Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen.

Von **A. Tauber** in Wien.

Ist $\sum_{1}^{\infty} a_\nu$ irgend eine convergente Reihe, so müssen die Größen a_ν den folgenden 2 Bedingungen Genüge leisten: Erstens muss (nach einem Abel'schen Satze), wenn ρ eine positive Größe kleiner als 1 bedeutet, die Function $\sum_{1}^{\infty} a_\nu \rho^\nu$ von ρ für $\lim \rho = 1$ einen Grenzwert besitzen und zweitens muss (nach einem Satz von Kronecker)[1]

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu = 0$$

sein. Umgekehrt aber darf weder daraus, dass $\lim_{\varrho=1} \sum_{1}^{\infty} a_\nu \rho^\nu$ existiert, noch daraus, dass $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \nu a_\nu = 0$ ist, auf die Convergenz der Reihe $\sum_{1}^{\infty} a_\nu$ geschlossen werden. Wenn dagegen beide Bedingungen zugleich erfüllt sind, so convergiert $\sum_{1}^{\infty} a_\nu$, sodass also der Satz zu beweisen ist:

Damit irgend eine Reihe $\sum_{1}^{\infty} a_\nu$ convergiert, ist erforder-
(*A*) lich und hinreichend, dass gleichzeitig $\lim_{\varrho=1} \sum_{1}^{\infty} a_\nu \rho^\nu$ existiert und dass $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \nu a_\nu = 0$ ist.

Wir beweisen den Satz (*A*) zunächst für den Fall, dass $\lim \nu a_\nu = 0$ ist, in der folgenden Form:

---

[1]) Kronecker, Comptes rendus, T. 103, pag. 980.

(B) Sind $b_1, b_2, \ldots$ irgendwelche die Bedingung $\lim \nu b_\nu = 0$ erfüllende Größen, und ist $\lim\limits_{\varrho=1} \sum\limits_1^\infty b_\nu \rho^\nu$ gleich einer bestimmten endlichen Größe A, so convergiert $\sum\limits_1^\infty b_\nu$ und hat A zur Summe.

Setzen wir, um dies zu zeigen, $\psi(\rho) = \sum\limits_1^\infty b_\nu \rho^\nu$, ferner $|b_\nu| = \beta_\nu$ und nennen τ_n die obere Grenze der Größen

$$(n+1)\beta_{n+1}, \quad (n+2)\beta_{n+2}, \ldots,$$

so ist

$$\psi\left(1-\frac{1}{n}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu$$

und

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu\right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \beta_\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu < \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\nu}{n} \beta_\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu$$

$$< \frac{\tau_n}{n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu < \tau_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$< \tau_n,$$

daher erhält man, wenn ϑ eine Größe ist, deren Betrag kleiner als 1 ist,

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu - \psi\left(1-\frac{1}{n}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu\right] + \vartheta \tau_n.$$

Offenbar ist

$$0 < 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu \leqq \frac{\nu}{n} \quad \text{für } \nu \geqq 1$$

und deshalb

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu\right]\right| < \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu \beta_\nu}{n}$$

$$\left|\sum_1^n b_\nu - \psi\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu\right| < \frac{1}{n} \sum_1^n \nu\beta_\nu + \tau_n.$$

Für $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu\beta_\nu = 0$ wird aber sowohl τ_n als $\frac{1}{n}\sum\limits_1^n \nu\beta_\nu$ mit wachsendem n beliebig klein, somit resultiert die zu beweisende Gleichung

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty}\left[\psi\left(1-\frac{1}{n}\right)-\sum_1^n b_\nu\right]=0.$$

Neben dem Satz (B) besteht auch noch der folgende: Sind $b_1, b_2, \ldots.$ irgendwelche die Bedingung $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu b_\nu = 0$ erfüllende Größen, und bezeichnet man $\sum b_\nu \rho^\nu$ mit $\psi(\rho)$, so ist

$$(2) \qquad \lim_{\rho=1}\left[(1-\rho)\psi'(\rho)\right]=0.$$

Setzt man nämlich in

$$(3) \qquad (1-\rho)\psi'(\rho)=(1-\rho)\sum_1^\infty \nu b_\nu \rho^{\nu-1}$$

$$\rho = 1-\frac{1}{n+\Theta} \quad (0 \leqq \Theta < 1),$$

so ist

$$\left|(1-\rho)\sum_1^n \nu b_\nu \rho^{\nu-1}\right| \leqq \left|(1-\rho)\sum_1^n \nu \beta_\nu \rho^{\nu-1}\right| < \frac{1}{n}\sum_1^n \nu\beta_\nu$$

$$\left|(1-\rho)\sum_{n+1}^\infty \nu b_\nu \rho^{\nu-1}\right| \leqq (1-\rho)\sum_{n+1}^\infty \nu \beta_\nu \rho^{\nu-1} < (1-\rho)\tau_n \sum_{n+1}^\infty \rho^{\nu-1}$$
$$< \tau_n \rho^n,$$

wenn wieder τ_n die obige Bedeutung hat; somit nähert sich die rechte Seite in (3) für $\lim \rho = 1$ der Null.

Seien jetzt irgendwelche Größen $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ vorgelegt, und mit Hilfe derselben die Größen b_ν definiert durch

$$(4) \qquad b_\nu = \frac{a_1+2a_2+\cdots+\nu a_\nu}{\nu(\nu+1)}, \quad \nu \geqq 1.$$
$$b_0 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$(5) \qquad a_\nu = (\nu+1)b_\nu - (\nu-1)b_{\nu-1} \qquad \nu \geqq 1$$

$$\sum_1^n a_\nu = \sum_1^n (\nu+1)b_\nu - \sum_1^n (\nu-1)b_{\nu-1}$$

$$= (n+1)b_n + \sum_1^{n-1}(\nu+1)b_\nu - \sum_1^n (\nu-1)b_{\nu-1},$$

und daher ist

$$\sum_{1}^{n} a_\nu = (n+1)\, b_n + \sum_{1}^{n-1} b_\nu. \tag{6}$$

Zwischen den beiden Functionen

$$\varphi(\rho) = \sum_{1}^{\infty} a_\nu \rho^\nu$$

$$\psi(\rho) = \sum_{1}^{\infty} b_\nu \rho^\nu$$

besteht wegen der Gleichungen

$$\begin{aligned}\varphi(\rho) = \sum_{1}^{\infty} a_\nu \rho^\nu &= \sum_{1}^{\infty} [(\nu+1)\, b_\nu - (\nu-1)\, b_{\nu-1}]\, \rho^\nu \\ &= \sum_{1}^{\infty} (\nu+1)\, b_\nu \rho^\nu - \sum_{1}^{\infty} \nu\, b_\nu \rho^{\nu+1} \\ &= \sum_{1}^{\infty} b_\nu \rho^\nu + \sum_{1}^{\infty} \nu\, b_\nu \rho^\nu (1-\rho)\end{aligned}$$

der Zusammenhang

$$\varphi(\rho) - \psi(\rho) = \rho\,(1-\rho)\, \psi'(\rho), \tag{7}$$

und der Satz (A) beweist sich nun folgendermaßen: Erfüllen die Größen a_ν die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \nu\, a_\nu = 0,$$

so besitzen die durch (4) definierten Größen b_ν die Eigenschaft $\lim\limits_{\nu=\infty} (\nu+1)\, b_\nu = 0$ oder

$$\lim_{\nu=\infty} \nu\, b_\nu = 0;$$

ist aber $\lim \nu\, b_\nu = 0$, so folgt aus (2), dass

$$\lim_{\varrho=1} [(1-\rho)\, \psi'(\rho)] = 0,$$

d. h. dass nach (7)

$$\lim_{\varrho=1} [\varphi(\rho) - \psi(\rho)] = 0 \tag{8}$$

ist. Weil ferner der Voraussetzung nach $\lim\limits_{\varrho=1} \varphi(\rho)$ eine endliche bestimmte Größe A sein sollte, so muss nach (8) auch $\lim\limits_{\varrho=1} \psi(\rho) = A$ sein, und demnach gemäß dem Satze (B) die Reihe $\sum b_\nu$ convergieren und A zur Summe haben. Und endlich folgt aus der Convergenz von $\sum b_\nu$ und $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu b_\nu = 0$, dass nach (6) auch $\sum a_\nu$ convergiert und A zur Summe hat.