation

$$f(y, y', \ldots y^{(m)}) = 0$$

dont on sait que l'intégrale générale s'exprime à l'aide d'une intégrale particulière quelconque par la formule

$$Y = R(y, y', \ldots y^{(m)}, a_1, a_2, \ldots a_m),$$

R dépendant rationnellement des y et les m lettres a représentant des constantes arbitraires.

Il est d'abord immédiat que l'intégrale générale de l'équation sera uniforme, puisque, dans le voisinage de tout point, Y peut s'exprimer rationnellement à l'aide d'une intégrale particulière y que l'on peut supposer uniforme autour de ce point. Ensuite, les conditions supposées dans le théorème précédent seront certainement vérifiées, car on peut prendre pour Y, ce que devient y quand on remplace x par $x+h$; il en résulte que *l'intégrale générale de l'équation ci-dessus pourra s'exprimer à l'aide des fonctions abéliennes ou de leurs dégénérescences.*

II.

5. Le théorème du n° 3 était relatif aux équations différentielles. En changeant, pour ainsi dire, seulement la forme de cette proposition, on obtient une propriété générale des groupes algébriques. Prenons une *surface* algébrique dans un espace à n dimensions

$$S(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

et supposons que cette surface admette un groupe G continu et fini de transformations birationnelles. J'envisage un des sous-groupes finis à *un* paramètre contenu dans G; ce sous-groupe sera défini par un système d'équations de la forme

$$(S) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

les X étant rationnels en $x_1, x_2, \ldots x_n$. Puisque ce sous-groupe fait partie du groupe G, le système (S) jouit de la propriété indiquée pour le système (Σ) à la fin du n° 3, et nous pouvons dire par suite que, *dans les équations finies du sous-groupe précédent, les coefficients sont des fonctions uniformes du paramètre arbitraire s'exprimant à l'aide des transcendantes de la théorie des fonctions abeliennes.*

Nous pouvons opérer ainsi pour chacun des sous-groupes à un paramètre contenu dans G, et on arrive alors au théorème général suivant :

Si le groupe G est à r paramètres, on peut s'arranger de manière que les coefficients des fonctions rationnelles de x, qui donnent le groupe, soient des fonctions uniformes des r paramètres s'exprimant au moyen *des transcendantes de la théorie des fonctions abéliennes ou de leurs dégénérescences.*

6. Nous pouvons faire, relativement au groupe G, une distinction importante, sur laquelle nous avons déjà eu à insister au n° 3. Le groupe G peut ou non permettre de faire correspondre à un point arbitraire de la surface S un autre point quelconque de cette même surface.

Dans le premier cas, le groupe est au moins $n-1$ fois transitif, et en faisant varier $n-1$ des paramètres on obtiendra une représentation paramétrique de la surface. Il en résulte que *les coordonnées d'un point quelconque de la surface*

$$S(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$

s'exprimeront par des fonctions abéliennes de $n-1$ *paramètres.*

Dans le second cas, le groupe G sera nécessairement un sous-groupe d'un groupe Γ de transformations birationnelles de la surface, pour lequel les paramètres pourront être regardés comme entrant *algébriquement*. Si ce groupe Γ (qui peut coïncider avec G) est au moins $n-1$ fois transitif, nous sommes ramenés au cas précédent. Dans le cas contraire, par chaque point de la surface passe une multiplicité algébrique, contenue dans S, et d'ordre inférieur à $n-1$. Cette multiplicité jouira de la propriété qu'avait S dans le premier cas, c'est-à-dire que, *si elle est à* r *dimensions, les coordonnées de ses points s'expriment par des fonctions abéliennes de* r *paramètres.* Il est important de remarquer que les MODULES *de ces fonctions abéliennes ne dépendent pas du point de la surface qui détermine la multiplicité;* ceci résulte de ce que les expressions des coordonnés peuvent être obtenues en faisant varier seulement, parmi les paramètres de Γ, r d'entre eux qu'on peut supposer être des arguments de fonctions abéliennes formées comme il a été dit au n° 5, et par conséquent tout-à-fait indépendantes du point de la surface déterminant la multiplicité qui nous occupe.

7. Le théorème du n° 5 s'applique en particulier aux groupes

de substitutions de Cremona. Si, en désignant m lettres indépendantes par $x_1, x_2, \ldots x_m$, on a entre les x et les X la substitution birationnelle

$$\begin{aligned} X_1 &= R_1(x_1, x_2, \ldots x_m, a_1, a_2, \ldots a_r) \\ X_2 &= R_2(x_1, x_2, \ldots x_m, a_1, a_2, \ldots a_r) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m &= R_m(x_1, x_2, \ldots x_m, a_1, a_2, \ldots a_r) \end{aligned}$$

formant un groupe a r paramètres, il résulte immédiatement, de ce qui précède, que l'on peut toujours s'arranger de façon que *les R soient des fonctions uniformes des a s'exprimant par les transcendantes abéliennes.*

On pourra dans certains cas aller plus loin. Si le groupe est m fois transitif, et si ses substitutions sont échangeables deux à deux, les transcendantes qui s'introduisent dans les calculs résultent simplement de l'inversion d'intégrales de différentielles totales *rationnelles*. Par conséquent, h désignant un des paramètres, on obtiendra seulement, par l'inversion, des fonctions rationnelles de h ou de e^{kh}, en désignant par k une constante. On pourra alors s'arranger de manière que les R contiennent *rationnellement* les paramètres a.

8. Appliquons les généralités qui précèdent à la surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

dans l'espace à trois dimensions. Nous allons retrouver et compléter les propositions que nous avons données autrefois.

Supposons que cette surface admette un groupe de transformations birationnelles. Tout d'abord si le groupe permet de passer d'un point quelconque de la surface à un autre point quelconque de celle-ci, on est assuré que *les coordonnées d'un point de la surface s'expriment par des fonctions abéliennes (ou dégénérescences) de deux paramètres.*

Il faut approfondir davantage la question. Considérant un sous-groupe à un paramètre contenu dans le groupe donné, nous raisonnerons comme nous l'avons fait plus haut d'une manière générale et nous sommes conduits à une transformation de la surface en elle-même, dépendant rationnellement des lettres $X_1, X_2, \ldots X_n$ qui sont elles-mêmes fonctions de paramètres $h, h_1, \ldots h_{r-1}$ (par les nos 2 et 3). Nous avons ainsi la transformation birationnelle de f en elle-même

$$X = f(h, h_1, \ldots h_{r-1}, x, y, z),$$
$$Y = \varphi(h, h_1, \ldots h_{r-1}, x, y, z),$$
$$Z = \psi(h, h_1, \ldots h_{r-1}, x, y, z),$$

les substitutions de ce groupe étant deux à deux échangeables. Si ce groupe est deux fois transitif, on pourra résoudre par rapport à deux des paramètres, et, d'après ce que nous avons vu au n° 3, les cordonnées d'un point quelconque de la surface s'exprimeront par des fonctions abéliennes de deux paramètres *au moyen* de l'inversion de *deux intégrales de différentielles totales*; c'est le résultat que j'ai obtenu antérieurement (Journal de Mathématiques, 1889, page 222).

Si le groupe Γ ne permet pas de passer d'un point quelconque de la surface à un autre point, on pourra faire passer par chaque point de la surface une courbe algébrique que le groupe transformera en elle-même. Cette courbe sera par suite nécessairement du genre *zéro* ou du genre *un*. On peut laisser constants tous les paramètres sauf un seul, et considérer par exemple h comme seul variable.

Dans le cas où la courbe sera de genre *un*, X, Y, Z devront être des fonctions doublement périodiques de h, et il est clair que le module de cette courbe est fixe, c'est-à-dire indépendant de (x, y, z). *Nous avons donc, dans ce second cas, un faisceau de courbes de genre zéro ou un sur la surface;* il passe par chaque point de la surface une courbe de ce faisceau. C'est un théorème que j'ai également indiqué précédemment (loc. cit.) et j'ai montré qu'on pouvait même aller plus loin quand le genre géométrique de la surface dépasse l'unité.

Le seul cas dont l'étude, d'après ce qui précède, n'est pas entièrement complète est celui où la surface admet un groupe de transformations qui ne permet pas de passer d'un point quelconque de la surface à un autre point de celle-ci, et où en même temps la surface a son genre géométrique au plus égal à *un*. Quand ces deux conditions se trouvent remplies, j'énonce seulement que l'on peut trouver sur la surface un faisceau de courbes de genre zéro ou un, mais j'ai tout lieu de penser que les travaux récents de M. Castelnuovo et de M. Enriques sur la théorie des surfaces permettront de donner des indications plus précises sur la nature de la surface.

Paris, le 5 juin 1895.

ÉM. PICARD.