

3. 1. Über die Ausbreitung scherender Deformationen in Flüssigkeiten; von R. Reiger.

1. *Einleitung.* — Eine ideale Flüssigkeit¹⁾ wird in der Regel definiert als ein Körper, dem wohl Volum-, aber keine Gestaltselastizität zukommt. Daß die natürlichen Flüssigkeiten keine idealen in diesem Sinne sind, darauf weist die Reaktion einer strömenden Flüssigkeit bei einer rein scherenden Deformation hin, die Erscheinung der inneren Reibung. Die übliche Theorie, die im folgenden nach dem Vorgang von L. Natanson als die klassische bezeichnet werden soll, trägt dieser Erscheinung Rechnung, indem sie eine Kraft einführt, die dem Geschwindigkeitsgefälle proportional ist. Eine andere Auffassungsweise²⁾ sieht die Flüssigkeit als ein elastisches Medium an, das einer Relaxation unterworfen ist.

In einer früheren Arbeit³⁾ habe ich mitgeteilt, daß bei zähflüssigen Kolophonium-Terpentinölgemischen der Nachweis einer elastischen Reaktion durch Schwingungsbeobachtungen möglich ist. Ich habe versucht, diesen Weg auch bei wirklichen Flüssigkeiten einzuschlagen. Es zeigt sich jedoch, daß in diesem Falle durch Erscheinungen der Oberflächenspannung und speziell durch die mitunter sehr beträchtliche Elastizität verunreinigter Oberflächen Störungen auftreten. Die Oberflächenerscheinungen spielen übrigens auch bei zähflüssigen Substanzen eine Rolle, so daß es häufig schwierig ist, zu ent-

1) Eine Zusammenstellung der verschiedenen Definitionen des Flüssigkeitsbegriffes findet sich bei O. Lehmann, *Flüssige Kristalle*, Leipzig 1904. p. 86 ff.

2) S. D. Poisson, *Journ. de l'École Polytechn.* XX. Heft. p. 139. 1831; J. Cl. Maxwell, *Phil. Mag.* (4) 35. p. 133. 1868; L. Natanson, *Zeitschr. f. physik. Chemie* 38. p. 690. 1901; 39. p. 355; 40. p. 581. 1902; S. Zaremba, *Krak. Anz.* p. 380 u. 594. 1903.

3) R. Reiger, *Physik. Zeitschr.* 8. p. 537. 1907.

scheiden, durch welche von beiden Erscheinungen die elastische Reaktion bedingt ist.

Eine Möglichkeit der experimentellen Entscheidung zwischen den oben erwähnten Theorien ergibt sich bei der Fortpflanzung und Absorption scherender Deformationen in Flüssigkeiten, da für diesen Fall ein prinzipieller Unterschied zwischen den beiden Theorien vorhanden ist.

Wird der Oberfläche einer Flüssigkeit eine periodische Deformation erteilt, etwa durch eine schwingende Platte, so breitet sich die Deformation im Inneren der Flüssigkeit aus entsprechend der Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

im Falle der klassischen Theorie der inneren Reibung. Im Falle der Relaxationstheorie tritt an deren Stelle die Gleichung:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{N}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}.$$

Dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit, ρ die Dichte, N der Scherungsmodul, T die Relaxationszeit und $\eta = NT$ der Reibungskoeffizient. Die X -Achse steht senkrecht zur Oberfläche der Flüssigkeit.

Die beiden Differentialgleichungen sind die der *Leitung* und die der *Strahlung mit Absorption*. Die Ausbreitung einer scherenden Deformation im Inneren einer Flüssigkeit erfolgt im ersten Falle nach denselben Gesetzen, nach denen eine periodische Temperaturänderung sich in das Erdinnere fortpflanzt, im zweiten Falle nach den Gesetzen der Lichtbewegung in absorbierenden Medien, die keine Dispersion infolge von Resonanzschwingungen von Ionen besitzen.

Der erste Fall der Flüssigkeitsbewegung wurde theoretisch von Lamb¹⁾, der zweite von Natanson²⁾ behandelt. Es findet sich dort auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die im folgenden als Absorptionskoeffizient bezeichnete Größe durch

1) H. Lamb, Lehrb. d. Hydrodynamik. Vgl. ferner O. E. Meyer, Crelles Journ. 59. p. 229. 1861; Th. S. Schmidt, Wied. Ann. 16. p. 633. 1882.

2) L. Natanson, Zeitschr. f. physik. Chemie 40. p. 581. 1902. Vgl. ferner C. Zakrzewski, Krak. Ber. p. 235. 1902.

Schwingungsdauer und die Konstanten der Differentialgleichung ausgedrückt.¹⁾ Im folgenden soll jedoch, wie dies in der Metalloptik üblich ist, von den aus den Differentialgleichungen folgenden Beziehungen zwischen diesen Größen ausgegangen werden, da diese den charakteristischen Unterschied zwischen den beiden Theorien deutlicher erkennen lassen, und die Beziehungen in dieser Form sich für den Verlauf der Untersuchung als wesentlich erweisen werden.

Experimentelle Untersuchungen der Flüssigkeitsbewegung von diesem Gesichtspunkte aus liegen meines Wissens noch nicht vor.

2. *Die Fundamentalgleichungen.* — Nimmt man an, daß die durch die schwingende Platte erregte Bewegung der Flüssigkeit sich in *Form einer ebenen Welle in einem unbegrenzten Medium* ausbreite, dann hat man

$$\omega = \omega_0 e^{-\beta x} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

zu setzen. Dabei ist die Schwingungsdauer τ ²⁾ durch die Periode der schwingenden Platte bestimmt, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v und der Absorptionskoeffizient β die die Wellenbewegung im Medium charakterisierenden Größen darstellen. Diese beiden Größen sollen im folgenden zum Zweck der Prüfung der Theorie experimentell ermittelt werden.

Setzt man den Wert oben³⁾ für ω in die Differentialgleichung (1) bzw. (2) ein, so ergeben sich für die klassische Theorie der inneren Reibung die beiden Fundamentalgleichungen

$$(3) \quad \frac{2\eta}{\rho} = \frac{v}{\beta},$$

$$(4) \quad \frac{2\pi}{\tau} = v\beta.$$

1) H. Lamb, l. c. p. 692; L. Natanson, l. c. p. 593.

2) Unter Schwingungsdauer ist im folgenden stets, wie dies in der Akustik und Optik üblich ist, die Zeit eines Hin- und Herganges verstanden. Bei Torsionsschwingungen wird in der Regel $\tau/2$ als Schwingungsdauer bezeichnet.

3) Bei der Ableitung der Beziehungen geht man besser in der in der Metalloptik üblichen Weise von $e^{-\beta x + \frac{2\pi}{\tau} i \left(t - \frac{x}{v} \right)}$ aus.

Im Falle der Relaxationstheorie dagegen:

$$(5) \quad \frac{2\eta}{\varrho} = \frac{v}{\beta},$$

$$(6) \quad \frac{4\pi^2}{\tau^2} = \frac{N}{\varrho} \left\{ \frac{4\pi^2}{\tau^2 v^2} - \beta^2 \right\}.$$

Die erste Fundamentalgleichung (3) und (5) nimmt in beiden Fällen dieselbe Form an. Es kann daher diese Beziehung eine Entscheidung zwischen den beiden Theorien *nicht* geben. Sie sagt aus, daß der Quotient aus Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorptionskoeffizient unabhängig von der Schwingungsdauer ist und gleich dem doppelten Wert des Quotienten aus Reibungskoeffizient und Dichte.

Hängen v und β von der Schwingungsdauer ab, d. h. ist Dispersion vorhanden, so muß die Abhängigkeit *bis auf einen konstanten Faktor durch dieselbe Funktion der Schwingungsdauer* (Dispersionsformel) gegeben sein.

Daß eine Dispersion nach beiden Theorien stattfindet, folgt aus der zweiten Fundamentalgleichung, die die Abhängigkeit von v und β von der Schwingungsdauer enthält, und die daher im folgenden als *Dispersionsgleichung* bezeichnet werden soll. Die Dispersionsgleichung ist in beiden Fällen verschieden. Die Verschiedenheit der Dispersion bildet den charakteristischen Unterschied zwischen beiden Theorien.

3. *Die Dispersion.* — Statt des Absorptionskoeffizienten kann man auch, wie dies in der Metalloptik üblich ist, den Absorptionsindex einführen, der durch

$$\frac{2\pi\kappa}{\lambda} = \beta$$

definiert ist, wenn λ die Wellenlänge ist. Führt man diesen Wert in die Gleichungen (3) bis (6) ein, so geht die beiden Theorien gemeinsame Gleichung über in

$$(7) \quad v^2 = 4\pi \frac{\eta}{\varrho} \frac{\kappa}{\tau},$$

während die zweite Gleichung im Falle der klassischen Theorie

$$(8) \quad \kappa = 1$$

ergibt und im Falle der Relaxationstheorie

$$(9) \quad v^2 = \frac{N}{\varrho} (1 - \kappa^2) \cdot 1)$$

Die Gleichung (7) gibt die *Dispersionsformel*, wenn man für die klassische Theorie $\kappa = 1$ setzt und für die Relaxationstheorie

$$(10) \quad \kappa = \frac{1}{\delta} \{ \sqrt{1 + \delta^2} - 1 \},$$

wobei $\delta = \frac{1}{2\pi} \frac{\tau}{T}$ als das Verhältnis zweier Zeiten eine *reine Zahl* ist.

Für den Absorptionskoeffizienten folgt die analoge Dispersionsformel

$$(7a) \quad \beta^2 = \pi \frac{\varrho}{\eta} \frac{\kappa}{\tau}.$$

Führt man statt der Schwingungsdauer die Schwingungszahl $n = 1/\tau$ ein, so stellt im Falle der klassischen Theorie die *Dispersionsformel eine Parabel* dar, deren Ordinaten die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten (Absorptionskoeffizienten) und deren Abszissen die Schwingungszahlen sind. Der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel ist $\pi \eta / \varrho$ (bzw. $\pi \varrho / 4 \eta$). Mit wachsender Schwingungszahl wächst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und wird für unendlich große Werte von n unendlich groß.

Verstehen wir im Falle der Relaxationstheorie unter einem rasch, bzw. langsam verlaufenden Prozesse einen solchen für den τ sehr klein, bzw. sehr groß gegen T ist, dann wird für langsam verlaufende Prozesse $\kappa = 1$, d. h. die Dispersions-

1) Die Beziehungen (7) und (9) sind mit den Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie identisch, die die Beziehung zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Absorptionsindex und den elektrischen Konstanten des Mediums geben. Man hat nur an Stelle von N/ϱ zu setzen c^2/k , d. i. Quadrat der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, dividiert durch Dielektrizitätskonstante und die Leitfähigkeit durch die bekannte Beziehung zwischen Dielektrizitätskonstante und Relaxationszeit auszudrücken. Die zweite Differentialgleichung kann natürlich auch als der Ausgangspunkt einer elastischen Theorie des Lichtes in absorbierenden Medien dienen. Auf die Bedeutung, die für diese Theorie die Beziehungen (7) und (9) haben, habe ich in einer vorläufigen Mitteilung hingewiesen (Ber. d. phys.-med. Soc. Erlangen 40. p. 160. 1908).

formel stimmt für kleine Schwingungszahlen in dem oben definierten Sinn mit der Dispersionsformel überein, die die Differentialgleichung (1) ergibt. Die Dispersion hängt nur vom Reibungskoeffizienten und der Dichte ab.

Für einen mittleren Bereich der Schwingungszahlen wird $\kappa < 1$ und damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Falle der Relaxationstheorie kleiner als für die klassische Theorie. Für sehr rasch verlaufende Prozesse wird $\kappa = \delta/2$ und damit

$$(11a) \quad v^2 = \frac{N}{\varrho},$$

d. h. wird die Schwingungsdauer klein gegenüber der Relaxationszeit, dann hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht mehr von der Schwingungsdauer ab. Der konstante Endwert, dem sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit wachsender Schwingungszahl nähert, ist der Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im vollkommen elastischen Medium.

Von einem vollkommen elastischen Medium unterscheidet sich eine solche Flüssigkeit *wesentlich*, denn es findet eine Absorption statt, die unter Umständen sehr beträchtlich sein kann. Es ist wohl κ klein, aber ebenso unter Umständen λ , so daß β beträchtliche Werte annehmen kann. Der Absorptionskoeffizient β ist unabhängig von τ , denn er ist

$$(11b) \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varrho}{T\eta}}.$$

Je größer die Relaxationszeit und die Reibungskonstante, umso kleiner ist die Absorption.

4. *Prüfung der Theorie.* — Eine experimentelle Bestimmung der Größen v und β kann zur Prüfung dienen, ob die Ausbreitung scherender Deformationen in Flüssigkeiten durch die Differentialgleichung (1) bestimmt ist.

Ist dies der Fall, dann läßt sich η durch Beobachtung von v oder β bestimmen. Es ist:

$$(12) \quad \frac{\eta}{\varrho} = \frac{\tau v^2}{4\pi} = \frac{\pi}{\tau \beta^2}$$

und der aus diesen Gleichungen gefundene Wert von η/ϱ muß mit dem aus der Strömung durch Kapillaren bestimmten übereinstimmen.

Für langsam verlaufende Prozesse in dem oben definierten Sinn gilt für die Relaxationstheorie dasselbe. Ist die Schwingungsdauer hinreichend klein, so daß die zweite Differentialgleichung für die Ausbreitung maßgebend ist, dann läßt sich N und η , bzw. N und T aus den Beziehungen (5) und (6) bestimmen. Da aber $NT = \eta$ auch direkt durch Strömen durch Kapillaren bestimmt werden kann, wenn nur die Durchflußzeit hinreichend groß gewählt wird, so genügt eine Bestimmung von β oder v zur Bestimmung von N . Aus η/N kann T bestimmt werden. Setzt man $n = 2\pi/\tau$ und $m = 2\eta/\rho$, so folgt:

$$(13) \quad \frac{N}{\rho} = \frac{1}{\frac{1}{\beta^2 m^2} - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{n^2 m^2}}.$$

Bei rasch verlaufenden Prozessen in dem oben definierten Sinn kann N aus (11 a) von T aus (11 b) bestimmt werden.

5. *Direkte Methode zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.* — Als Schwingungserreger kann eine schwingende Platte A dienen, die die Oberfläche der Flüssigkeit berührt. Im Inneren der Flüssigkeit befinde sich an einem dünnen Faden aufgehängt ein Metallstreifen B , dessen Abstand von A in meßbarer Weise veränderlich ist. Die Direktionskraft des Fadens sei hinreichend klein, dann führt der Streifen dieselbe Bewegung aus wie die Flüssigkeit an dieser Stelle, er kann als *Sonde* zur Bestimmung der Flüssigkeitsbewegung dienen. Die Flüssigkeit sei

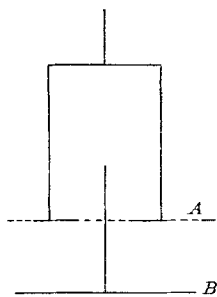


Fig. 1.

so tief, daß alle Bewegungsenergie in der Flüssigkeit absorbiert werde, ehe sie den Boden des Gefäßes erreicht, dann kann das Medium als unendlich ausgedehnt angesehen werden.

Bestimmt man die Zeit, die eine Störung braucht, um eine bestimmte Strecke zurückzulegen, so ist dadurch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gegeben.

Ein Versuch, die Zeit, die die Welle braucht, um von A nach B zu gelangen, mit Hilfe von Stromkontakten beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage zu registrieren, erwies sich als zu ungenau. Es wurden daher die Zeitmomente der (mit

Spiegel) beobachteten Umkehrpunkte aus dem maximalen Ausschlag bei Erreger und Sonde registriert.

Eine genaue Bestimmung des Abstandes AB ist nur schwierig durchzuführen. Es empfiehlt sich daher, die Zeitdifferenz für zwei Stellungen der Sonde zu bestimmen und die Verschiebung der Sonde zu messen.

6. *Indirekte Methode zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.* — Diese beruht auf einer *Resonanzerscheinung*. Bringt man der schwingenden Platte (A) eine zweite feste Platte (C) gegenüber, so werden die von A erregten Schwingungen von C reflektiert und die reflektierte Welle gibt durch Interferenz mit der direkten Welle zu einer stehenden Veranlassung. Die Flüssigkeit führt eine erzwungene Schwingung aus, deren Periode durch die Periode der schwingenden Platte bestimmt ist.

Verändert man den Abstand der beiden Platten, so wird die Dämpfung für die Platte (A) ein Minimum oder Maximum, wenn die Periode der schwingenden Platte mit der Eigenschwingung der Flüssigkeitssäule zusammenfällt und zwar ein Minimum, wenn der Abstand der Platten $\lambda/4, 3\lambda/4 \dots$ ist, d. h. wenn für den Abstand l gilt

$$(14) \quad v = \frac{4l}{\tau}.$$

Setzt man im Falle der klassischen Theorie den Wert von v aus (7) ein, so folgt

$$(15) \quad l^2 = \frac{\eta}{\varrho} \frac{\pi \tau}{4}.$$

Diese Beziehung wurde bereits von Th. S. Schmidt¹⁾ auf anderem Wege gefunden. Th. S. Schmidt bestimmt für den Fall, daß einer schwingenden Platte eine feste gegenübersteht, nach der Methode von O. E. Meyer²⁾ den Ausdruck für das log. Dekrement der schwingenden Platte, in dem er ein Integral der Differentialgleichung (1) sucht, das den gegebenen Grenzbedingungen genügt. Aus dem Ausdruck, der sich für das log. Dekrement ergibt, folgert er, daß für das Dekrement ein Minimum vorhanden sein muß, wenn die Be-

1) Th. S. Schmidt, Wied. Ann. 16. p. 633. 1882.

2) O. E. Meyer, l. c.

ziehung oben erfüllt ist. Versuche mit Wasser ergeben ihm, daß tatsächlich ein solches Minimum vorhanden ist, dessen Lage allerdings nicht an der von der Theorie geforderten Stelle liegt. Ich komme auf diesen Versuch später zurück.

Bei Schmidt wird die Gleichung (15) erst durch langwierige Rechnung gefunden, während sie bei unserer Betrachtungsweise durch eine einfache physikalische Überlegung sich ergibt, die zugleich die Erscheinung als Resonanzphänomen erkennen läßt.

7. *Methode zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten.* — Der Absorptionskoeffizient läßt sich bestimmen aus der Beobachtung von zusammengehörigen Werten der Amplitude von Erreger und Sonde. Ist α_0 die Amplitude des Erregers, so ergibt sich für die Amplitude der Sonde im Abstand x_1

$$\alpha_1 = C \alpha_0 e^{-\beta x_1},$$

im Abstand x_2

$$\alpha_2 = C \alpha_0 e^{-\beta x_2}.$$

Es ist mithin:

$$\beta = \frac{\lg \alpha_1 - \lg \alpha_2}{x_2 - x_1}.$$

Da diese Beobachtungen, sowie die Bestimmung von v nach 5. ein fast gleichzeitiges Ablesen der Spiegel von A und B erforderten, so wurde nach einigen Vorversuchen eine Reihe von Versuchen zusammen mit Hrn. Dr. Lampe ausgeführt und veröffentlicht.¹⁾ Da Hr. Dr. Lampe Erlangen an Ostern verließ, so habe ich die weiteren Versuche allein durchgeführt.

Versuchsanordnung.

8. *Erregung der Schwingungen.* — Als Schwingungserreger diente eine Platte²⁾ von der Form der Fig. 2. Die Dimensionen der Platte waren bei den einzelnen Versuchen verschieden. Es wurden Platten von 6,2 cm, 12 cm und 35,6 cm Durchmesser verwandt.

1) R. Reiger u. P. Lampe, Ber. d. phys. med. Soc. Erlangen April 1909.

2) Die zu den Versuchen verwendeten Apparate wurden von dem Mechaniker des Instituts Hrn. Keller ausgeführt.

In der Mitte der Platte befindet sich zentrisch zu der Drehungsachse eine Öffnung von 1,5 cm Durchmesser zur Einführung des Stabes der Sonde in die Flüssigkeit.

Eine genaue Horizontierung der Platte war durch die aus der Fig. 2 (bzw. Fig. 3) ersichtliche Vorrichtung möglich. Der horizontale

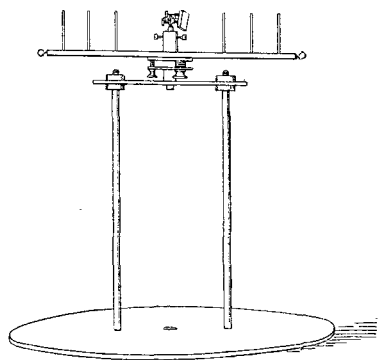


Fig. 2.

Stab an dem Gehänge dient zum Aufsetzen oder Anhängen von Gewichten, um das Trägheitsmoment und die Schwingungsdauer zu ändern. Größere Änderungen der Schwingungsdauer mußten jedoch stets durch Änderung der Direktionskraft des Aufhängedrahtes bewirkt werden, da das Trägheitsmoment, um eine geringe Dämpfung zu erzielen, stets sehr hoch gewählt wurde.

Die Schrauben am Ende des Stabes waren aus Eisen. Durch einen Elektromagneten, der einer der Schrauben gegenüberstand, konnte die Schwingung erregt werden.

Der Aufhängedraht war bei den ersten Versuchen an einem in die Wand eingegipsten Holzarm, bei den späteren Versuchen an einem Eisenarm mit seitlichen Trägern befestigt.

Der Spiegel war, wie aus der Fig. 2 ersichtlich, einmal um eine vertikale, andererseits durch das Gelenk und die beiden Schrauben um eine horizontale Achse drehbar. Dadurch war es möglich, die Ablesefernrohre für Erreger und Sonde unmittelbar über- oder nebeneinander aufzustellen, so daß die Ablesungen durch *einen* Beobachter kurz nacheinander ausgeführt werden konnten. Bei langsamen Schwingungen konnten so zusammengehörige Amplituden von Erreger und Sonde ermittelt werden. Bei raschen Schwingungen wurde in der Weise verfahren, daß die Schwingungsbögen zuerst für den Erreger, dann für die Sonde und dann wieder für den Erreger ermittelt wurden. Für die Berechnung wurde der Mittelwert der beobachteten Erregerschwingungen genommen.

Da die Dämpfung des Erregers sehr klein war, so wurden dadurch brauchbare Werte erzielt. Bei den mit Hrn. Lampe ausgeführten Beobachtungen war ein gleichzeitiges Ablesen durch zwei Beobachter möglich.

Am einfachsten wäre es natürlich, vollkommen ungedämpfte Erregerschwingungen zu verwenden, und ich versuchte dies auf folgende Weise zu ermöglichen. Als Stab zur Änderung des Trägheitsmomentes diente ein Stab von Eisen oder auch der Stab von Messing mit den Schrauben aus Eisen. Dem Ende gegenüber wurden auf beiden Seiten des Stabes Elektromagneten aufgestellt, die abwechselnd vom Strome durchflossen wurden. Das Unterbrechen und Schließen des Stromes geschah je durch zwei Schleifkontakte auf Messingringen, die an zwei gegenüberliegenden Stellen durch Hartgummi unterbrochen waren. Die Messingringe waren isoliert auf eine Drehungsachse aufgesetzt und waren so gegeneinander verschoben, daß die beiden Stromkreise abwechselnd geöffnet bzw. geschlossen wurden. Die Drehung erfolgte durch einen Motor, wobei durch Änderung der Tourenzahl des Motors und durch Zwischenschalten von Rädern mit Riemen die Umdrehungsgeschwindigkeit so lange geändert wurde, bis die Periode der Unterbrechungen mit der Periode des schwingenden Systems übereinstimmte.

9. *Die Sonde.* — Die Sonde mußte die Flüssigkeitsbewegung an verschiedenen Stellen in meßbarem Abstand zu bestimmen gestatten. Sie bestand bei den ersten Versuchen aus einem horizontalen Metallstreifen von 1,5 cm Breite (Streifen-sonde), der bei späteren Versuchen durch einen Draht (Durchmesser $d = 0,75$ mm) ersetzt wurde (Drahtsonde), und einem vertikalen Draht (Achse $d = 1,6$ mm), an dem der Spiegel und der Aufhängedraht befestigt waren. Zur Bestimmung der Verschiebung der Sonde diente eine feste Skala, auf der die Stellung einer mit der Sonde verbundenen Marke mit Fernrohr abgelesen wurde. Zur Anbringung der Marke war die Achse unterhalb des Spiegels durchbohrt, so daß ein Stift ($d = 0,5$ mm) eingeführt werden konnte, an dessen einem Ende ein kurzes Stück eines dünnen Messingdrahtes ($d = 0,05$ mm) angelötet war, das als Marke diente. Es wurde stets darauf Bedacht genommen, daß die Marke horizontal und den Teilstrichen der Skala parallel war. Dies konnte anfangs nur für einen Teil

der Marke erzielt werden. Später wurde der Messingdraht schwach verzinnt und dadurch konnte Parallelität auf der ganzen Länge erzielt werden. Zur Erleichterung der Ablesungen empfiehlt es sich, den Draht zu schwärzen. Dies

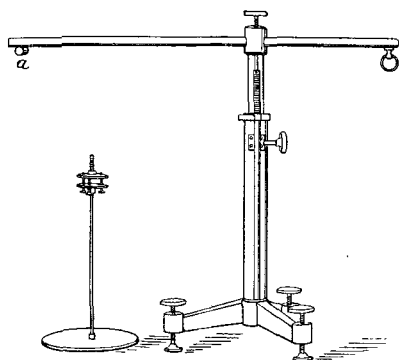


Fig. 3.

ist mit Spirituslack ohne eine merkliche Verstärkung der Marke möglich.

Die Sonde war an einem dünnen Faden aus Messing, Platin, Kokon oder Quarz an einem Stativ von der Form Fig. 3 aufgehängt. Das Ende des Aufhangedrahtes war dabei an einem dicken Messingdrahte befestigt, der durch die Klemmschraube *a* mit dem Stativ

in Verbindung stand. Durch die Drehung des Messingdrahtes erfolgte die Einstellung des Spiegels. Der Zahntrieb des Statives ermöglichte eine Verschiebung der Sonde in vertikaler Richtung.

10. *Resonanzmethode.* — Bei der Resonanzmethode diente als Erregerplatte dieselbe wie oben. Die reflektierende Platte wurde an Stelle der Sonde an dem Stativ Fig. 3 eingeführt. Es konnte dazu die Klemmschraube *a* entfernt, und an ihrer Stelle die Platte mit der Horizontierungsvorrichtung eingeschraubt werden. Der am anderen Stabende des Stativs befestigte Ring diente zur Anbringung eines Gegengewichtes.

Bei dieser Art der Einführung und Verschiebung der festen Platte in der Flüssigkeit bleibt die Flüssigkeitsoberfläche während des Versuches ungeändert, und darin liegt ein Vorteil gegenüber der Methode, das Gefäß zu verschieben, da in diesem Falle es schwer ist, stets bis zu derselben Höhe der Erregerplatte die Flüssigkeit einzufüllen. Das verschieden tiefe Eintauchen des Metallstabes bedingte bei den Dimensionen der verwandten Gefäße keine merkliche Niveauänderung. Um den Abstand der beiden Platten zu bestimmen, war an der Achse der verschiebbaren Platte eine Skala befestigt, während

eine Marke der oben beschriebenen Art mit einem der vertikalen Metallstäbe der Erregerplatte Fig. 2 verbunden war. Berührten sich die beiden Platten, so wurde bei weiterer Verschiebung nach oben die Lage der Marke nicht mehr geändert. Auf diese Weise konnte die Nullage bestimmt werden. Die Ablesungen erfolgten mit Fernrohr.

11. *Bestimmung der Reibungskoeffizienten.* — Die Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung bzw. der Größe η/ρ geschah in der bekannten Weise durch Vergleich der Ausflußzeiten der Flüssigkeit und einer Eichflüssigkeit, nämlich Wasser. Das Ausflußgefäß war dem von Ostwald¹⁾ ähnlich und hatte die Form von Fig. 4. Die Flüssigkeit wurde durch ein Trichterrohr bis zu der Marke *h* eingefüllt. Ein kleiner Fehler beim Einfüllen hat bei der Versuchsanordnung nur einen kleinen Einfluß, da während des Ausströmens der Flüssigkeit zwischen *aa* das Niveau der Flüssigkeit wegen der Anbringung des Gefäßes *b* sich in dem weiten Teil der Kugel befindet. Andererseits ermöglicht das Gefäß *b* die gerade Form der Kapillare beizubehalten, was die Reinigung der Kapillare erleichtert. Zur Prüfung des Apparates wurden die Reibungskoeffizienten einiger Flüssigkeiten bestimmt, die gute Übereinstimmung mit den Werten von Thorpe und Rodger zeigten.²⁾

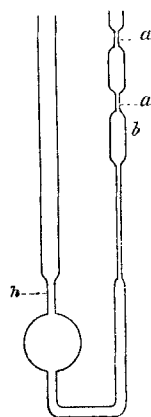


Fig. 4.

12. *Fehlerquellen.* — Die im folgenden mitgeteilten Werte des Absorptionskoeffizienten sind alle nach der Methode, deren Prinzip in 7. gegeben ist, bestimmt. Die Öffnung in der Erregerplatte zur Einführung der Sonde war verhältnismäßig groß (vgl. p. 60). Dadurch ist eine Störung im Gang der Sonde bedingt, denn die Geschwindigkeit der Teilchen in der Nähe der Achse ist kleiner als der Theorie entspricht. Da jedoch das Drehmoment, das die in der Nähe der Achse liegen-

1) W. Ostwald, Hand- und Hilfsbuch zur Ausführung physikochemischer Messungen p. 195. Leipzig 1893.

2) H. Landolt u. R. Börnstein, Physik.-chem. Tabellen.

den Teilchen auf die Sonde ausüben, an und für sich sehr klein ist, so ist der dadurch bedingte Fehler kleiner, als wenn bei einer sehr engen Öffnung kapillare Kräfte sich geltend machen würden.

Es möge schon hier erwähnt werden, daß für den *Absorptionskoeffizienten* sich bei geeigneten Versuchsbedingungen genaue Werte erhalten lassen, wenigstens in allen Fällen, in denen die Größe des Absorptionskoeffizienten keine zu großen Werte annimmt.

Dagegen können die *Methoden zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit* vorderhand nur dazu dienen, die Größenordnung dieser Größe zu bestimmen. Die Ungenauigkeiten der direkten Methode liegen darin, daß hier kleine Zeitdifferenzen zu messen sind, und keine Möglichkeit besteht, durch Vergrößerung der beobachteten Zeitintervalle die Genauigkeit zu steigern. Zur Registrierung der Zeitmomente diente ein Kymographion mit Uhrwerk, auf dem ein Chronograph $\frac{1}{6}$ Sek. schrieb, und die Zeitmomente durch einen Markiermagneten aufgeschrieben wurden. Als zu registrierende Zeitpunkte wurden die Umkehrpunkte aus dem maximalen Ausschlag benutzt, da für den feinen Faden häufig kleine Nullpunktsverschiebungen auftraten. In die Messungen tritt bei zwei Beobachtern noch ein subjektiver Fehler ein, der in der verschiedenen Beurteilung des Umkehrpunktes durch die beiden Beobachter liegt. Dieser Fehler wurde dadurch zu eliminieren gesucht, daß für die Bestimmung einer Zeitdifferenz stets vier aufeinanderfolgende Beobachtungen ausgeführt wurden. Zunächst wurde die Zeitdifferenz zwischen den Umkehrpunkten von *A* und *B* bei zwei aufeinanderfolgenden Ausschlägen nach beiden Seiten bestimmt und dann dieselben Beobachtungen ausgeführt mit dem Unterschied, daß die Beobachter von *A* und *B* ihre Rolle tauschten. Dadurch fällt der subjektive Fehler heraus, wenn man annimmt, daß dieser für jeden Beobachter konstant bleibt. Durch die Beobachtung der Zeitdifferenzen bei Ausschlägen nach entgegengesetzter Richtung werden die Einflüsse von eventuellen Nullpunktsverschiebungen eliminiert. Verwendet wurden nur Messungen von *v*, die sich als Mittelwerte aus einer größeren Reihe von Beobachtungen bei verschiedenen Abständen von der Platte ergaben, wobei die Zeitdifferenz für jeden Abstand durch eine

größere Reihe von Beobachtungen in der oben angegebenen Weise bestimmt wurde. Von den so gewonnenen Resultaten läßt sich annehmen, daß sie die Größenordnung der Geschwindigkeit geben. Bei den Beobachtungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die ich allein ausführte, war der Meßbereich natürlich beschränkter. Es konnten nur dann Messungen durchgeführt werden, wenn die Zeitintervalle hinreichend groß waren, um die Umkehrpunkte in beiden Fernrohren zu beobachten.

Die im folgenden mitgeteilten Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit sind nach der direkten Methode bestimmt mit Ausnahme der in 22. gegebenen Werte, die nach der Resonanzmethode bestimmt sind. Dort finden sich auch die Angaben über die Genauigkeit der Resonanzmethode.

Vorversuche.

Im folgenden soll zunächst über eine Reihe von Versuchen berichtet werden, die zum großen Teil in Gemeinschaft mit Hrn. Lampe durchgeführt wurden, und die eine Reihe von Fragen behandeln, die die Beschaffenheit der Sonde, die Abhängigkeit von v und β vom Abstand von der Platte, die Verwendung ungedämpfter Erregerschwingungen, den Einfluß der Dämpfung und der Wände des Gefäßes betreffen.

13. *Beschaffenheit der Sonde.* — Eine Vorbedingung für die Bestimmung von v und β nach 5. und 7. ist, daß die Direktionskraft des Fadens, an dem die Sonde aufgehängt ist, hinreichend klein ist, da nur dann die Bewegung der Sonde an Stelle der Bewegung der Flüssigkeit gesetzt werden kann. Dies ist der Fall, wenn eine Verringerung der Direktionskraft des Fadens auf die Resultate der Messung keinen Einfluß hat. Der im folgenden mitgeteilte Versuch bezieht sich auf ein Glycerin-Wassergemisch.

Tabelle 1.

Faden	Direktionskraft $\text{cm}^2 \text{ g sec}^{-2}$	v (cm sec^{-1})
Messing	38,7	1,31
Kokon	0,534	1,39
Quarz	0,0549	1,32

Die Übereinstimmung kann als eine genügende angesehen werden. Die Unabhängigkeit vom Material des Streifens und vom Trägheitsmoment zeigt eine andere Messungsreihe (Tab. 2).

Tabelle 2.

Streifen	Trägheitsmoment cm ² g	v (cm sec ⁻¹)
Messing	167,7	0,985
Aluminium	83,3	0,978

Bei den späteren Versuchen trat, wie schon erwähnt, an Stelle der Streifensonde eine Drahtsonde. Dadurch wird das Gewicht des Systems verringert, und man kann daher zu sehr feinen Aufhängedrähten übergehen, ohne Gefahr zu laufen, daß bei der vertikalen Verschiebung der Sonde und bei kleinen Erschütterungen des Systems ein Reißen des Fadens eintritt. Statt des Drahtes wurde auch eine dünne Aluminiumplatte von 12 cm Durchmesser für den folgenden Versuch verwandt, den Tab. 3 gibt.

Tabelle 3.

τ	Temp.	Sonde	β	Olivenöl
29,97	18,5°	Messingstreifen	0,557	1. Sendung von Merk
21,77	19	„	0,581	
26,44	18,4	Messingdraht	0,554	2. Sendung von Merk
26,44	18,2	Aluminiumscheibe	0,564	

Zum Vergleich sind auch einige Versuche mit einer Streifensonde hinzugefügt, die einer früheren Messungsreihe entnommen sind. Die Versuche wurden allerdings mit zwei verschiedenen Sendungen Olivenöl von Merk durchgeführt. Für den Reibungskoeffizienten ergab sich in beiden Fällen derselbe Wert, während bei einer 3. Sendung ein etwas höherer Wert von η beobachtet wurde.

Man sieht aus der Tabelle, daß der Wert von β im Falle der Scheibe etwas höher ist. Dies rührt zum Teil vielleicht von Unebenheiten der Scheibe her, da die dünne Aluminiumfolie nicht vollkommen eben zu bekommen war, zum größeren Teil aber wohl von der größeren Menge reflektierter Bewegungsenergie.

Ist die Vorbedingung, daß die Direktionskraft der Sonde hinreichend klein ist, erfüllt, dann muß die Sonde erzwungene Schwingungen ausführen, d. h. Schwingungsdauer und Dekrement dürfen nicht durch die Eigenperiode der Sonde, sondern durch die des Erregers bestimmt sein. Als Beispiel möge folgende Beobachtungsreihe für die Schwingungsdauer angeführt werden.

Tabelle 4.

						Mittel
Erreger	15,22	15,21	15,22	15,21	15,22	15,22
Sonde	15,25	15,18	15,20	15,18	15,23	15,21

Man sieht, daß die Beobachtungen von τ für die Sonde etwas größere Schwankungen zeigen, was durch kleine Nullpunktverschiebungen sich vollkommen erklärt.

Für das log. Dekrement wurde beobachtet 0,00546 für den Erreger und 0,00545 für die Sonde.

14. Prüfung der Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und des Absorptionskoeffizienten vom Abstand der Sonde von der Platte. — Eine Reihe von Versuchen in dieser Richtung habe ich mit Hrn. Lampe durchgeführt.

Eine Abhängigkeit von β vom Abstand ergab sich nicht. In unmittelbarer Nähe der Platte wurden allerdings stets etwas zu hohe Werte gefunden. Es hängt dies wohl mit Störungen zusammen, die durch Bildung stehender Wellen bedingt sind. Sieht man von diesen Störungen in unmittelbarer Nähe der Platte ab, so ist β als vollkommen konstant anzusehen. Dies zeigt die folgende Tabelle, die sich auf Olivenöl bezieht. Die zweite Kolumne gibt die Stellung der Marke der Sonde an der Skala, deren Nullage willkürlich ist, da es ja nur auf die Verschiebung der Sonde ankommt. Die dritte Kolumne gibt das Verhältnis zweier gleichzeitigen Amplituden von Erreger und Sonde als Mittelwerte aus einer größeren Reihe von Beobachtungen. $x_2 - x_1$ gibt die Sondenverschiebung für zwei aufeinanderfolgende Beobachtungen in Zentimetern und β_{12} die dafür berechneten Werte des Absorptionskoeffizienten. Größere Genauigkeit ist allerdings nur für größere Abstände zu erzielen. Dies zeigen die unter β_{14} gegebenen Werte, bei denen je zwei Beobachtungsreihen bei der Berechnung ausgelassen sind.

Tabelle 5.

Versuch	Skalen- teile	$\frac{\alpha_1}{\alpha_{II}}$	$x_2 - x_1$ (cm)	β_{12}	$x_4 - x_1$	β_{14}
1.	290,25	3,093	—	—	—	—
2.	278,8	4,256	0,573	0,545	—	—
3.	257,1	7,578	1,085	0,538	—	—
4.	237,6	12,86	0,975	0,542	2,633	0,5412
5.	217,6	22,04	1,000	0,539	3,060	0,5398
6.	198,05	37,45	0,978	0,542	2,953	0,5411

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten läßt sich nach den bisherigen Versuchen noch nicht angeben, ob eventuell eine Abhängigkeit vom Abstand vorhanden ist, da die Abweichungen bei den einzelnen Versuchsreihen hier zu groß sind, um einen definitiven Entscheid zu geben. Praktischen Wert haben hier, wie schon erwähnt, nur die Mittelwerte aus einer größeren Reihe von Beobachtungen. Eine große Reihe von Versuchen ergaben in geringem Abstand von der Platte höhere Werte und in einem mittleren Bereiche konstante Werte. In großer Entfernung wurden mitunter wieder etwas niederere Werte gefunden. Es sind jedoch im letzten Falle die Umkehrpunkte wegen der geringen Größe der Amplitude der Sonde nur sehr ungenau zu bestimmen. Die beobachteten Zeitdifferenzen werden bei den kleinen Amplituden leicht zu groß und damit v zu klein. Die Beobachtungen von v und β erfolgten im folgenden fast durchweg in einem mittleren Bereiche.

15. *Ungedämpfte Erregerschwingungen.* — Es wurde schon früher darauf hingewiesen, daß es am vorteilhaftesten wäre, ungedämpfte Erregerschwingungen zu verwenden. Bei der p. 61 beschriebenen Methode zeigte sich jedoch, daß es sehr schwierig war, die Amplitude der Erregerplatte auf längere Zeit vollkommen konstant zu halten. Am regelmäßigsten waren noch die Schwingungen bei kurzer Schwingungsdauer des Erregersystems zu erhalten. Es wurden daher die Beobachtungen bei einer Schwingungsdauer von $\tau = 1,52$ Sek. durchgeführt.

Es ergab sich bei einer Temperatur von $17,2^{\circ}$ für aufeinanderfolgende Messungen:

Tabelle 6.¹⁾

Gedämpfte Schwingung	—	1,441	—	1,443	—
Ungedämpfte Schwingung	1,503	—	1,558	—	1,537

Man sieht, die Werte bei der ungedämpften Schwingung sind kleiner und zeigen nicht die relativ großen Schwankungen wie bei der ungedämpften Schwingung. Dies rührt daher, daß es mit der p. 61 angegebenen Methode nicht möglich ist, die Schwingungsdauer des Erregers vollkommen konstant zu halten. Die beobachteten Schwingungsdauern schwankten in diesem Falle zwischen 1,51 und 1,53. Die Bewegung erfolgt auch nicht so ruhig und gleichmäßig, wie wenn die Elastizität des Aufhängedrahtes die einzige treibende Kraft ist. Fast stets sind kleine Schwankungen des Flüssigkeitsspiegels vorhanden, die durch die schaukelnde Bewegung der Erregerplatte hervorgerufen werden.

Durch diese Umstände dürften die Abweichungen der beobachteten Werte von β für die ungedämpften Erregerschwingungen unter sich und gegen die der gedämpften Schwingungen ihre Erklärung finden.

16. *Einfluß der Dämpfung der Erregerschwingungen.* — Bei den meisten Versuchen war die Dämpfung sehr klein. Um zu prüfen, ob die Dämpfung der Erregerschwingungen die Versuchsergebnisse beeinflusst, wurde die Dämpfung der Erregerplatte in der folgenden Weise geändert: Das Gefäß wurde mit Flüssigkeit über die schwingende Platte gefüllt und von oben eine halbkreisförmige verschiebbare Platte A' eingeführt. Durch die Annäherung der Platte A' konnte die Dämpfung vergrößert werden, ohne daß die gegenseitige Lage von Erregerplatte und Sonde geändert wurde. Tab. 7 enthält die Beobachtungsergebnisse.

1) Diese Versuche wurden mit der Platte von 35,6 cm Durchmesser und der 3. Sendung Olivenöl durchgeführt.

Tabelle 7.

Log. Dekrement, bestimmt aus der Abnahme der Amplitude		$\frac{\alpha_1}{\alpha_{II}}$
der Erregerplatte	der Sonde	
0,00385	0,00385	5,08
0,01418	0,01398	5,11
0,02565	0,02570	5,09

Der Wert des Absorptionskoeffizienten wird durch die Dämpfung der Erregerschwingungen also nicht geändert. Dasselbe gilt auch von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

17. *Einfluß der Wände des Gefäßes.* — Um zu prüfen, ob ein wesentlicher Einfluß der Wände des Gefäßes vorhanden ist, wurde der Einfluß des Durchmessers des Gefäßes in der folgenden Weise geprüft: Zu den Versuchen diente die Erregerplatte von 12 cm Durchmesser. Der Durchmesser des Gefäßes war 24 cm. Ohne die relative Lage von Erregerplatte und Sonde zu ändern, konnte von oben ein Glaszylinder von 16 cm Durchmesser abwechselnd eingeführt und herausgenommen werden, so daß der Abstand des Plattenrandes von der Gefäßwand abwechselnd 2 cm und 6 cm betrug. Die Ergebnisse der Versuche, die sich bei abwechselnder Einführung und Herausnahme des Zylinders ergaben, enthält Tab. 8.

Tabelle 8.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit		Absorptionskoeffizient	
weites Gefäß	enges Gefäß	weites Gefäß	enges Gefäß
0,748	0,768	0,733	0,730
0,719	0,762	0,729	0,718
0,723	0,741	0,729	0,726
0,729	0,754		
Mittel: 0,730	0,756	0,730	0,725

Die einzelnen Zahlen in der Tabelle stellen nicht Mittelwerte, sondern direkt beobachtete Zahlen dar, wobei jeder Wert von v nach der in 12. angegebenen Weise bestimmt wurde.

Es ist nach den Beobachtungen ein Einfluß vorhanden, er ist aber klein, zumal für den Absorptionskoeffizienten. Die Abweichung hängt vielleicht mit einer Streuung der Energie im ersten Falle zusammen. Jedenfalls hat die Weite des Gefäßes keinen beträchtlichen Einfluß.

Prüfung der Theorie.

18. *Beobachtungen über die Dispersion bei Olivenöl bei einer Erregerplatte von 12 cm Durchmesser.* — Im folgenden sind einige Versuchsreihen mit Olivenöl mitgeteilt, die in Gemeinschaft mit Hrn. Lampe durchgeführt wurden. Der Durchmesser der schwingenden Erregerplatte war 12 cm. Absorptionskoeffizient und Fortpflanzungsgeschwindigkeit sind nach der direkten Methode bestimmt. Jeder Wert von β und v wurde dabei als Mittelwert aus einer Reihe von Einzelbeobachtungen gewonnen. Leider sind die Versuche bei etwas verschiedener Temperatur durchgeführt. Man sieht aus den Tabellen, daß eine starke Dispersion vorhanden ist. Mit abnehmender Schwingungsdauer nehmen beide Größen stark zu. Dagegen bleiben beide Größen für große Schwingungsdauern ziemlich konstant.

Tabelle 9.

Vers.- Reihe	ϑ	$\frac{\tau}{2}$	β
1.	18,5°	14,985	0,5572
2.	19	10,887	0,5807
3.	19,2	5,528	0,6788
4.	18,9	2,907	0,8658
5.	18,5	1,830	1,0850
6.	16,6	0,932	1,3734

Tabelle 10.

Vers.- Reihe	ϑ	$\frac{\tau}{2}$	v
1.	16,7°	14,33	1,04
2.	17,6	10,33	1,08
3.	19	5,240	1,18
4.	17,8	2,801	1,61
5.	19,2	1,841	1,98
6.	18	0,931	2,72

Um eine Prüfung der Theorie durchführen zu können, wurde die Größe η/ρ durch Strömen durch Kapillaren bestimmt. Die Bestimmung wurde für einige Temperaturen mit dem Fig. 4 gegebenen Apparat durchgeführt und die Interpolationsformel aufgestellt

$$(16) \quad \frac{\eta}{\rho} = 1,0869 + 0,05278(15 - \vartheta).$$

19. *Prüfung der Dispersionsformeln.* — Es wurde bereits früher ausgeführt, daß der Unterschied zwischen der klassischen und der Relaxationstheorie sich durch die Verschiedenheit der Dispersion ausdrückt.

Berechnet man η/ρ nach Formel (12) aus v und β , so muß, wenn die klassische Theorie gilt, dieser berechnete Wert mit dem beobachteten, d. h. aus der Interpolationsformel (16) erhaltenen Wert übereinstimmen. Die beobachteten und berechneten Werte sind in Tabb. 11 und 12 einander gegenübergestellt.

Tabelle 11.

Vers.- Reihe	η/ρ	
	beob.	ber. aus β
1.	0,9022	0,3876
2.	0,8758	0,4279
3.	0,8652	0,6167
4.	0,9074	0,7208
5.	0,9022	0,7291
6.	1,0024	0,8935

Tabelle 12.

Vers.- Reihe	η/ρ	
	beob.	ber. aus v
1.	0,9972	2,467
2.	0,9497	1,918
3.	0,8758	1,163
4.	0,9391	1,156
5.	0,8652	1,149
6.	0,9286	1,099

Die beobachtete Dispersion ist verschieden von der, die die klassische Theorie im Falle einer ebenen Welle verlangt. Die Abweichung ist besonders groß für die langsamen Schwingungen, während für die beobachteten kleinen Schwingungsdauern nur mehr kleinere Unterschiede vorhanden sind.

Daraus können wir ohne weiteres folgern, daß der Gang der Dispersion auch ein anderer ist, als er von der Relaxationstheorie gefordert wird, denn nach der Relaxationstheorie müßten die Abweichungen gerade für die raschesten Schwingungen am stärksten sein. Die beobachteten Werte von v und β sind durchweg größer als die klassische Theorie fordert, daraus ergibt sich, daß für N/ρ nach Formel (13) sich ein *negativer Wert des Scheerungsmoduls* ergeben muß. Daß dies der Fall ist, zeigen die folgenden Tabellen.

Tabelle 13.

Versuchs- Reihe	N/ϱ ber. aus β
1.	— 0,165
2.	— 0,324
3.	— 1,425
4.	— 4,223
5.	— 7,215
6.	— 29,33

Tabelle 14.

Versuchs- Reihe	N/ϱ ber. aus v
1.	— 0,211
2.	— 0,379
3.	— 1,821
4.	— 5,043
5.	— 5,141
6.	— 18,78

Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorptionskoeffizient hängen also für unseren Versuch in anderer Weise von der Schwingungsdauer ab, als von beiden Theorien verlangt wird.

20. *Prüfung der Fundamentalgleichungen.* — Aus der Prüfung der Dispersionsformeln folgt ohne weiteres, daß die *zweite Fundamentalgleichung* (die Dispersionsgleichung) *nicht erfüllt* ist. Die erste Fundamentalgleichung, die beiden Theorien gemeinsam ist, gibt

$$\frac{\eta}{\varrho} = \frac{v}{2\beta}.$$

Eine Prüfung dieser Beziehung läßt sich streng genommen nach den Beobachtungen allerdings nicht durchführen, da β und v unter verschiedenen Bedingungen (Temperatur und Schwingungsdauer) bestimmt sind. Da jedoch die Schwingungsdauern nahezu dieselben sind, und außerdem die Temperaturen nicht sehr stark voneinander abweichen, so kann nach den oben mitgeteilten Tabellen eine Kurve gezeichnet werden (vgl. die Fig. 5; es sind als Ordinaten die Werte von v , als Abszissen die von $\tau/2$ angetragen), die die Beziehung

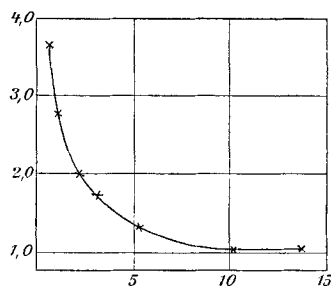


Fig. 5.

zwischen v und τ hinreichend genau gibt, um die Werte von v zu korrigieren. Die Korrekturen betragen maximal 2,5 Proz.

Bilden wir die Werte $v/2\beta$, so haben wir zu berücksichtigen, daß v und β bei verschiedenen Temperaturen bestimmt sind. Mit wachsender Temperatur nimmt v ab, ebenso

$1/\beta$. Die Abhängigkeit von $v/2\beta$ von der Temperatur muß also groß sein, wie dies ja für η/ρ in der Tat der Fall ist. Um der Temperatur Rechnung zu tragen, vergleichen wir $v/2\beta$ mit dem arithmetischen Mittel der Werte von η/ρ , die sich für die Temperaturen ergeben, bei denen v und β bestimmt sind.

Tabelle 15.

$\tau/2$	14,985	10,887	5,528	2,907	1,83	0,932
$v/2\beta$	0,929	0,923	0,855	0,913	0,913	0,990
η/ρ	0,949	0,913	0,871	0,923	0,884	0,966

Die Abweichungen liegen unter 3,5 Proz. und wären wahrscheinlich noch geringer, wenn v und β bei derselben Temperatur und Schwingungsdauer bestimmt wären. Es darf jedoch nicht übersehen werden, daß die Bestimmung von v aus den oben angeführten Gründen ungenau ist, und daher starke Abweichungen von vornherein zu erwarten sind. Die Art der Abweichungen zeigt, daß diese nicht prinzipieller Natur sind. *Die Beziehung $\eta/\rho = v/2\beta$ ist also in unserem Falle erfüllt.* Die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und des Absorptionskoeffizienten von der Schwingungsdauer ist durch dieselbe Funktion von τ (Dispersionsformel) gegeben. Aus dem Quotienten von v und β läßt sich daher der Reibungskoeffizient bestimmen.

21. *Einfluß der Größe des Störungsgebietes.* — Die Art der Abweichungen, die sich im vorhergehenden für die aus β und v berechneten Werte von η/ρ ergeben, zeigen, daß hier nicht Versuchsfehler vorliegen, sondern daß diese Abweichungen prinzipieller Natur sind. Für die langsamen Schwingungen, bei denen sich wegen der geringen Absorption die genauesten Messungen durchführen lassen, sind die Abweichungen zwischen Theorie und Erfahrung am größten. Bei den raschen Schwingungen ist die Abweichung sehr viel kleiner, aber immerhin noch vorhanden. Der Gang der Abweichungen weist also darauf hin, daß, wenn wir zu noch rascheren Schwingungen übergehen würden, wahrscheinlich die beobachteten und berechneten Werte miteinander übereinstimmen würden.

Bei Ableitung der Beziehungen in 2. und 3. wurde vorausgesetzt, daß die in der Flüssigkeit fortschreitende Störung

einer ebenen Welle entspricht. Dies setzt eigentlich voraus, daß die Größe der Flüssigkeitsoberfläche und der schwingenden Platte unendlich ist. Im Sinne der Wellentheorie kann das von der Störung ergriffene Gebiet als unendlich groß angesehen werden, wenn der Durchmesser desselben groß ist gegen die Wellenlänge der von ihm ausgehenden Störung. Bei den Beobachtungen in 18. liegen die Wellenlängen zwischen 5 und 30 cm, die Bedingung ist also nicht erfüllt, und daher schien es möglich, daß unter den vorliegenden Versuchsbedingungen die *Bedingung der ebenen Welle* bereits für die rascheren Schwingungen *nicht mehr erfüllt* ist, und in sehr verstärktem Maße ist dies dann natürlich für die langsamen Schwingungen der Fall.

Um diese Möglichkeit zu prüfen, wurden bei einer Schwingungsdauer von 93,54 Sek. die Dimensionen der Platte geändert, und zwar wurde zunächst zu kleineren Platten übergegangen, da in diesem Falle der Einfluß besonders stark hervortreten muß.

Tabelle 16.

Durchmesser der Platte	ϑ	β beobachtet	β berechnet aus η/ρ nach (12)
12 cm	18,1°	0,497	0,191
6,2	19,8	0,624	0,201

Vergleicht man den für die Platte von 12 cm Durchmesser erhaltenen Wert mit den in Tab. 9 angegebenen Werten von β , so zeigt sich, daß eine Änderung der Schwingungsdauer von 29,97 auf 93,54 Sek. nur eine geringe Änderung der Absorptionskoeffizienten zur Folge hat. Wesentlich höher dagegen liegt der Wert für die Platte von 6,2 cm Durchmesser. Zum Vergleich sind die Werte von β hinzugefügt, die sich nach der klassischen Theorie aus den beobachteten Werten von η/ρ (aus der Interpolationsformel (16)) ergeben.

Unser Versuch zeigt, daß die Absorption um so größer ist, je kleiner das Gebiet ist, das von der Störung ergriffen wird. Dasselbe gilt, wie die Beobachtung zeigte, auch für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Die Dispersion ist, wenn die Bedingung der ebenen Welle nicht erfüllt ist, von der Größe des Gebietes abhängig, auf das sich die Störung erstreckt und zwar ergibt sich:

Eine Scherungswelle pflanzt sich in einer Flüssigkeit um so rascher fort und wird um so stärker absorbiert, je kleiner das Gebiet ist, das von der Deformation ergriffen wird.

22. *Verteilung der Winkelgeschwindigkeit in einer Ebene.* — Das Nächstliegende zur Erklärung der vorhergehenden Versuche wäre es wohl, von der Flüssigkeitsbewegung im Raume I auszugehen und den Einfluß von II in ähnlicher Weise in Rücksicht zu ziehen wie in der Theorie der Wärmeleitung bei einem Stab, der seitlich Wärme abgibt, d. h. ein Glied mit ω in die Differentialgleichung einzuführen.

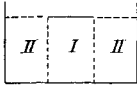


Fig. 6.

In diesem Falle wird offenbar die erste Fundamentalgleichung nicht geändert, dagegen die Dispersionsgleichung. Es zeigt sich jedoch, daß die Beobachtungen in Tab. 9 und 10 einer solchen Differentialgleichung nicht genügen.

Man muß daher von der allgemeinen Differentialgleichung ausgehen

$$\rho \frac{d\omega}{dt} = \eta \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right),$$

d. h. die Abhängigkeit von ω vom Radius berücksichtigen.

Unsere Methode der Sondenmessung muß übrigens auch zu beobachten gestatten, ob eine Abhängigkeit der Bewegung vom Radius vorhanden ist. Unsere Sonde mißt offenbar die Winkelgeschwindigkeit aller Flüssigkeitsteilchen nur dann, wenn alle Flüssigkeitsteilchen längs der Sonde dieselbe Winkelgeschwindigkeit haben. Besitzen die einzelnen Teilchen verschiedene Winkelgeschwindigkeit, so mißt die Sonde einen gewissen mittleren Wert, wobei die äußeren Teilchen entsprechend dem längeren Hebelarm ein stärkeres Drehmoment ausüben und das Beobachtungsergebnis daher am stärksten beeinflussen.

Verändert man die Länge der Sonde, so darf, wenn alle Teilchen einer Ebene dieselbe Winkelgeschwindigkeit besitzen, dies nichts ausmachen. Der Versuch lehrt das Gegenteil, wie Tab. 17 zeigt.

Tabelle 17.

Länge des Drahtes der Sonde	ϑ	β	$\tau/2$
12 cm	15,8°	0,546	10,99
6	16,4	0,489	10,99

Der Durchmesser der Erregerplatte war 12 cm. *Die Absorption ist in dem zentralen Teil der Flüssigkeit kleiner als in dem äußeren*, aber der absolute Wert von β ist immer noch größer als es von der Theorie gefordert wird.

Die Winkelgeschwindigkeit in einer Ebene nimmt für die Flüssigkeitsbewegung im Raume I von außen nach innen zu. Natürlich ließe sich mit unserer Methode durch Messungen mit Sonden verschiedener Länge die Verteilung der Winkelgeschwindigkeit vollständig bestimmen, doch kam es mir hierauf zunächst nicht an, vielmehr suchte ich die Bedingungen der ebenen Welle durch Vergrößerung des Störungsgebietes zu erreichen. Jedenfalls ist aber darin ein Hauptvorteil der Sondenmessung zu sehen, daß sie uns gestattet, *direkt die Flüssigkeitsbewegung an einer bestimmten Stelle zu analysieren*, während die übrigen Methoden stets nur Integralwirkungen zu prüfen gestatten.

23. *Prüfung der Bedingung der ebenen Welle bei der großen Platte.* — Die folgenden Versuche wurden mit der Platte von 35,6 cm Durchmesser angestellt. Trotzdem das Trägheitsmoment der Platte an und für sich groß ist, so wurde die Dämpfung durch die Flüssigkeit doch so bedeutend, daß das Trägheitsmoment des Systems bei Versuchen mit Olivenöl stark vergrößert werden mußte. Es diente dazu ein Stab von 2 m Länge, an dessen Ende Gewichte von je 2 kg angehängt waren. Unter dem Einfluß der angehängten Gewichte trat eine merkliche Biegung des Stabes ein, so daß der Abstand der Gewichte von der Drehungsachse etwas kleiner als 1 m war.

Auf diese Weise konnten schwach gedämpfte Schwingungen erzielt werden. Bei der Erregung der Schwingungen waren allerdings stets kleine Schwankungen der Platte und damit des Flüssigkeitsspiegels vorhanden, doch wurden diese störenden Bewegungen durch die Flüssigkeit rasch gedämpft.

Die Platte sowie die Sonde waren vernickelt, da Messing von dem Öle angegriffen wird, das sich grün färbt. Die Flüssigkeit befand sich in einem Gefäß aus Weißblech von 15 cm Höhe. Die Höhe der Flüssigkeitsschicht ist für die Mehrzahl der Versuche mehr als ausreichend, da die Absorption der Bewegung in der Flüssigkeit so groß ist, daß die am Boden reflektierte Bewegung nicht in Betracht kommt. Die Tiefe der Flüssigkeit also für diesen Fall als unbegrenzt angesehen werden kann.

Es wurde zunächst der Einfluß der Länge der Sonde geprüft. Die Beobachtungsergebnisse enthält Tab. 18.

Tabelle 18.

τ	Länge des Drahtes der Sonde	β beobachtet
25,96	35,6 cm	0,398
25,96	20 „	0,348
25,96	8,2 „	0,352

Aus dem Versuch ergibt sich, daß die beobachteten Werte von β für eine Sonde von 20 cm und 8,2 cm Länge von der Länge der Sonde unabhängig sind. Für die Sonde von 35,6 cm Länge wird der Absorptionskoeffizient größer gefunden. Wir können daraus schließen, daß im *Innern des Flüssigkeitszylinders von 20 cm Radius die Winkelgeschwindigkeit in einer Ebene konstant ist*, und die Veränderlichkeit dieser Größe sich nur auf einen Raum außerhalb dieses Zylinders erstreckt.

Daraus folgt, daß die Winkelgeschwindigkeit sich im inneren Teil in Form einer ebenen Welle ausbreitet und daher eine Anwendung der Theorie gestattet ist, wenn die Beobachtungen sich auf diesen Raum beschränken.

24. *Beobachtungen über die Absorption ebener Wellen in Olivenöl.* — Der Reibungskoeffizient war für diese Sendung von Olivenöl von Merk, wie schon erwähnt wurde, etwas höher als für die anderen Sendungen. Es wurde gemessen:

Tabelle 19.

ϑ	17,9°	16,4°
η/q	0,9476	1,0241

Jeder der beiden Werte ist aus einer großen Reihe von Einzelbeobachtungen gewonnen. Die folgende Tabelle enthält die beobachteten Werte des Absorptionskoeffizienten für verschiedene Schwingungsdauern. Der Durchmesser der schwingenden Platte war 35,6 cm, die Länge der Sonde 8,2 cm. Die berechneten Werte von β sind aus η/ρ in Tab. 19 unter Annahme der Gültigkeit der klassischen Theorie gewonnen.

Tabelle 20.

ϑ	τ	β beobachtet	β berechnet
17,2°	1,52	1,442	1,450
16,6	3,96	0,874	0,885
17	7,17	0,670	0,664
15,85	20,64	0,378	0,380
17,9	25,96	0,352	0,357
15,8	52,84	0,224	0,237

Die Abweichungen zwischen den beobachteten und berechneten Werten liegen, wenn man von dem letzten Werte abieht, unter 1,5 Proz. Die Übereinstimmung ist in diesem Bereiche eine gute, wenn man bedenkt, daß die Versuchsbedingungen, was die Temperatur anlangt, sehr ungünstige sind. Die Flüssigkeit nimmt am Rande und an der Oberfläche durch die metallische Leitung der Platte und der Gefäßwand rasch die Außentemperatur an, dagegen nur langsam im Innern wegen der schlechten Wärmeleitung des Öles. In der Tat zeigt sich, daß die beobachteten und berechneten Werte dann am besten übereinstimmen, wenn die Außentemperatur längere Zeit vor der Beobachtung keine Schwankungen erfahren hatte.¹⁾

Sehen wir von dem letzten Wert ab, so können wir aus den Beobachtungen folgern, daß in dem von uns untersuchten

1) Da fast für jeden Versuch die Direktionskraft des Aufhänge-
drahtes geändert wurde, so war eine ständige Neueinstellung des Apparates
nötig. Die Platte muß beim Aufgießen der Flüssigkeit bis zur Berüh-
rung mit der Platte vollkommen trocken sein, da sonst Luftblasen an
der Platte nicht zu vermeiden sind. Dies bedingt einen vollständigen
Ab- und Aufbau der Versuchsanordnung. Daher erstreckten sich die
Versuche der Tab. 20 auf eine größere Reihe von Tagen.

Bereich der Schwingungen die von der klassischen Theorie für den Absorptionskoeffizienten geforderte Dispersionsformel

$$\beta^2 = \frac{\pi \varrho}{\eta} \cdot \frac{1}{\tau}$$

für die Absorption ebener Wellen in Olivenöl erfüllt ist.

Für den letzten Wert ist die Abweichung allerdings groß, ca. 5,5 Proz. Ich habe diese Beobachtung wiederholt, aber Abweichungen von ungefähr derselben Größe und in derselben Richtung erhalten. Da die Höhe der Flüssigkeitsschicht 12 cm war, so wird hier eine merkliche Flüssigkeitsbewegung den Boden des Gefäßes erreichen, jedenfalls aber wird die reflektierte Bewegung auf ihrem Wege bis zu den Stellen, an denen die Messungen angestellt wurden, so stark geschwächt, daß eine wesentliche Beeinflussung des Resultates durch die reflektierte Welle nicht vorhanden ist.

Wahrscheinlich sind die Bedingungen für die Ausbreitung einer ebenen Welle in diesem Falle nicht mehr erfüllt. Die Wellenlänge ist für diesen Fall größer als der Radius der Platte, denn für $\beta = 0,237$ ergibt sich $\lambda = 26,5$ cm, während der Radius 17,8 cm ist. Allerdings liegen die Abweichungen nach der entgegengesetzten Richtung wie früher, die Absorption ist in diesem Falle kleiner als von der Theorie gefordert wird. Die Rechnung würde daher in diesem Falle zu einem positiven Wert des Scherungsmoduls führen. Die Relaxationszeit würde einen sehr hohen Wert ergeben. Daß dies für Olivenöl nicht zutrifft, das zeigen die Werte von β bei den kleinen Schwingungsdauern, bei denen ja der Einfluß sehr viel stärker hervortreten müßte.

Messungen bei einer Schwingungsdauer von 92,12 Sek. hatten mit einer Sonde von 20 cm Länge einen zu hohen Wert von β ergeben, nämlich 0,197 bei $17,5^\circ$ an Stelle von 0,188. Ich möchte daher über die langsamen Schwingungen, zumal da für diese die Temperaturverteilung in der Flüssigkeit eine große Rolle spielt, zunächst noch nichts Definitives sagen, solange ich nicht ausführlichere Messungen mit Sonden verschiedener Länge durchgeführt habe.

25. *Beobachtungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen in Olivenöl.* — Da im vorhergehenden der Nachweis erbracht wurde, daß bei ebenen Wellen sich für den

Absorptionskoeffizienten die von der klassischen Theorie geforderte Dispersionsformel ergibt, so folgt ohne weiteres dasselbe für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, da die erste Fundamentalgleichung $2\eta/\rho = v/\beta$ allgemeine Gültigkeit hat. Die Methode der Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist weniger genau, daher verzichtete ich darauf, die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für eine größere Reihe von Schwingungsdauern durchzuführen.

Immerhin schien es mir von Interesse, wenigstens für die langsamen Schwingungen im Falle der ebenen Welle einige Messungen durchzuführen, denn gerade für die hohen Werte von τ ergaben sich in Tab. 10 die stärksten Abweichungen. In unmittelbarer Nähe der Platte konnten dabei keine Messungen angestellt werden, da für einen Beobachter die hier in Frage kommenden Zeitdifferenzen zu klein sind, um mit einiger Genauigkeit gemessen zu werden. Ich beschränkte mich daher bei den Beobachtungen auf einen mittleren Bereich. Die Mittelwerte aus einer größeren Reihe von Beobachtungen gibt die folgende Tabelle.

Tabelle 21.

θ	τ	v beob.	v ber.
19,8°	36,10	0,553	0,544
17,9	25,96	0,672	0,678

Die Versuche mit der Platte von 12 cm Durchmesser hatten für $\tau = 28,66$ Sek. einen Wert $v = 1,04$ ergeben. Man sieht, auch die Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit gehen mit wachsendem Störungsgebiete in die durch Gleichung (4) geforderten Werte über.

Ist die Bedingung der ebenen Welle erfüllt, so gilt für die Ausbreitung und Absorption der Scherungswellen in Olivenöl die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

in dem von uns untersuchten Bereich der Schwingungen.

26. *Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach der Resonanzmethode.* — Die Resonanzmethode liefert vielleicht etwas genauere Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit als

die direkte Methode. Wenigstens zeigen die einzelnen beobachteten Werte unter sich geringere Abweichungen. Einen großen Grad von Genauigkeit kann allerdings auch diese Methode nicht beanspruchen, denn bei der Bestimmung des Minimums der Dämpfung macht sich störend bemerkbar, daß dieses wegen der starken Absorption der Bewegung in der Flüssigkeit nicht scharf ausgeprägt ist. Aus der starken Absorption erklärt sich auch, daß das Minimum um so flacher wird, je größer die Wellenlänge ist. Es konnten daher nur für rasche Schwingungen bei Olivenöl und Glyzerin-Wassergemischen die Versuche ausgeführt werden. Dies bedingt aber eine Ungenauigkeit in der Bestimmung des log. Dekrementes. Immerhin lassen sich in einem beschränkten Gebiete brauchbare Resultate erzielen, solange nicht eine Störung eintritt, die sehr beträchtlich sein kann, und die durch geringe Verunreinigungen der Oberfläche, die eine Vermehrung der Dämpfung bewirken, bedingt ist. Dies machte sich bei Olivenöl nicht bemerkbar, dagegen sehr stark bei Glyzerin-Wassergemischen.

Die im folgenden mitgeteilten Werte wurden in Gemeinschaft mit Hrn. Lampe gewonnen. Das log. Dekrement wurde dabei aus Schwingungsbögen, die 50 Schwingungen auseinanderlagen, für verschiedene Abstände bestimmt und die Lage (l) des Minimums graphisch ermittelt. Unter den beobachteten Werten sind die aus $v = 4l/\tau$ gewonnenen gegeben, während bei den berechneten die Gültigkeit der Differentialgleichung (1) angenommen, und die Werte von η/ρ aus der Interpolationsformel (16) für Olivenöl und aus der Formel

$$\frac{\eta}{\rho} = 0,4032 + 0,01941(15 - \vartheta)$$

für Glyzerin-Wasser erhaltenen Werte zugrunde gelegt wurden.

Tabelle 22.
Olivenöl.

ϑ	$\frac{\tau}{2}$	v beob.	v ber.
18,6°	1,362	2,07	2,03
17,8	1,798	1,85	1,81
17,3	2,689	1,54	1,50

Tabelle 23.
Glyzerin-Wasser.

ϑ	$\frac{\tau}{2}$	v beob.	v ber.
17,6°	1,362	1,26	1,28
18,4	1,793	1,12	1,09
17,8	2,684	0,98	0,90

Zunächst zeigt sich, daß für Olivenöl die beobachteten Werte nur wenig größer sind als die berechneten. Auch für das Glycerin-Wassergemisch zeigt sich eine gute Übereinstimmung bis auf den letzten Wert. Die Abweichung ist in diesem Falle durch Verunreinigung der Oberfläche bedingt, die sich bei diesem Versuche stark geltend machte.

Die Erregerplatte hatte einen Durchmesser von 12 cm. Trotzdem sind die Abweichungen zwischen den beobachteten und berechneten Werten klein. Die direkt ermittelten Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit sind für Olivenöl um 6 bis 9 Proz. höher bei Verwendung derselben Erregerplatte. Dieses Resultat läßt sich erklären, wenn man annimmt, daß in der Nähe der Platte die Abweichungen von der ebenen Welle kleiner sind, was allerdings mit den Beobachtungen in 14. nicht übereinstimmt, daß v und β in der Nähe der Platte meist etwas größer gefunden wurden. Da in der Nähe der Platte sekundäre Umstände, wie Bildung stehender Wellen durch Reflexion von Bewegungsenergie an der Sonde (Streifen-sonde!) einen Einfluß ausüben können, so ist diesem Widerspruch vielleicht nicht allzu große Bedeutung beizumessen.

Wir dürfen jedoch nicht vergessen, daß wir es bei der Resonanzmethode mit einer Integralwirkung von reflektierten Wellen zu tun haben, und daher die Summe der Wirkungen sich so ergeben kann, als ob die Verteilung der Geschwindigkeit einer ebenen Welle entspräche. Eine genaue Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung in einer Ebene durch Sondenmessung wird daher wohl auch zur Klärung dieser Frage beitragen. Für größere Schwingungsdauern ist bei zähen Flüssigkeiten die Resonanzmethode nicht zu gebrauchen. Der Bereich der Anwendbarkeit der Methode ist daher weit beschränkter als der der direkten Methode. Die Versuchsergebnisse scheinen mir aber deswegen von Interesse, da sie zeigen, daß *zwei ganz verschiedene Methoden zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu demselben Resultate führen*, wenn die Versuchsbedingungen erfüllt sind, die eine Anwendung der Theorie gestatten.

Bestimmung des Reibungskoeffizienten.

Nachdem durch die vorhergehenden Versuche gezeigt wurde, daß die Gleichungen (3) und (4) erfüllt sind, so kann

natürlich eine Bestimmung von v bzw. β zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten dienen. Dies setzt allerdings eine genaue Messung von v bzw. β voraus, da das Quadrat dieser Größen in die Berechnung eintritt.

27. *Bestimmung des Reibungskoeffizienten von Wasser aus der Absorption von Scherungswellen.* — Ich habe als Versuchssubstanz Wasser gewählt. Die Versuche mit Wasser gestalten sich allerdings etwas schwieriger, da infolge der geringen Zähigkeit schwankende Bewegungen der Flüssigkeitsoberfläche nicht so rasch gedämpft werden und daher durch die Rückwirkung auf die Sonde die Genauigkeit der Beobachtung beeinträchtigen.

Der Einfluß von Luftströmungen, der sich hier stark bemerkbar machen würde, wurde dadurch eliminiert, daß der Raum, in dem das schwingende System und die Flüssigkeit sich befanden, gegen den Raum, in dem die Beobachtungen stattfanden, vollständig abgeschlossen war. Durch eine große Spiegelglasscheibe konnte Thermometer, Skala und Spiegel abgelesen werden.

Schwach pendelnde Bewegungen der Platte, sowie vor allem störende Einflüsse, die von Erschütterungen des Bodens herrührten, konnten allerdings nicht vollkommen eliminiert werden, obwohl der Stab zur Änderung des Trägheitsmomentes hier klein gewählt wurde.

Bei langsamen Schwingungen waren die Ausschläge der Sonde (bei Verwendung sehr feiner Kokonfäden) aber immerhin groß genug, daß es gelang, quantitative Messungen auszuführen.¹⁾ Es wurden dabei zwei Messungen in etwa 0,5 cm Abstand angestellt. Kleinere Abstände zu wählen, ist mißlich, da dann die Beobachtungsfehler zu stark ins Gewicht fallen, größere wurden nicht gewählt, da dann die Amplituden der Sonde

1) Neben den großen Nachteilen, die Wasser als Versuchssubstanz bietet, ist auch ein Vorzug gegenüber dem Olivenöl zu erwähnen. Da die Bewegung schon in kurzem Abstand von der Platte vollkommen absorbiert ist, da die Wärmeleitung von Wasser ca. 10mal so groß ist wie beim Öle, und bei der geringen Zähigkeit die infolge von Temperaturdifferenzen auftretenden Konvektionsströme viel weniger gedämpft werden, so ist die zum Versuche nötige konstante Temperaturverteilung hier viel rascher erreicht, wenn die Außentemperatur konstant bleibt. Die im folgenden mitgeteilten Versuche wurden nur vorgenommen, wenn man annehmen konnte, daß eine solche vorhanden war.

bereits so klein werden, daß die oben angeführten Störungen stark ins Gewicht fallen können.

Die Beobachtung wurde in der Weise durchgeführt, daß zunächst zwei Amplituden des Erregers, dann zehn Amplituden der Sonde und dann zwei Amplituden des Erregers beobachtet wurden. Aus dem Mittelwert der Amplituden des Erregers (die Dämpfung der Erregerplatte war stets sehr klein) und dem Mittelwert der Amplituden für die Sonde wurde α_1/α_{II} berechnet. Die beobachteten Einzelamplituden der Sonde wichen infolge der erwähnten Störungen mitunter nicht unerheblich voneinander ab, dagegen stimmten die für dieselbe Lage der Sonde in der angegebenen Weise ermittelten Werte von α_1/α_{II} gut miteinander überein. Aus einer größeren Reihe von solchen Werten¹⁾ α_1/α_{II} für zwei Abstände in ca. 0,5 cm Entfernung wurde η bestimmt.

Bei einer Schwingungsdauer von 52,43 Sek. wurden an zwei aufeinanderfolgenden Tagen Versuche angestellt. Dieselben ergaben

Tabelle 24.

ϑ	β beob.	β ber.
17,8°	2,379	2,376
18	2,390	2,382

Bei den berechneten Werten von β ist der Wert von η aus der von Heydweiller²⁾ aufgestellten Tabelle entnommen. Der Reibungskoeffizient wurde für 17,9° aus dem Mittelwert der beiden beobachteten Werte von β berechnet zu

$$0,01052,$$

während sich nach Heydweiller ergibt

$$0,01058.$$

Die Abweichungen betragen also 0,57 Proz. und damit ist gezeigt, daß der Reibungskoeffizient von Flüssigkeiten von der

1) Beobachtungen, bei denen durch größere Erschütterungen, wie sie durch rasch vorbeifahrende Wagen usw. bedingt sind, starke Störungen im Gange der Sonde auftraten, wurden dabei als gestört sofort unterbrochen und gestrichen, da Vorversuche ergeben hatten, daß in diesem Falle mitunter sehr stark abweichende Werte für α_1/α_{II} erhalten wurden.

2) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik 1901. p. 586.

Zähigkeit des Wassers sich aus dem Absorptionskoeffizienten ermitteln läßt. Es läßt sich allerdings nicht leugnen, daß die Verwendung der großen Scheibe und die dadurch bedingte relativ große Flüssigkeitsmenge für die praktische Anwendung der Methode störend ist. Es soll daher versucht werden, ob bei kleinen Platten die Methode zu relativen Messungen geeignet ist.

28. *Bestimmung des Reibungskoeffizienten von Wasser aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Scherungswellen.* — Größere Abweichungen ergaben sich, wie zu erwarten, wenn der Reibungskoeffizient aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ermittelt wurde. Ich habe die folgenden Beobachtungen auch nur ausgeführt, um zu prüfen, ob die Größenordnung der beobachteten Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Theorie übereinstimmt. Bei 16° wurde eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von

$$v = 0,05227 \text{ cm/sec}$$

beobachtet, während sich durch Rechnung ergibt

$$v = 0,05161 \text{ cm/sec.}$$

Wenn die beiden Werte bei dem geringen Abstand, in dem die Messungen angestellt wurden, eine Übereinstimmung zeigen, die nicht zu erwarten war, so liegt es daran, daß die Unterschiede der beobachteten Zeitdifferenzen infolge des kleinen Wertes von v sehr groß sind. Für η ergibt sich 0,01139 an Stelle von 0,01110.

29. *Prüfung einer Folgerung aus den Beobachtungen von Th. S. Schmidt.* — Es wurde schon früher erwähnt, daß aus den Beobachtungen von Schmidt über die Lage des Minimums bei der Dämpfung sich eine Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung ergibt und zwar würde die Abweichung einem großen Wert der Relaxationszeit entsprechen, nämlich über 3 Sek. Es mag fraglich erscheinen, ob die Bedingung der ebenen Welle bei den Versuchen von Schmidt (Radius der Platte $R = 8,413 \text{ cm}$, $\tau/2 = 29,8129 \text{ Sek.}$) erfüllt ist und inwieweit andere sekundäre Einflüsse eine Rolle spielen, jedenfalls schien es von Interesse, zu prüfen, ob eine so große Relaxationszeit vorhanden ist. Es wurde daher noch ein Versuch bei einer Schwingungsdauer von $\tau/2 = 4,96 \text{ Sek.}$ angestellt. Hier sind die Beobachtungsfehler allerdings bereits sehr groß, da als

maximaler Abstand ca. 0,25 cm gewählt werden mußte. Es müßte jedoch jedenfalls der Einfluß der großen Relaxationszeit in der Größe des beobachteten Absorptionskoeffizienten deutlich hervortreten. Bei $18,2^{\circ}$ wurde für β ein Wert von 5,453 beobachtet, während die Rechnung 5,488 ergibt. Die Relaxationszeit hat also für Wasser wie für Olivenöl einen kleinen Wert. Der aus β berechnete Wert des Reibungskoeffizienten 0,01063 gibt auch in diesem ungünstigen Fall noch einen brauchbaren Wert, da nach der Tabelle von Heydweiller sich der Wert 0,01050 ergibt.

Der Nachweis der Gültigkeit der klassischen Theorie auch für raschere Schwingungen scheint mir auch deswegen von Interesse, da die Methode der schwingenden Scheiben von O. E. Meyer in diesem Falle sich nicht anwenden läßt, da nur für langsame Schwingungen eine rasche Konvergenz der in der Theorie auftretenden Reihenentwickelungen stattfindet.

30. *Beziehungen der gewonnenen Beobachtungsergebnisse zu den Werten der Reibungskoeffizienten, die sich nach der Coulombschen Methode ergeben.* — Die Coulombsche Methode der schwingenden Scheiben liefert bekanntlich einen zu hohen Wert für den Reibungskoeffizienten. Der Reibungskoeffizient wird dabei aus der Dämpfung bestimmt, die durch die Rückwirkung der durch die Platte in Bewegung gesetzten Flüssigkeit entsteht.

W. König¹⁾ hat zuerst den aus der Dämpfung schwingender Platten bestimmten Wert von η mit dem nach der Transpirationsmethode bestimmten in Einklang gebracht, indem er ein Korrektionsglied einführte, das als eine Vermehrung des Trägheitsmomentes des schwingenden Systems angesehen werden kann. O. E. Meyer²⁾ hat diese Korrektion theoretisch begründet: „Die Flüssigkeit, und zwar sowohl die innerhalb des über und unter der Scheibe stehenden Zylinders vom Radius R , als auch die außerhalb desselben befindliche, teile ich durch horizontale Ebenen in unendlich dünne Schichten. In irgend einer dieser Schichten soll die Winkelgeschwindigkeit innerhalb des Zylinders, also so lange, als $r < R$ bleibt, nicht variieren, wohl aber außerhalb, also für $r > R$. Zwei solcher Schichten, welche einander berühren, üben Reibung

1) W. König, Wied. Ann. 32. p. 193. 1887.

2) O. E. Meyer, Wied. Ann. 32. p. 642. 1887.

aufeinander aus; aber diese Reibung will ich nur auf dem Teile der Berührungsfläche, welcher in den Zylinder $r=R$ hineinfällt, berücksichtigen; außerhalb desselben vernachlässige ich sie, denke mir also die außerhalb befindliche Flüssigkeit in einem solchen Zustande, daß eine Übertragung von Geschwindigkeit durch Reibung nur in horizontaler, nicht aber in vertikaler Richtung geschehen kann.“ Bei der Berechnung der log. Dekremente nach der Formel von König findet O. E. Meyer, daß die berechneten Werte des log. Dekrementes kleiner sind als die beobachteten, wenn auch die Übereinstimmung eine bessere ist als früher.

Wie die Messungen in 22. gezeigt haben, trifft die Annahme, daß die Winkelgeschwindigkeit im Raume I der Fig. 6 in einer Ebene konstant ist, nicht zu. Eine Bestimmung der Verteilung der Winkelgeschwindigkeit in einer Ebene mit Sonden wäre daher auch für die Theorie der schwingenden Platten erwünscht. Es steht jedoch zu erwarten, daß bei Verwendung größerer Platten die direkt aus der Dämpfung bestimmten Werte von η eine bessere Übereinstimmung mit den nach der Transpirationmethode gefundenen Werten zeigen.

Daß die Coulombsche Methode zu hohe Werte des Reibungskoeffizienten geben muß, läßt sich nach den von uns gewonnenen Beobachtungsergebnissen leicht einsehen.

Stokes ¹⁾ behandelt den Fall der Dämpfung einer schwingenden Scheibe durch eine Flüssigkeit, deren Ausdehnung unbegrenzt ist. Er findet dabei für die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit

$$(I) \quad \omega = c e^{-\sqrt{\frac{\pi \varrho}{2 \tau \eta}} x} \sin \left\{ \frac{\pi}{\tau} t - \sqrt{\frac{\pi \varrho}{2 \tau \eta}} x \right\}$$

und für die Bewegung der Platte, wenn Θ die Ablenkung der Platte aus der Gleichgewichtslage ist, in erster Annäherung

$$\Theta = \Theta_0 e^{-\frac{\pi \gamma}{\tau} t} \sin \left(\frac{\pi}{\tau} t + \alpha \right),$$

wobei

$$\gamma = \frac{R^4}{2K} \sqrt{\frac{\pi \varrho \eta}{\tau}},$$

wenn R den Radius der schwingenden Platte, K das Träg-

1) G. Stokes, Cambridge Phil. Trans. 9 II. 1851.

heitsmoment und τ die Schwingungsdauer der Platte¹⁾ ohne Dämpfung bezeichnet.

Für das log. Dekrement²⁾ folgt dann in erster Annäherung:

$$(II) \quad A = \frac{\pi R^4}{2 K} \sqrt{\frac{\pi}{2} \varrho \eta \tau}.$$

Der Ausdruck von Stokes für die Winkelgeschwindigkeit gilt nur, wenn die Verteilung der Winkelgeschwindigkeit der einer ebenen Welle entspricht, und dies trifft nach 22. nicht zu. Die Beobachtungen in 14. haben gezeigt, daß auch im Falle nicht ebener Wellen die Winkelgeschwindigkeit sich durch einen Ausdruck:

$$(Ia) \quad \omega = e^{-\beta x} \sin \frac{\pi}{\tau} \left\{ t - \frac{x}{v} \right\}$$

darstellen läßt. Dabei stellen β und v gewisse Mittelwerte des Absorptionskoeffizienten und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit dar, wie sie durch die Sonde gemessen werden. Dabei gilt für diese mittleren Werte die erste Fundamentalgleichung

$$\frac{2 \eta}{\varrho} = \frac{v}{\beta},$$

dagegen nicht die Dispersionsgleichung. Gehen wir von dem Ausdruck (Ia) aus und folgen im übrigen der Stokesschen Ableitung, so ergibt sich:

$$(IIa) \quad A = \frac{\pi R^4 \eta \beta \tau}{2 K}$$

bzw. unter Verwendung der ersten Fundamentalgleichung und der Beziehung $v = \lambda \tau$, die ebenfalls in jedem Falle gilt

$$A = \frac{\pi R^4}{4 K} \varrho \lambda,$$

d. h. *das logarithmische Dekrement der schwingenden Platte ist proportional der Dichte des umgebenden Mediums und der Wellenlänge der von der Platte ausgehenden Störung.*

Ist die Bedingung der ebenen Welle nicht erfüllt, dann ist v und damit λ größer als bei der ebenen Welle, wie die Versuche in Tab. 10 zeigen; es muß daher auch das logarith-

1) In diesem Falle entspricht die Schwingungsdauer der Zeit eines Hin- oder Herganges.

2) Bei O. E. Meyer tritt an Stelle von A der Ausdruck

$$A \left\{ 1 + \frac{A}{\pi} + \frac{5}{4} \frac{A^2}{\pi^2} + \frac{9}{4} \frac{A^3}{\pi^3} + \dots \right\},$$

vgl. Pogg. Ann. 113. p. 75. 1861.

mische Dekrement größer sein, als wenn die Dämpfung durch eine ebene Welle hervorgerufen würde.

Die Formel (IIa) geht in die Formel (II) über, wenn außer der bereits oben benutzten ersten Fundamentalgleichung auch die zweite Fundamentalgleichung zur Elimination der Fortpflanzungsgeschwindigkeit benutzt wird.

Die Methode der schwingenden Platten muß daher, da sie diesen Wert von Δ zur Berechnung benutzt, ebenso wie die direkte Methode der Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Werte von η ergeben, die zu groß sind, solange die Bedingung der ebenen Welle nicht erfüllt ist.

31. *Bedeutung der Relaxationstheorie für Flüssigkeiten.* — Wir haben gesehen, daß für Flüssigkeiten wie Olivenöl und Wasser die Relaxationszeit jedenfalls so klein ist, daß in dem Bereich der von uns untersuchten Schwingungen ein Einfluß der Relaxationszeit nicht nachzuweisen ist.

Natanson¹⁾ berechnet einige Relaxationszeiten aus den Messungen von G. de Metz²⁾ und Umlauf³⁾ über die Größe der Doppelbrechung, die in Flüssigkeiten bei der Deformation auftritt, die durch Rotation eines Zylinders erzeugt wird. Er findet für Rizinusöl bei 25° aus den Versuchen von G. de Metz $T = 0,0013$ Sek. Nimmt man an, daß die optisch gemessene Relaxationszeit der mechanischen entspricht⁴⁾, so berechnet sich, da nach den Beobachtungen von G. de Metz $\eta = 6,97$ ist, der Endwert, dem sich β nähert für Schwingungen, deren Schwingungsdauer sehr klein gegenüber der Relaxationszeit ist, zu

$$\beta = 5,13,$$

d. h. die Amplitude sinkt auf $\frac{1}{100}$ des Anfangswertes, wenn die scherende Deformation eine Strecke von 0,9 cm zurückgelegt hat. Man müßte, um in das Gebiet dieser Schwingungen zu kommen, bei denen der Scherungsmodul maßgebend für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist, zu Torsionsschwingungen übergehen, bei denen ca. 1000 Schwingungen in 1 Sek. erfolgen,

1) L. Natanson, Zeitschr. f. physik. Chem. 39. p. 355. 1902.

2) G. de Metz, Wied. Ann. 35. p. 497. 1888.

3) K. Umlauf, Wied. Ann. 45. p. 304. 1892.

4) Vgl. hierzu die folgende Arbeit des Verfassers „Über optische und mechanische Relaxationszeit“.

da für diesen Fall δ ca. 0,1 wird. Ist die mechanische und die optische Relaxationszeit identisch, so wird sich auch bei den raschesten Deformationen Rizinusöl nie wie ein durchsichtiger Körper in der Optik verhalten, sondern wie ein stark absorbierendes Medium, da nach einem Weg von 0,9 cm die Intensität bereits auf $1/_{10\,000}$ gesunken ist.

Die Relaxationszeiten, die Natanson aus den Versuchen von Umlauf berechnet, können leider nicht herangezogen werden, da Umlauf keine Reibungskoeffizienten bestimmt hat. Da die Relaxationszeiten aber von derselben Größenordnung, die Reibungskoeffizienten aber jedenfalls wesentlich kleiner sind, so gestalten sich hier die Verhältnisse noch wesentlich ungünstiger. Für eine Flüssigkeit von der Zähigkeit des Wassers ist bei derselben Relaxationszeit wie oben schon bei einem Weg von ca. 0,02 cm die Intensität auf $1/_{10\,000}$ gesunken.

Man sieht bei Flüssigkeiten, die eine geringe Zähigkeit besitzen, und deren Relaxationszeit ebenfalls sehr klein ist, kann *praktisch die Relaxationstheorie keine große Rolle spielen*, denn sie kommt nur für sehr rasche Schwingungen in Betracht und die Absorption ist in diesem Falle so groß, daß die Scherungswelle nur in unmittelbarer Nähe des Störungsgebietes auftritt.

Die Relaxationstheorie kann in diesem Falle nur zu einer *einfachen Ableitung der Bewegungsgleichungen für Flüssigkeiten* dienen. Sie spielt also dieselbe Rolle wie die Relaxationstheorie in der Elektrizitätslehre für Metalle.

Ganz anders liegen die Verhältnisse, wenn die Relaxationszeit oder der Reibungskoeffizient oder beide Größen große Werte annehmen. Die Untersuchung der Ausbreitung scherender Deformationen in solchen Medien hat für die *Erdbeben-theorie* ein spezielles Interesse, da sie Aufschluß gibt über die Ausbreitung von Scherungswellen in zähflüssigen Magmen.

32. *Zusammenfassung.* — Die hauptsächlichsten Resultate, die sich aus den Beobachtungen ergeben, sind:

1. In dem Bereich der untersuchten Schwingungsdauern breiten sich scherende Deformationen in Flüssigkeiten wie Olivenöl und Wasser nach den Gesetzen der klassischen Theorie der inneren Reibung aus.

2. Daraus ergeben sich zwei neue Methoden zur Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung, nämlich die

Bestimmung aus dem Absorptionskoeffizienten und die Bestimmung aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit scherender Deformationen.

3. Geht die Störung von einem endlichen Gebiete aus, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Absorption für die Randpartien zu groß gefunden.

Eine Welle schreitet um so rascher fort und wird um so stärker absorbiert, je kleiner das Störungsgebiet, d. h. je größer die Abweichung von der ebenen Welle ist.

4. Von den beiden aufgestellten Fundamentalgleichungen

$$\frac{2\eta}{\varrho} = \frac{v}{\beta},$$

$$\frac{2\pi}{\tau} = v\beta$$

ist die erste stets erfüllt, auch wenn das Störungsgebiet endlich begrenzt ist, d. h. die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und des Absorptionskoeffizienten von der Schwingungsdauer ist bis auf einen konstanten Faktor durch dieselbe Funktion der Schwingungsdauer gegeben.

Die zweite Beziehung ist nur für ebene Wellen erfüllt. In diesem Falle sind die Dispersionskurven für v und β , wenn man die Schwingungszahl $n = 1/\tau$ einführt, durch Parabeln gegeben.

5. Die Tatsache, daß die Methode von Coulomb zu hohe Werte des Reibungskoeffizienten gibt, finden dadurch eine Erklärung, daß das log. Dekrement in erster Annäherung der Länge der ausgesandten Welle proportional ist.

6. Ein Vorzug der Sondenmessung liegt darin, daß sie gestattet, eine Analyse der Flüssigkeitsbewegung selbst durchzuführen, während die übrigen Methoden Integralwirkungen benutzen.

7. Für Flüssigkeiten mit kleiner Zähigkeit und kleiner Relaxationszeit hat die Relaxationstheorie vorwiegend theoretisches Interesse. Praktische Bedeutung kann die Relaxationstheorie für zähflüssige Substanzen, speziell zähflüssige Magmen gewinnen, es ist daher eine Untersuchung solcher Substanzen im Interesse der Erdbebenforschung erwünscht.

Erlangen, Physikalisches Institut, Oktober 1909.

(Eingegangen 4. November 1909.)