

## Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik.

Von

A. Voss in Dresden.

---

Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten findet bekanntlich für ein System materieller Punkte Gleichgewicht statt, wenn die virtuelle Arbeit der gegebenen Kräfte für jede virtuelle Verschiebung der Angriffspunkte derselben verschwindet, die mit den Bedingungen der Beweglichkeit dieser Punkte verträglich ist. Diese Bedingungen pflegt man bei der vorstehenden allerdings speciellen Fassung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten in der Form von Gleichungen  $\varphi_i = 0$  zwischen den Coordinaten der Angriffspunkte vorauszusetzen, durch deren Variationen  $\delta\varphi_i = 0$  die Bedingungen für die Verschiebungen  $\delta$  gewonnen werden. *Thatsächlich gehen also nur die Bedingungen des Verschwindens jener Variationen in die Behandlung der statischen Probleme ein.* Damit erkennt man aber, dass es ganz gleichgültig ist, ob diese Variationen durch Bildung totaler  $\delta$  Prozesse  $\delta\varphi_i = 0$  entstanden sind, oder nicht. Man hat daher keinen Grund, die obige Fassung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten durch die speciellere analytische Formulirung desselben zu beschränken.

Um sich hiervon genauere Rechenschaft zu geben, betrachte man zunächst etwa das Gleichgewicht eines materiellen Punktes unter dem Einflusse beliebiger Kräfte mit den Componenten  $X, Y, Z$ , für den die Bedingung

$$P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0$$

bestehen soll. Die letztere aber ist der Ausdruck eines *Punktebenen-Systems*, und das durch sie definirte Gebilde kann in eben demselben Sinne als ein geometrisch vollkommen bestimmtes angesehen werden, wie etwa eine ideale feste Fläche, auf welcher der Punkt gezwungen ist zu bleiben; durch dasselbe wird jedem Punkte eine bestimmte Ebene oder vielmehr ein bestimmtes Flächenelement zugeordnet, in welchem die Verschiebungen vor sich zu gehen haben.\*) Von diesem aus können

---

\*) Vgl. über diese Auffassung meine Arbeit im XXIII Bande dieser Annalen S. 45 ff.

also nur, sobald man zunächst von Reibungswiderständen etc. absieht, normale Reactionen ausgehen, und man erhält daher als Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} X - \lambda P &= 0, \\ Y - \lambda Q &= 0, \\ Z - \lambda R &= 0, \end{aligned}$$

oder

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0.$$

Und von hier aus wird man, etwa in derselben Weise, wie dies von Lagrange in der *Théorie des fonctions* geschehen ist,<sup>\*)</sup> zu dem allgemeinen Falle aufsteigen in welchem für die Coordinaten der Punkte eines Systems eine gewisse Zahl von Bedingungen der Form:

$$\sum_{k=1}^n (p_{sk} \delta x_k + q_{sk} \delta y_k + r_{sk} \delta z_k) = 0$$

$$s = 1, 2 \dots r$$

vorgeschrieben ist. Damit ist aber wieder die Zulässigkeit der Bedingung

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

als Criterium des Gleichgewichts wenigstens im allgemeinen erwiesen.<sup>\*\*)</sup>

Mit dieser Bemerkung ist für die statischen Probleme höchstens in formaler Beziehung ein neuer Gesichtspunkt gewonnen. Anders aber scheint es in der *Dynamik* zu stehen. In dieser erweist sich die Annahme in den Coordinaten der Systempunkte *explíciter* Gleichungen  $\varphi_i = 0$  als eine solche, welche vom wesentlichsten Einflusse auf die ganze weitere Behandlung der dynamischen Untersuchungen wird. Ja, es ist geradezu vermöge der abgeschlossenen Gestalt, welche die analytische Mechanik seit Lagrange gewonnen hat, Gebrauch geworden, als *Differentialgleichungen der Mechanik* gewisse in Bezug auf die zweiten Differentialquotienten der Variablen nach der unabhängigen Veränderlichen  $t$  auflösbare Systeme simultaner Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu bezeichnen, wobei zwischen den unabhängigen Variablen noch eine Anzahl von in diesen expliciten Relationen (welche auch  $t$  enthalten können) bestehen.

Ueber die ganz hervorragende Wichtigkeit jenes eben erwähnten Falles kann sich natürlicherweise keine Frage erheben; doch möchte ich im folgenden wenigstens den *Versuch* machen, darauf hinzuweisen, dass auch in der Dynamik kein principieller Grund vorliegt, durch die übliche analytische Fassung jede andere erweiterte Fragestellung als

<sup>\*)</sup> Lagrange, *Théorie des fonctions*, Paris 1813, S. 350 ff.

<sup>\*\*)</sup> Vgl. übrigens die Bemerkung in Jacobi's Vorlesungen über Dynamik, S. 15.

undenkbar auszuschliessen, sondern dass vielmehr auch Bedingungen allgemeinerer Art gar wohl einen dynamisch vollkommen vorstellbaren Inhalt haben können.

Schon bei der Formulirung der dynamischen Differentialgleichungen im Sinne der gebräuchlichen Anschauung, an welcher, soweit mir bekannt ist, von allen Autoren festgehalten ist\*), kann der Fall eintreten, dass die Relationen  $\delta\varphi = 0$  nicht in der Form *totaler Variationen* gegeben sind, obwohl sie freilich auf solche sich zurückführen lassen. Ich erörtere diesen Fall zunächst etwas näher, von welchem aus ein Fortschreiten zu allgemeineren Annahmen ungezwungen möglich scheint.

Es seien nämlich  $r$  lineare Differentialausdrücke mit  $n$  Variablen  $x_1, x_2 \dots x_n$

$$(1) \quad \begin{aligned} & \sum_1^n p_{1i} dx_i, \\ & \sum_1^n p_{2i} dx_i, \\ & \vdots \\ & \sum_1^n p_{ri} dx_i \end{aligned}$$

gegeben, in denen die  $p_{ki}$  nur die  $x$  enthalten mögen. Alsdann wird zu fragen sein, wann dieselben ebensoviel totalen Differentialen äquivalent gesetzt werden können. Dazu ist erforderlich, dass durch Multiplication mit gewissen Multiplicatoren  $\lambda_i$  und Addition totale Differentiale aus ihnen herorgehen, d. h. es müssen Gleichungen von der Form

$$(2) \quad \sum_1^r p_{ki} \lambda_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

bestehen. Wird nun das System der Differentialausdrücke (1) als *linear unabhängig* vorausgesetzt, so können nicht alle partialen Deter-

\*) Ich erwähne ausser der Darstellung in Lagrange's analytischer Mechanik selbst nur die von Jacobi, a. a. O. S. 52—57, und die in der Abstraction wohl am weitesten vorgeschrittene in Kirchhoff's Mechanik S. 21. Die erwähnte Annahme ist selbst in denjenigen Fällen festgehalten, wo man die Kräfte als Functionen der Zeit und der Differentialquotienten nach derselben vorauszusetzen sich veranlasst gesehen hat.

Die Darlegungen des Textes, bei denen auch die Bedingungen von den Geschwindigkeiten abhängig werden, dürften, selbst wenn man sich nicht entschliessen könnte, sie als der Mechanik angehörig anzusehen, doch zur Erläuterung der analytischen Prozesse beitragen, welche bei den dynamischen Differentialgleichungen zur Verwendung kommen. Vgl. übrigens die Anmerkung zur Seite 266.

minanten  $r^{\text{ten}}$  Grades aus den correspondirenden  $p_{ik}$  verschwinden. Man kann daher immer die aus den ersten  $r$  Gleichungen 2) etwa berechneten Werthe der  $\lambda$  in die letzten  $n - r$  einsetzen, und erhält so  $n - r$  lineare partielle Differentialgleichungen für die Function  $\varphi$ . Soll nun das System (1)\*  $r$  totalen Differentialen äquivalent sein, so muss demnach das System jener partiellen Differentialgleichungen  $r$  von einander unabhängige particuläre Integrale

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$$

besitzen. Die Bedingungen hierfür sind aber nach Jacobi und Clebsch bekannt; insbesondere sind sie durch Herrn Frobenius in eine zu algebraischen Untersuchungen sehr geeignete Form gebracht worden\*). In Rücksicht auf den vorliegenden Zweck wähle ich indessen das folgende Verfahren, jene Bedingungen zu erhalten.\*\*)

Man bringe die Gleichungen:

$$0 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1r} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2r} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{r1} & p_{r2} & \dots & p_{rr} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_r} \\ p_{l1} & p_{l2} & \dots & p_{lr} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \end{vmatrix}, \quad l = r + 1, \dots, n$$

durch die immer mögliche Division mit der nicht verschwindenden Determinante

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & \dots & p_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{r1} & \dots & p_{rr} \end{vmatrix}$$

auf die Form:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + \sum_1^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} a_{lp} = (A_l) \varphi.$$

Alsdann zieht die Existenz von irgend zwei der Gleichungen

$$(A_l) \varphi = 0, \quad (A_m) \varphi = 0$$

die neue Gleichung

$$(A_m A_l - A_l A_m) \varphi = 0$$

\*) Frobenius, Ueber das Pfaff'sche Problem. Journal v. Borchardt LXXXII, S. 270 ff.

\*\*) Vgl. Boole, Treatise on differential equations, supplementary volume p. 74 ff.

nach sich. Da in derselben weder  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$  noch  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}$  vorkommen, so kann dieselbe keine Folge aus den übrigen Gleichungen sein, d. h. es müssen ihre sämtlichen Coefficienten verschwinden. Und die hieraus hervorgehenden Bedingungen sind nothwendig und hinreichend, wenn das System der Differentialausdrücke (1) ein *vollständiges* sein soll,\*) oder wenn die  $n - r$  Gleichungen  $(A_i) \varphi = 0$   $r$  von einander in Bezug auf die Variablen  $x_1 \dots x_r$  unabhängige Integrale

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$$

besitzen sollen.

Unter der letzteren Voraussetzung aber giebt es dann auch ebenso viele Systeme von Multiplicatoren  $\lambda_s$ , welche durch  $\lambda_{s1}, \lambda_{s2}, \dots, \lambda_{sr}$  bezeichnet sein mögen, deren Determinante

$$(3) \quad \Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{r1} & \dots & \lambda_{rr} \end{vmatrix}$$

nicht verschwinden kann. Bezeichnet man nämlich die Functional-determinante der  $\varphi$  in Bezug auf die  $x_1 \dots x_r$  durch  $F$ , so folgt unmittelbar aus der leicht zu erweisenden Relation

$$P\Lambda = F$$

dass auch  $\Lambda$  nicht Null sein kann, da nach den über die Integrale  $\varphi$  gemachten Voraussetzungen  $F$  nicht verschwindet. Sind aber die Bedingungen des vollständigen Systems nicht erfüllt, so kann es möglich sein, dass eine kleinere Anzahl von totalen Differentialen nach dem angegebenen Verfahren sich ermitteln lässt, so dass etwa die gegebenen Ausdrücke (1) sich ersetzen lassen durch die folgenden:

$$d\varphi_1, d\varphi_2, \dots, d\varphi_h, \\ \sum_1^n p_{h+1,i} dx_i, \dots \sum_1^n p_{ri} dx_i.$$

In diesem Falle ist jedoch die Möglichkeit einer weiteren Reduction noch nicht völlig ausgeschlossen, sobald es sich um die gleich Null gesetzten Ausdrücke (1) handelt. Denn da bei der vorliegenden Untersuchung in den Integralen

$$\varphi_1 = \text{const}, \varphi_2 = \text{const}, \dots, \varphi_h = \text{const},$$

die Constanten ganz specielle, durch die Anfangspositionen der System-

\*) Vgl. insbesondere den hierfür von Herrn A. Mayer gelieferten Beweis in dessen Abhandlung diese Annalen V, S. 450 ff. Nach der daselbst eingeführten Bezeichnungsweise bilden die gleich Null gesetzten Ausdrücke 1) ein *unbeschränkt integrables System*, wenn die obigen Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind.

punkte etwa bestimmte Werthe haben, kann es geschehen, dass durch Elimination von  $h$  Variablen mit Hülfe jener Gleichungen die übrigen Differentialausdrücke wieder einer weiteren Behandlung zugänglich werden. In jedem Falle aber wird sich nach dem obigen Verfahren entscheiden lassen, in welcher Weise das System der Gleichungen  $\sum p_i dx_i = 0$  durch explicite Gleichungen und andere Differentialrelationen sich ersetzen lässt.

Man übersieht nun leicht, dass, falls überhaupt eine Reduction in dem einen oder anderen Sinne auf  $r$  explicite Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_r = 0$$

möglich ist, an Stelle der Differentialgleichungen

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \sum_1^r \nu_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

auch gleich die direct zu bildenden

$$(4) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = m_i x_i'' = X_i + \sum_1^r \mu_s p_{si}$$

angesetzt werden können. \*) Diese letztere Form ist die einzig mögliche, wenn, wie im folgenden vorausgesetzt werden soll, das System der gegebenen Differentialrelationen keiner weiteren Reduction fähig ist, oder überhaupt von einer weiteren directen Behandlung derselben zunächst ganz abgesehen werden soll, was im Interesse einer symmetrischen Rechnungsweise vorthellhaft erscheinen kann.

Zur Einführung neuer Variablen kann man sich auch hier des Lagrange-Hamilton'schen Integrals

$$\int \left( T + U + \sum_1^r \mu_s p_s \right) dt$$

bedienen, falls man unter  $T$  die lebendige Kraft  $\frac{1}{2} \sum (m_i x_i'')$  des Systemes, unter  $U$  und  $p_s$  aber Symbole versteht, welche durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta U &= \sum X_i \delta x_i, \\ \delta p_s &= \sum p_{si} \delta x_i, \quad s = 1, \dots, r \end{aligned}$$

definiert sind. Dagegen lässt sich die Umformung der Gleichungen nicht mehr auf ein eigentliches Variationsproblem zurückführen, viel-

---

\*) Der Einfachheit halber werde ich die Variablen  $x_i, y_i, z_i$  sämmtlich durch das System  $x_i$  bezeichnen, in welchem der Index  $i$  von 1 bis  $n$  geht.

mehr bildet die Eigenschaft des Systemes (1), ein vollständiges zu sein, hierzu die nothwendige und hinreichende Voraussetzung.

Soll nämlich die Variation des Integrales

$$\int (T + U) dt$$

unter Voraussetzung der zu (1) gehörigen Bedingungen, welche nunmehr in der Form

$$(5) \quad \sum_1^n p_{si} x_i' = 0, \quad s = 1, \dots, r$$

geschrieben werden mögen, verschwinden, so erhält man durch Bildung von

$$\delta \int \left( T + U + \sum_1^n \sum_1^r \lambda_s p_{si} x_i' \right) dt = 0$$

in bekannter Weise die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_1^n k \left[ \frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x_k'} + X_k - \sum_1^r \frac{d\lambda_s}{dt} p_{sk} \right] \delta x_k \\ & + \sum_1^n \sum_{i,k} \lambda_s (sik) x_i' \delta x_k, \end{aligned}$$

in der

$$(sik) = - (ski) = \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} - \frac{\partial p_{sk}}{\partial x_i}$$

gesetzt worden ist. Damit nun dieselbe, falls weitere Relationen zwischen den Variationen  $\delta$  nicht vorhanden sind, auf die Gleichungen der Mechanik führe, müssen, da alsdann auch die  $\lambda_s$  keiner weiteren Beschränkung unterworfen werden dürfen, die Gleichungen

$$\sum_1^n (sik) x_i' = \sum_1^r \mu_i^s p_{ik}, \quad \begin{aligned} s &= 1, \dots, r, \\ k &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

vermöge der Relationen (5) bestehen. Dazu ist aber das Verschwinden der Covarianten

$$\sum_1^n \sum_1^n (sik) x_i' y_k'$$

vermöge der Relationen

$$\sum_1^n p_{si} x_i' = 0, \quad \sum_1^n p_{si} y_i' = 0, \quad s = 1, \dots, r$$

erforderlich. Unter dieser Voraussetzung nun ist das System der Differentialausdrücke (1) ein vollständiges\*), gleichzeitig aber wird

$$\frac{\partial T'}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T'}{\partial x_k'} \right) + X_k - \sum_1^r \mu_s p_{sk} = 0$$

falls

$$\mu_s = \frac{d\lambda_s}{dt} - \sum_1^r \lambda_h \mu_{sh}$$

gesetzt wird. Dies aber war zu zeigen.

Die Multiplicatoren  $\mu_s$  in den Gleichungen (4) kann man in der gewöhnlichen Weise aus den durch Differentiation nach  $t$  mittelst (5) sich ergebenden Gleichungen

$$(6) \quad \sum_1^n \sum_k \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} x_i' x_k' + \sum_1^n X_i \frac{p_{si}}{m_i} + \sum_1^r \mu_h (hs) = 0$$

bestimmen, in denen zur Abkürzung

$$(sh) = (hs) = \sum_1^n \frac{p_{hi} p_{si}}{m_i}$$

gesetzt ist. Aus den Gleichungen (6) erhält man die Werthe der  $\mu_s$ . Denn die Determinante der  $(hs)$ , als Summe der Quadrate sämtlicher partialer Determinanten  $r^{\text{ten}}$  Grades aus dem System der Coefficienten in den Gleichungen (5) kann nur dann verschwinden, wenn jene letzteren gegen die Voraussetzung nicht von einander unabhängig wären.\*\*\*) Demnach werden die  $\mu_s$  Functionen der  $x$  und gerade rationale ganze Functionen zweiten Grades der  $x'$ . Hiernach kann man dann überhaupt von den Relationen (5) ganz absehen, und allein die Differentialgleichungen (4) betrachten, aus denen die  $r$  integrablen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \sum_1^n p_{si} x_i' = 0,$$

und bei geeigneter Constantenbestimmung wieder die (5) selbst folgen. Auf Grund dieser Festsetzungen wird es möglich, die sämtlichen höheren Differentialquotienten der  $x$  zu bestimmen, sobald nur die Anfangspositionen und Geschwindigkeiten (letztere gemäss den Gleichungen (5)) angenommen sind; d. h. es werden die Lösungen im allgemeinen von der Form

\*) Frobenius a. a. O.

\*\*) Jacobi, a. a. O., S. 140.



$$(7) \quad x_i = x_{i_0} + t x'_{i_0} + \frac{t^2}{2} x''_{i_0} + \dots$$

wobei der Index 0 sich auf den Anfangszustand bezieht.

Mit der Eigenschaft der  $\mu_s$ , gerade Functionen der Geschwindigkeitscomponenten zu sein, hängt der folgende Satz zusammen:

*Substituiert man in einem bestimmten Momente gleichzeitig bei allen Punkten des Systems an Stelle der vorhandenen Geschwindigkeiten die entgegengesetzt gleichen, so durchlaufen alle Punkte in umgekehrter Folge unter denselben Umständen eben diejenigen Bahnen, auf denen sie sich bis zu jenem Momente bewegt hatten. \*)*

Sind nämlich überhaupt die Gleichungen

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \psi_i$$

gegeben, in denen die  $\psi_i$  Functionen der  $x_i$  und gerade Functionen der  $x'_i$  sind, so werden die dritten Differentialquotienten ungerade Functionen dieser letzteren, die vierten wieder gerade und so fort in derselben Abwechselung. Bei gleichzeitiger Zeichenänderung aller  $x'_i$  werden also die Differentialquotienten gerader Ordnung ungeändert bleiben, die ungerader aber sämmtlich entgegengesetzte Werthe annehmen. Nimmt man nun an, dass die Bahnen von irgend einem Momente mit dem Index 0 ab sich für jeden Punkt in der Form (7) darstellen lassen, so ergibt sich für negative  $t$  offenbar dieselbe Bewegung, als wenn man gleichzeitig allen  $x'_i$  entgegengesetztes Vorzeichen ertheilt hätte, womit der Satz bewiesen ist.

Im Vorbeigehen sei nur bemerkt, dass die *Principe der Bewegung des Massenmittelpunktes und der Flächen* genau so wie in der gewöhnlichen Mechanik gelten, sobald entsprechende Voraussetzungen über die Coefficienten in den (5) getroffen werden. Von grösserem Interesse scheint es, dass der *Satz der lebendigen Kraft*

$$T - T_0 = \sum_1^n \int_{t_0}^t X_i dx_i$$

bestehen bleibt\*\*), insbesondere also auch das *Princip der lebendigen*

\*) Vgl. eine Bemerkung von Loschmidt in den Abh. der Wiener Academie LXXIII, Bd. II, S. 128. Die eigentlichen Bedingungen für die Möglichkeit einer solchen Umkehrbarkeit eines Systems sind daselbst indessen nicht ausgesprochen.

\*\*) Dies gilt auch für die aus dem oben behandelten Variationsproblem entspringenden Differentialgleichungen bei beliebiger Art der Relationen (5); allgemeiner noch, falls die linken Theile derselben durch irgend welche in den  $x'_i$  homogene Formen ersetzt werden. Auf Grund dieser Eigenschaft könnte man daran denken, überhaupt diejenigen Gleichungen zu denen man vermöge des

*Kraft*, sobald eine nur von den Coordinaten  $x_i$  abhängige *Kräftefunction*  $U$  (um beim einfachsten Falle stehen zu bleiben) vorhanden

Hamilton'schen Principes gelangt, als den obigen in gewissem Sinne gleichberechtigt anzusehen. Aber das Hamilton'sche Princip ist überhaupt kein eigentliches Princip der Mechanik, sondern hat — wenigstens zunächst — für dieselbe nur den Charakter einer analytischen Regel, welche *auch* die Differentialgleichungen der Bewegung liefert. Will man nicht von der Forderung abweichen, dass die Flächenelemente an sich nur normale Reactionen ausüben können, so hat man in der That an der obigen Fassung festzuhalten. Dasselbe geht übrigens, wie hier noch angeführt sei, auch aus dem *Princip des kleinsten Zwanges* hervor. Nach demselben muss nämlich die Summe

$$S = \sum_i^n \left[ \frac{1}{m_i} x_i'' - X_i \right]^2$$

ein Maximum-Minimum sein in Rücksicht auf alle diejenigen Werthe der  $x_i''$ , welche den Bedingungen

$$F_s = \sum_{i,k}^n \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} x_i' x_k' + \sum_i^n p_{si} x_i'' = 0, \quad s = 1, \dots, r$$

genügen. Aus den Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_k''} \left( S - \sum_s \lambda_s F_s \right) = 0$$

gehen aber unmittelbar die Gleichungen

$$\frac{1}{m_i} x_i'' = X_i + \sum_s^r \nu_s p_{si}$$

hervor. In der That besteht der einzige analytische Unterschied zwischen Problemen dieser Art und denen der üblichen Dynamik darin, dass im *ersten Falle die Bedingungen nicht von vornherein explicite bekannt sind*, dass aber vermöge der *Integration des simultanen Systems zweiter Ordnung dieselben mit bestimmt werden und genau dieselbe Rolle hinsichtlich ihrer dynamischen Wirkung spielen, wie in den sonst gebräuchlichen Untersuchungen*.

Betrachtet man die Bewegung eines materiellen Punktes, der durch eine Differentialrelation beschränkt ist, so ergiebt die Integration der Bewegungsgleichungen seine Bahn in Gestalt einer mit Flächenelementen bedeckten Curve, eines *Streifens*, wie man sich ausdrücken kann. Construiert man nun eine Oberfläche  $F = 0$ , welcher dieser Streifen angehört, so kann natürlich dieselbe Bewegung auch dadurch hervorgerufen werden, dass zu den Bewegungsgleichungen noch  $F = 0$  als Bedingung hinzutritt, sobald nur der Anfangszustand ungeändert bleibt. Eine ähnliche Ueberlegung aber gilt, soweit ich sehe, auch für ein beliebiges Punktsystem, so, dass man auch sagen kann:

Die Bewegungsvorgänge, welche durch die erweiterte Form der Bewegungsgleichungen ausgedrückt werden, sind keine anderen, als diejenigen, welche auch mittelst der bisher üblichen Ausdrucksweise beschrieben werden können; aber sie liefern dieselben in einer principiell einfacheren Darstellung, insofern z. B. an Stelle willkürlicher Flächen, von denen nur Streifen in Betracht kommen, vollkommen bestimmte Differentialrelationen in die Untersuchung eingeführt werden.

ist. Damit gelten dann aber auch diejenigen allgemeinen Sätze, welche unmittelbare Konsequenzen dieses letzteren Principes sind (Eigenschaften der Niveauflächen etc. . .) Zu diesen pflegt man insbesondere das *Criterion der Stabilität* zu rechnen, nach welchem stabiles Gleichgewicht nur dann vorhanden ist, wenn die Kräftefunction für die Gleichgewichtslage des Systemes ein Maximum ist.

In der Theorie der Maxima und Minima wird freilich der Fall nicht behandelt, in dem die Function  $U$  der  $x$  ein Maximum oder Minimum sein soll in Rücksicht auf gegebene Differentialrelationen von der Form (5). In der That würde auch eine solche Forderung im allgemeinen keinen Sinn haben. Aber in Rücksicht auf alle Bahnen, welche von einer Gleichgewichtslage aus das System im Einklange mit jenen Bedingungen einschlagen kann, kann die Function  $U$  dieser Eigenschaft sehr wohl fähig sein. Denn bezeichnet man den Zuwachs irgend einer Coordinate von dem durch den Index 0, welcher der Gleichgewichtslage entsprechen möge, fixirten Momente an gerechnet, durch

$$tx'_{i_0} + \frac{t^2}{2} x''_{i_0} + \dots,$$

so wird der Zuwachs  $\Delta U$  von  $U$ , unter Voraussetzung der Gleichgewichtsbedingungen

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_0 + \sum_1^r h_s p_{si_0} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

die Form

$$\Delta U = \frac{t^2}{2} \sum_1^n i \left[ \frac{\partial U}{\partial x_i} x''_{i_0} + \sum_1^n k \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} x'_{i_0} x'_{k_0} \right]_0 + \dots$$

annehmen. Da aber

$$\sum_1^n i p_{ri_0} x''_{i_0} + \sum_1^n i \sum_1^n k \left( \frac{\partial p_{ri}}{\partial x_k} \right)_0 x'_{i_0} x'_{k_0} = 0$$

ist, so erhält man

$$\Delta U = \frac{t^2}{2} \sum_1^n i \sum_1^n k \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_1^r h_s \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} \right]_0 x'_{i_0} x'_{k_0} + \dots$$

Wofern nun die hier auftretende quadratische Form

$$\sum_1^n i \sum_1^n k \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_1^r h_s \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} \right]_0 x'_{i_0} x'_{k_0}$$

oder

$$(8) \quad \sum a_{ik} x'_i x'_k$$

in Rücksicht auf die Relationen (5) von definit negativem Charakter ist,

kann man  $U$  die Maximumeigenschaft in Beziehung auf alle möglichen von der Gleichgewichtslage ausgehenden Bewegungen des Systems zuschreiben.

Im Anschluss an eine bekannte Schlussfolgerung der theoretischen Mechanik scheint somit das Paradoxon aufzutreten, dass auch hier dieser definite Charakter zur Stabilität des Gleichgewichtes nothwendig und hinreichend sei. Indessen ist es leicht, sich von der Unrichtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. Denn eine aufmerksame Betrachtung des Dirichlet'schen Beweises\*) auf den sich jene Untersuchung zu stützen hat, zeigt, dass derselbe nicht allein jene Maximumeigenschaft voraussetzt, sondern ausserdem verlangt, dass unabhängig von den beständig negativen Werthen des  $\Delta U$  für die lebendige Kraft in der Anfangsposition (als welche hier die Gleichgewichtslage selbst der grösseren Uebersichtlichkeit halber gedacht ist) ein Werth festgesetzt werden könne, der kleiner als gewisse in jenem Beweise definirte Werthe von  $-\Delta U$  ist. Dies ist aber in dem vorliegenden Falle nicht möglich, wo  $\Delta U$  (bis auf Glieder höherer Ordnung) durch eine mit  $t^2$  multiplicirte quadratische Function der Anfangsgeschwindigkeiten ausgedrückt ist.

Eine nähere Untersuchung zeigt, dass jene quadratische Form (8) überhaupt mit der Frage der Stabilität in keinem entscheidenden Zusammenhange mehr steht, sobald man die in der Mechanik üblichen Voraussetzungen fallen lässt, (d. h. die Relationen (5) kein vollständiges System mehr bilden). Die wahren Bedingungen für eine stabile Bewegung erhält man dagegen durch *Untersuchung der kleinen Schwingungen des Systemes*.

Behufs desselben werde angenommen, dass in jeder Coordinate  $x = x_0 + \xi$  die Zunahmen  $\xi$  so klein seien, dass die zweiten Potenzen derselben gegen die ersten zu vernachlässigen sind und dass auch die Geschwindigkeiten  $\xi'$  von der Ordnung dieser Kleinheit seien.

Aus den Differentialgleichungen

$$m_i x_i'' = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_1^r \mu_s p_{si}$$

wird nunmehr, wenn  $x = x_0 + \xi$ ,  $\mu_s = \mu_s^0 + \eta_s$  gesetzt wird,

\*) Journal v. Crelle XXXII, S. 35, vgl. auch Schell, Mechanik S. 540. Die im Texte entwickelte Betrachtung scheint mir nicht überflüssig, weil namentlich in denjenigen Vorstellungen, die durch das Princip der Energie in die Fundamentaltheoreme der Mechanik eingeführt sind, lediglich mit dem Begriffe des Maximums operirt wird. Vgl. z. B. Thomson und Tait, Treatise on natural philosophy Vol I, § 292 (1883). Diese Betrachtungsweise ist allerdings völlig ausreichend, weil in der That die Kräftefunction dann ganz unabhängig von den  $x'$  und der Zeit in die Untersuchung eingeht.

$$m_i \xi_i'' = \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_0 + \sum_1^r (\mu_s p_{si})_0 + \sum_1^n \sum_k^r \left( -\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_1^r \mu_s \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} \right) \xi_{sk} \\ + \sum_1^r \eta_s p_{si_0},$$

während aus den Bedingungsgleichungen

$$\sum_1^n \sum_k^r \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} \xi_i' \xi_k' + \sum_1^n \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} p_{si} + \sum_1^r \mu_h (sh) = 0,$$

in Verbindung mit den Gleichungen des Gleichgewichts folgt, dass

$$\mu_s^0 = h_s,$$

bis auf Grössen, welche von der Kleinheit der  $\xi$  sind, zu setzen ist. Damit reducirt sich aber das obige System auf das folgende, in welchem die  $\xi$  wieder Grössen von derselben Ordnung der Kleinheit sind, wie vorhin,

$$m_i \xi_i'' = \sum_1^n \alpha_{ik} \xi_k + \sum_1^r \xi_s p_{si_0}, \quad i = 1, \dots, n$$

falls

$$\alpha_{ik} = \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + \sum h_s \frac{\partial p_{si}}{\partial x_k} \right\}_0$$

gesetzt wird, welches nun in Verbindung mit den Gleichungen

$$\sum_1^n \xi_i' p_{si_0} = 0, \quad s = 1, \dots, r$$

aufzulösen sein wird. Zur Darstellung der  $\xi$  durch particuläre Integrale von der Form

$$\xi_i = e^{\lambda t} y_i$$

ist die Determinantengleichung  $n - r^{\text{ten}}$  Grades aufzulösen:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - m_1 \lambda^2 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & p_{11} \dots p_{r1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - m_2 \lambda^2 & \dots & \alpha_{2n} & p_{12} \dots p_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - m_n \lambda^2 & p_{1n} \dots p_{rn} \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \dots & p_{rn} & 0 \dots 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung hat, wenn die quadratische Form (8) *definit negativ*

ist, Wurzeln, von denen vermöge einer bekannten von Cauchy herührenden Ueberlegung nur behauptet werden kann, dass sie *im reellen Theile negativ sind*. Im vorliegenden Falle der Existenz stabiler Schwingungen ist aber zu verlangen, dass alle Wurzeln überhaupt reell und negativ seien.\*) Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man in bekannter Weise für die  $\xi$  und  $\xi'$  Ausdrücke, welche fortwährend beliebig klein bleiben und gleichzeitig mit der der Betrachtung zu Grunde liegenden Annäherung den Bewegungszustand des Systemes vorstellen.

Es sind nun, wie man weiss, sämtliche Wurzeln der obigen Gleichung reell, wenn die Determinante der  $\alpha_{ik}$  eine symmetrische ist. Dies findet zunächst nur statt, wenn die sämtlichen ( $sik$ ) verschwinden. Es lässt sich aber auch dann diese symmetrische Anordnung in der obigen Gleichung herstellen, wenn die Differentialrelationen (5) zu einem vollständigen System gehören. Denn alsdann kann man in Rücksicht auf die unter 3) bemerkte Eigenschaft der Determinante  $\Lambda$  die  $\mu_s^0$  in der Gestalt

$$\mu_s^0 = \sum_1^r \lambda_{sh}^0 v_h$$

voraussetzen, wo die  $\lambda_{sh}^0$  die der Gleichgewichtslage entsprechenden Werthe der Multiplicatoren des vollständigen Systemes sind. Nun ist aber:

$$\sum_1^r \lambda_{hs} p_{hi} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}, \quad \sum_1^r \lambda_{hs} p_{hk} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k},$$

also auch

$$\sum_s^r \sum_h^r v_s \left( \frac{\partial \lambda_{hs}}{\partial x_k} p_{hi} - \frac{\partial \lambda_{hs}}{\partial x_i} p_{hk} \right) + \sum_s^r \sum_h^r v_s \lambda_{hs} (hik) = 0$$

$$i, k = 1, \dots, n$$

oder

$$\begin{aligned} \sum_1^r \mu_h^0 \left( \frac{\partial p_{hi}}{\partial x_k} \right)_0 + \sum_s^r \sum_h^r v_s \left( -\frac{\partial \lambda_{hs}}{\partial x_k} p_{hi} \right)_0 &= \sum_1^r \mu_h^0 \left( \frac{\partial p_{hk}}{\partial x_i} \right)_0 \\ &+ \sum_s^r \sum_h^r v_s \left( -\frac{\partial \lambda_{hs}}{\partial x_i} p_{hk} \right)_0 \end{aligned}$$

und durch diese Relationen lässt sich, wie man leicht sieht, bewirken, dass die obige Determinante zu einer symmetrischen umgewandelt wird; man hat nur die letzten  $r$  Reihen des horizontalen und verticalen Randes mit geeigneten Factoren multiplicirt zu den  $\alpha_{ik}$  hinzugefügt

\*) Vgl. auch Thomson und Tait a. a. O. § 344, § 345.

sich vorzustellen. Alsdann sind aber alle Wurzeln sicher reell und die vollständigen Kriterien der Stabilität lassen sich also auch hier ohne weitergehende Untersuchungen *algebraisch* aus den  $p_{ik}$  und deren Differentialquotienten ermitteln.\*)

Das *Princip des Jacobi'schen Multipliers*, angewandt auf die Differentialgleichungen (4), (5), erfordert, dass sich für die partielle Differentialgleichung

$$\frac{d \log M}{dt} + \sum_s^r \sum_i^n \frac{1}{m_i} \frac{\partial \mu_s p_{si}}{\partial x_i'} = 0$$

ein (particuläres) Integral angeben lasse. Für die in derselben auftretenden Differentialquotienten der  $\mu_s$  erhält man durch die von Jacobi gelehrte partielle Differentiation der (6) die  $r$  Gleichungen:

$$(9) \quad \sum_h^r (sh) \frac{\partial \mu_h}{\partial x_i'} + 2 \frac{dp_{si}}{dt} + \sum_k^n (ski) x_k' = 0$$

$$s = 1, \dots, r.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung nun

$$\sum_s^r \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\partial \mu_s p_{si}}{\partial x_i'}$$

durch  $H_i$ , so folgt zur Bestimmung dieser Grösse die Gleichung

$$(10) \quad \begin{vmatrix} (11) \dots (1r) & 2 \frac{dp_{1i}}{dt} + \sum_k^n (1ki) x_k' \\ \vdots & \vdots \\ (r1) \dots (rr) & 2 \frac{dp_{ri}}{dt} + \sum_k^n (rki) x_k' \\ p_{1i} \dots p_{ri} & - H_i m_i \end{vmatrix} = 0.$$

Werden die Determinante der  $(rs)$  durch  $\Delta$ , ihre Unterdeterminanten durch  $\Delta_r$ , bezeichnet, so erhält man aus (10)

$$\Delta H_i + \sum_{k,h}^n \sum_s^r \left\{ 2 \frac{dp_{hi}}{dt} + (hki) x_k' \right\} \frac{p_{si}}{m_i} \Delta_{hs} = 0,$$

\*) Für diesen letzteren Fall enthält die obige Darstellung eine formell erweiterte Darlegung der Theorie der kleinen Schwingungen, welche seit Lagrange immer nur unter Voraussetzung expliciter unabhängiger Coordinaten behandelt zu sein scheint.

also wenn man nach  $i$  summirt und den Werth in die Multiplicatorgleichung einträgt

$$\Delta \frac{d \lg M}{dt} = \sum_1^r h_{,s} \Delta_{hs} \frac{d(hs)}{dt} + \sum_1^n \sum_1^r h_{,s} (hki) x_k' \frac{p_{si}}{m_i} \Delta_{hs},$$

oder

$$(11) \quad \Delta \frac{d \lg M}{dt} = \frac{d\Delta}{dt} + A,$$

indem man die vierfache Summe rechts durch  $A$  bezeichnet. Hieraus ergibt sich nur dann das Jacobi'sche Resultat  $M = \Delta^*$ , wenn die Form  $A$  identisch oder vermöge der Gleichungen (5) verschwindet, d. h. wenn entweder alle  $(hki)$  Null sind, oder wenn es  $r$  Grössen  $h_s$  giebt, welche die  $n$  Gleichungen

$$\sum_1^n \sum_1^r s_{,h} (hki) \frac{p_{si}}{m_i} \Delta_{hs} = \sum_1^r h_s p_{sk},$$

$$k = 1, \dots, n$$

befriedigen. Multiplicirt man dieselben mit den Ausdrücken

$$\sum_1^r \frac{p_{jk}}{m_k} \Delta_{tj}$$

und summirt nach  $k$ , so entsteht

$$h_t \Delta = \sum_1^n \sum_1^r s_{,h,j} \Delta_{th} \Delta_{js} \frac{p_{hk} p_{si}}{m_i m_k} (j i k).$$

Die rechte Seite aber wird, wenn man  $i$  mit  $k$  und dann  $h$  mit  $s$  vertauscht

$$\frac{1}{2} \sum (\Delta_{th} \Delta_{js} - \Delta_{ts} \Delta_{jh}) \frac{p_{hk} p_{si}}{m_i m_k} (j i k);$$

somit entsteht, wenn man beiderseits den Factor  $\Delta$  entfernt, vermöge einer bekannten Determinantenformel

$$h_t = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \sum_1^r s_{,j,s} \frac{p_{hk} p_{si}}{m_i m_k} (j i k) \Delta_{th,js},$$

wo nun  $\Delta_{th,js}$  eine zweite Unterdeterminante von  $\Delta$  bedeutet. Man hat damit die Bedingungen für die Existenz dieses Jacobi'schen Multiplicators in expliciter Form, falls man den gefundenen Werth von  $h_t$  in die obigen  $n$  Bedingungen einträgt.

---

\*) Jacobi a. a. O. S. 132—141.



Ich untersuche jetzt die Form des Multipliers unter der Voraussetzung, dass die Relationen (5) überhaupt ein vollständiges System bilden. Da die Determinante  $\Lambda$  nicht verschwindet, so kann man auch setzen

$$(12) \quad p_{si} = \sum_1^r \lambda'_{hs} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i},$$

wo nunmehr die  $\lambda'_{hs}$  die Coefficienten der zur Substitution  $\lambda_{hs}$  reciproken Substitution bedeuten, deren Determinante  $\Lambda' = \frac{1}{\Lambda}$  ist. Ferner wird

$$(st) = \sum_1^n \frac{p_{si} p_{ti}}{m_i} = \sum_1^r \lambda'_{hs} \lambda'_{jt} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} = \sum_1^n \lambda'_{hs} \lambda'_{jt} [hj],$$

so dass, wenn man mit  $\Delta'$  die Determinante der

$$\sum_1^n \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} = [hj] = [jh]$$

bezeichnet,  $\Delta = \Delta' \Lambda'^2$  sein wird. Führt man nun die Ausdrücke (12) in die Form A (11) ein, so ergibt sich

$$A = \sum_1^n \sum_1^r \lambda'_{hs} \left\{ (hki) x'_k \Delta_{hs} \lambda'_{js} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} \right\}.$$

Aus (12) findet man ferner

$$(hki) = \sum_1^r \left( \frac{\partial \lambda'_{th}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_k} - \frac{\partial \lambda'_{th}}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i} \right),$$

also, da nach (12) und (5) die  $\frac{d\varphi_i}{dt}$  sämmtlich Null sind

$$\sum_1^n (hki) x'_k = - \sum_1^r \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i} \frac{d\lambda'_{th}}{dt}.$$

Darnach wird

$$A = - \sum_1^n \sum_1^r \lambda'_{hs} \lambda'_{js} \left\{ \frac{\Delta_{hs}}{m_i} \frac{d\lambda'_{th}}{dt} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\},$$

oder, wenn man  $s$  mit  $h$  vertauscht und nach  $i$  summirt

$$A = - \frac{1}{2} \sum_1^r \lambda'_{hs} \lambda'_{th} \left\{ \Delta_{hs} [th] - \frac{d(\lambda'_{ts} \lambda'_{th})}{dt} \right\}.$$

Diesen letzteren Ausdruck kann man aber leicht so umformen, dass die Formel für M (11) integrabel wird. Denn aus der Gleichung

$$\Delta = \Delta' \Lambda^2$$

folgt durch totale Differentiation nach  $t$

$$\begin{aligned} \Lambda^2 \frac{d\Delta'}{dt} + \Delta' 2 \frac{\Lambda' d\Lambda'}{dt} &= \sum_1^r h_{s,j,t} \Delta_{h,s} \lambda'_{j,s} \lambda'_{t,h} \frac{d[tj]}{dt} \\ &+ \sum_1^r h_{s,t,j} \Delta_{h,s} [tj] \frac{d(\lambda'_{j,s} \lambda'_{t,h})}{dt}. \end{aligned}$$

Beachtet man, dass in dieser Gleichung der erste Theil rechts dem ersten Theile links für sich gleich sein muss, da die Differentiation sich beidemale gar nicht auf die Substitutionscoefficienten erstreckt, so hat man

$$\Delta' 2 \frac{\Lambda' d\Lambda'}{dt} = \sum_1^r h_{s,t,j} \Delta_{h,s} [tj] \frac{d(\lambda'_{j,s} \lambda'_{t,h})}{dt},$$

oder

$$A = - \frac{d\Lambda'}{dt} \frac{\Delta}{\Lambda'},$$

also

$$\frac{d \log M}{dt} = \frac{d \log \Delta}{dt} - \frac{d \log \Lambda'}{dt},$$

mithin

$$M = \frac{\Delta}{\Lambda'} = \Delta \Lambda$$

als Multiplikator, welcher freilich die Kenntniss der Determinante  $\Lambda$  voraussetzt, die im Allgemeinen ohne Integration des vollständigen Systems nicht zu ermitteln sein wird.

Die Form derselben giebt aber zu einer weiteren Bemerkung Veranlassung, welche, wie ich glaube, bei Untersuchungen über Multiplikatoren transformirter Systeme von Differentialgleichungen von Nutzen sein kann.

Das System der Differentialgleichungen

$$(13) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \sum_1^r v_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

mit den Bedingungen

$$\varphi_1 = c_1, \dots, \varphi_r = c_r,$$

in denen die  $c$  auch willkürliche Constanten sein mögen, hat nämlich den aus der Multiplikatorgleichung

$$\frac{d \log N}{dt} + \sum_1^n \sum_1^r \frac{1}{m_i} \frac{\partial v_s}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} = 0$$

folgenden Jacobi'schen Multiplikator  $N = \Delta'$ , falls die Grössen  $v_s$  und deren Differentialquotienten durch die Gleichungen  $\frac{d^2 \varphi_s}{dt^2} = 0$  bestimmt werden. Führt man nun an Stelle der Relationen  $d\varphi_s = 0$  vermöge der Gleichungen (12) das äquivalente System (5) ein, so erhält die transformirte Multipliegatorgleichung

$$(14) \quad -\frac{d \log M'}{dt} + \sum_1^n \sum_1^r \frac{1}{m_i} \frac{\partial \mu_s p_{si}}{\partial x'_i} = 0$$

unter der Voraussetzung, dass die partiellen Differentialquotienten der  $\mu_s$  aus den transformirten Relationen  $\frac{d^2 \varphi_h}{dt^2} = 0$ , oder

$$(15) \quad \sum_1^n x'_i \frac{dp_{hi}}{dt} - \sum_1^n \sum_1^r \frac{\partial \varphi_s}{\partial x'_i} x'_i \frac{d\lambda'_{sh}}{dt} + \sum_1^r \mu_s [sh] \\ + \sum_1^n \frac{X_i}{m_i} p_{hi} = 0,$$

bestimmt werden, die Form

$$\Delta \frac{d \log M'}{dt} = \frac{d\Delta}{dt} - 2\Delta \frac{d \log \Lambda'}{dt},$$

also wird

$$M' = \frac{\Delta}{\Lambda'^2} = \Delta' = N.$$

Der Multiplikator bleibt mithin, wie zu erwarten war, *ungeändert*. Anders aber ist es, wenn in den Gleichungen (15) der zweite Term links, welcher vermöge der Gleichungen  $d\varphi_s = 0$  verschwindet, fortgelassen wird; man erhält dann die Gleichungen (9) und aus diesen, wie gezeigt, den neuen Multiplikator  $M = \Delta \Lambda$ . Dies auf den ersten Anblick paradox erscheinende Resultat erklärt sich daraus, dass die Differentialgleichungen (13) nebst den Bedingungen  $\frac{d^2 \varphi_s}{dt^2} = 0$  mit den

4) nebst den Bedingungen  $\frac{d}{dt} \sum_1^r p_{si} x'_i = 0$  eben nicht durch blosse Transformation identisch werden, obwohl sie denselben völlig äquivalent sind.

In der That ergibt sich aus der allgemeinen Jacobi'schen Theorie des Multiplikators ebenfalls — und diese Erkenntniss nebst der hierauf bezüglichen im Folgenden gegebenen Untersuchung verdanke ich einer gütigen Mittheilung des Herrn A. Mayer — dass beide Formeln genau zu demselben Multiplikatorwerthe für die vermöge der Bedingungsgleichungen reducirten und dann nothwendigerweise mit einander identischen Systeme (13) und (4) führen.

Dazu benutze man den bekannten Jacobi'schen Satz:

Sind von den  $n$  Differentialgleichungen:

$$(A) \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

$k$  Integrale

$$(B) \quad \varphi_1 = c_1, \dots, \varphi_k = c_k$$

bekannt, so dass, indem man  $x_1, \dots, x_k$  aus (B) berechnet und die Substitution ihrer Werthe durch Einschliessung in Klammern  $[]$  anzeigt, mittelst dieser Integrale das System zurückgeführt wird auf  $n - k$  Differentialgleichungen

$$(C) \quad \frac{dx_{k+1}}{dt} = [X_{k+1}], \dots, \frac{dx_n}{dt} = [X_n],$$

so liefert jeder Multiplicator  $M$  des Systemes (A) den Multiplicator

$$M' = \left[ \frac{M}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}} \dots \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} \right]$$

des Systemes (C), und dieser Satz gilt unverändert auch dann, wenn man den willkürlichen Constanten  $c$  bestimmte constante Werthe, z. B. sämmtlich den Werth Null beilegt, wenn man also nur diejenigen Lösungen des gegebenen Systemes (A) betrachtet, welche den particulären Integralen

$$\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_k = 0$$

genügen.

Nun besitzen die Jacobi'schen Differentialgleichungen (13) oder

$$(16) \quad \frac{dx_i}{dt} = x_i', \quad \frac{dx_i'}{dt} = \frac{1}{m_i} \left\{ X_i + \sum_1^r \nu_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \right\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

in denen die  $\nu_s$  als Functionen der  $x$  und  $x'$  durch diejenigen Gleichungen definirt sind, welche durch die Substitutionen (16) aus den  $r$  Gleichungen

$$(16'') \quad \frac{d^2 \varphi_s}{dt^2} = 0, \quad s = 1, \dots, r$$

hervorgehen, die  $2r$  Integrale

$$\frac{d\varphi_s}{dt} = c_s, \quad \varphi_s - t \frac{d\varphi_s}{dt} = \gamma_s.$$

Setzt man die  $c$  und  $\gamma$  hier gleich Null, so folgt aus dem angeführten Satze:

Ist  $M$  ein Multiplicator des Systemes (16), und hat man dann aus den  $r$  Gleichungen

$$\varphi_1 = 0 \dots \varphi_r = 0$$

etwa  $x_1 \dots x_r$  als Functionen von  $x_{r+1} \dots x_n$  bestimmt und so das System (16) reducirt auf  $n - r$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen  $t, x_{r+1}, \dots, x_n$ , so wird nach Substitution der erhaltenen Werthe von  $x_1 \dots x_r$

$$(17) \quad M' = \frac{M}{\left( \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} \right)^2}$$

ein Multiplicator dieses reducirten Systemes.

Wählt man andererseits willkürlich  $r^2$  Functionen  $\lambda'_{hk}$  von  $x_1 \dots x_n$ , deren Determinante  $\Lambda'$  nicht verschwindet, und setzt

$$(18) \quad \sum_1^r \lambda'_{hk} \frac{d\varphi_k}{dt} = \sum_1^n p_{hi} x'_i, \quad h = 1, \dots, r,$$

so kann man die Differentialgleichungen

$$(19) \quad \frac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \left\{ X_i + \sum_1^r \mu_s p_{si} \right\}$$

bilden, in denen die  $\mu$ , sich aus den  $r$  Gleichungen bestimmen, die durch die Substitutionen (19) aus den Gleichungen

$$(19') \quad \frac{d}{dt} \sum_1^r (p_{hi} x'_i) = 0, \quad h = 1, \dots, r$$

entspringen, und diese Gleichungen (19), die an sich nicht identisch sind mit den (16), besitzen die  $r$  Integrale

$$(20) \quad \psi_h = \sum_1^r \lambda'_{hk} \frac{d\varphi_k}{dt} = c_h.$$

Bezeichnet man die Substitution der Werthe von  $x'_1 \dots x'_r$  aus diesen Integralen durch  $[ ]$ , so lässt sich das System (19) zurückführen auf die  $2n - r$  Differentialgleichungen

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = [x'_1], \dots, \frac{dx_r}{dt} = [x'_r], \\ \frac{dx_\tau}{dt} = x'_\tau, \quad \frac{dx'_\tau}{dt} = \frac{1}{m_\tau} \left\{ X_\tau + \sum_1^r \mu_s p_{s\tau} \right\}, \quad \tau = r+1, \dots, n. \end{cases}$$

Ist daher  $M$  ein Multiplicator des Systems (19), so ist wieder

$$N = \left[ \frac{M}{\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \psi_r}{\partial x_r}} \right] = \left[ \frac{M}{\Lambda' \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r}} \right]$$

wenn man von vornherein alle  $c$  in (20) gleich Null nimmt; dann aber folgt aus den particulären Integralen  $\psi_k = 0$  wiederum  $\frac{d\varphi_k}{dt} = 0$  und das reducirte System (21) erhält also selbst wieder die  $r$  Integrale (22)

$$\varphi_k = \gamma_k$$

so dass weiter folgt:

Ist  $M$  ein Multiplicator von (19), und hat man dann die  $r$  Gleichungen  $\varphi_1 = 0 \dots \varphi_r = 0$  etwa nach  $x_1 \dots x_r$  aufgelöst und damit unter diesen Bedingungen das System (19), oder was nunmehr auf dasselbe führen muss, das System (16) zurückgeführt auf  $n - r$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen  $t, x_{r+1} \dots x_n$ , so wird durch Substitution der Auflösungen  $x_1 \dots x_r$

$$(23) \quad M' = \frac{M}{\Lambda' \left( \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} \right)^2}$$

ein Multiplicator dieses reducirten Systemes.

Nach der Substitution der aus (22) folgenden Werthe von  $x_1 \dots x_r$  liefern ferner die Formeln (17) und (23) jeden beliebigen Multiplicator eines und desselben Systemes von Differentialgleichungen, sobald man für  $M$  und  $M'$  passende Multiplicatoren der Systeme (16) und (19) setzt. Bei gegebenem  $M$  muss es also nothwendig ein  $M'$  geben, für welches

$$[M'] = [M']$$

oder

$$[M] = [\Lambda' M]$$

wird, und diese Identität wird nicht aufgehoben, wenn man darin rückwärts jedes  $\gamma_k = \varphi_k$  setzt. Also folgt endlich:

Jedem Multiplicator  $M$  des Jacobi'schen Systemes (16) gehört ein durch die Formel

$$M = \frac{M}{\Lambda}$$

bestimmter Multiplicator des äquivalenten Systemes (19) zu und umgekehrt; welcher Satz für den Fall  $M = \Delta' = \Delta \Lambda^2$  mit dem oben erhaltenen Resultate übereinkommt. —

Ich mache noch auf einen Fall aufmerksam, in dem der Multiplicator unmittelbar angegeben werden kann. Die Gleichungen (9) kann man auch in der Gestalt

$$\sum_1^r (sh) \frac{\partial \mu_k}{\partial x_i'} + \sum_1^r \sum_1^n \left( \frac{\partial p_{hi}}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{hk}}{\partial x_i} \right) x_i' = 0$$

schreiben. Der Multiplicator kann daher jederzeit gleich Eins genommen werden, sobald für alle Werthe der Indices

$$\frac{\partial p_{hi}}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{hk}}{\partial x_i} = 0$$

ist. Dann ist  $\frac{\partial p_{hi}}{\partial x_i} = 0$  und  $\frac{\partial^2 p_{hk}}{\partial x_i^2} = 0$ ; d. h. die  $p_{hi}$  müssen lineare Functionen der  $x$  sein. Man erhält

$$p_{hi} = \sum_1^n (a_{hik} x_k) + b_{hi},$$

wobei die Constanten  $a$  die Bedingungen  $a_{hik} + a_{khi} = 0$  befriedigen müssen, und die Gleichungen  $\sum p_{hi} x_i' = 0$  lauten in diesem Falle

$$\sum_1^n a_{hik} (x_k x_i' - x_i x_k') + \sum_1^n b_{hi} x_i' = 0;$$

bei der einfachsten Annahme von 3 Variablen hat man

$$(a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2) x_1' + (a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3) x_2' + (a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1) x_3' = 0$$

d. h. die *Bewegung im linearen Complexe*.\*)

Bei dem immerhin abstracteren Charakter, welchen dynamische Probleme annehmen, falls man sich entschliesst, die bisher üblichen Annahmen über die Natur der Bedingungen eines unfreien Systems in dem im vorigen besprochenen Sinne zu erweitern,\*\*) kann es sich hier nicht darum handeln, eine grössere Zahl von Beispielen solcher Bewegungen ausführlicher zu erörtern. Im folgenden werde ich daher zunächst nur von der Bewegung eines materiellen Punktes in einem P-E-System

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 = 0$$

handeln, welcher Fall mit den typischen Beispielen der theoretischen Mechanik die grösste Uebereinstimmung zeigt.

Sind zunächst keine äusseren Kräfte vorhanden, so haben die Gleichungen der Bewegung eines Punktes, der mit beliebiger Anfangsgeschwindigkeit  $c$  in dem System sich bewegt, die Form

$$x_i'' = \lambda p_i,$$

die Bahn wird dann mit der constanten Geschwindigkeit  $c$  beschrieben, und die Normale des P-E-Systems liegt stets in der Krümmungsebene derselben; diese Curven geben zugleich die Gestalt eines im System gespannten im Gleichgewicht befindlichen vollkommen biegsamen unausdehnbaren Fadens an, sind aber nicht mehr geodätische Curven im System, was damit zusammenhängt, dass jene Lage natürlich nicht

\*) Vgl. diese Annalen XXIII, S. 52.

\*\*) Vgl. das in der Anmerkung S. 267 gesagte.

mehr durch die wirkliche Spannung des Fadens so wie bei einer Oberfläche erzielt werden kann.

Für den Krümmungshalbmesser  $\varrho$  derselben erhält man den Werth

$$\varrho = \frac{c^2}{\lambda \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$$

oder wenn

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \lambda = - \sum \frac{\partial p_i}{\partial x_k} x_i' x_k' = P$$

gesetzt wird,

$$\varrho = \frac{c^2 \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{P}.$$

Bei der Bewegung im linearen Complex ist der Nenner  $P$  gleich Null, in der That werden dann ja auch die Strahlen des Complexes selbst beschrieben werden müssen; im allgemeinen wird aber die Bahncurve eine Inflexion erhalten, wenn die Richtung der Geschwindigkeit mit einer der *Haupttangenten* des Systems zusammenfällt für welche  $P$  verschwindet.\*) Ferner erhält man aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1' \\ x_1'' \\ x_1''' \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} x_1' \\ p_1 \\ \frac{dp_1}{dt} \end{vmatrix}$$

(in den Determinanten sind nur die ersten Verticalreihen angedeutet) für den Torsionsradius der Curve den Ausdruck

$$\frac{1}{c^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)} \begin{vmatrix} x_i' \\ p_1 \\ \frac{dp_1}{dt} \end{vmatrix}.$$

Der hier auftretende Factor bestimmt gleich Null gesetzt die Richtungen der *Krümmungslinien* des P-E-Systems\*\*) und damit diejenigen Richtungen mit denen die Geschwindigkeit zusammenfallen muss, damit die Bahn eine Wendungsebene erhält.

Unterliegt der Punkt der Wirkung beliebiger Kräfte mit den Componenten  $X$ , und bezeichnet man die Incremente seiner Coordinaten durch  $\xi_i$ , so findet man durch eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} \sum_1^3 \xi_i p_i + \frac{1}{2} \sum_1^3 {}^{i,k} \xi_i \xi_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{1}{6} \sum_1^3 {}^{i,k,l} \xi_i \xi_k \xi_l \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_k \partial x_l} \\ = \frac{t^3}{12} \sum_1^3 {}^{i,k} (x_i' x_k'' - x_k' x_i'') \left( \frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

\*) a. a. O. S. 49.

\*\*) Ebenda S. 71.



Bezeichnet man nun die linke Seite durch  $F$ , so muss jede Curve welche überhaupt beschrieben werden kann, mit der Fläche  $F = 0$  eine Osculation eingehen, welche zur Berührung dritten Grades wird, sobald die Schmiegungsebene der Bahn die Richtung in sich enthält, deren Cosinus den 3 Differenzen

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_3} - \frac{\partial p_3}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial p_3}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_1}$$

oder

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

proportional sind. Die Normalkrümmungen und das Krümmungsmass jener Fläche geben gerade diejenigen Ausdrücke, welche ich in meiner früheren Betrachtung als Krümmungen des P-E-Systems bezeichnet\*) und liefern für diese Grössen eine weitere anschauliche Bedeutung.

Die Gleichungen der geodätischen Linien ergeben sich dagegen durch ein eigentliches Variationsproblem in der Form:

$$(12) \quad \begin{aligned} x_1'' &= -p_1 \lambda' + \lambda [\alpha_2 x_3' - \alpha_3 x_2'], \\ x_2'' &= -p_2 \lambda' + \lambda [\alpha_1 x_3' - \alpha_3 x_1'], \\ x_3'' &= -p_3 \lambda' + \lambda [\alpha_3 x_1' - \alpha_1 x_3'], \end{aligned} \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dt},$$

auch sie werden mit constanter Geschwindigkeit beschrieben.\*\*)

Handelt es sich darum, die Bewegung im *linearen Complex* zu untersuchen, so kann man die Gleichung desselben gleich in der vereinfachten Form

$$(13) \quad (x_2 x_1' - x_1 x_2') + a x_3' = 0$$

voraussetzen. Die Bewegung eines schweren materiellen Punktes, bei welchem die Richtung der Beschleunigung der Schwere mit der Axe des Complexes parallel ist, erfolgt nach den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1'' &= +\lambda x_2, \\ x_2'' &= -\lambda x_1, \\ x_3'' &= g + \lambda a. \end{aligned}$$

Dabei wird

$$\lambda = -\frac{ag}{x_1^2 + x_2^2 + a^2}.$$

Bezeichnet man  $x_1^2 + x_2^2$  durch  $r^2$ , so findet man vermöge des Principes der lebendigen Kraft

$$2gx_3 + \text{const.} = \frac{r^3 r''}{a^2} + r'^2 + r r''$$

während  $x_1$  und  $x_2$  den beiden Differentialgleichungen

$$x_1'' = -\frac{agx_2}{r^2 + a^2}, \quad x_2'' = +\frac{agx_1}{r^2 + a^2}$$

zu entnehmen sind.

\*) a. a. O. S. 70.

\*\*) Vgl. S. 266, Anmerkung.

Die Bewegung im linearen Complex unter dem Einflusse einer Kraft  $R$ , deren Richtungslinie auf der Axe senkrecht steht und dieselbe schneidet, bestimmt sich durch die Gleichungen

$$x_1'' = R \frac{x_1}{r} + \lambda x_2,$$

$$x_2'' = R \frac{x_2}{r} - \lambda x_1,$$

$$x_3'' = \lambda a.$$

Dabei wird  $\lambda = 0$ ; es entstehen also hier Schraubenlinien im linearen Complex, insbesondere auch eigentliche Complexschraubenlinien, sobald  $R$  dem Radiusvector proportional ist.

Die geodätischen Linien des linearen Complexes sind gegeben durch

$$x_1'' = -\lambda' x_2 - 2\lambda x_2',$$

$$x_2'' = +\lambda' x_1 + 2\lambda x_1',$$

$$x_3'' = -\lambda' a.$$

Bezeichnet man mit  $c_1, c_2, c_3$  willkürliche Constanten, so ergibt sich

$$x_3' = c_2 - \lambda a,$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = c_1^2,$$

$$\lambda = \frac{c_3 a}{r^2 + a^2}$$

oder bei Einführung von Polarcoordinaten  $r, \varphi$  an Stelle von  $x_1$  und  $x_2$

$$r^2 \varphi' = a x_3' = a \left( c_2 - \frac{c_3 a}{r^2 + a^2} \right).$$

Hieraus erhält man für  $r^2 + a^2 = \varrho$

$$\frac{1}{2} \frac{d\varrho}{\sqrt{c_1^2 \varrho - c_1^2 a^2 - \left( c_2 - c_3 \frac{a}{\varrho} \right)^2 \varrho}} = dt,$$

$$d\varphi = \frac{a}{\varrho - a^2} \left( c_2 - c_3 \frac{a}{\varrho} \right) dt,$$

$$dx_3 = dt \left( c_2 - c_3 \frac{a}{\varrho} \right).$$

In dem speciellen Falle,  $\lambda = c_3, \lambda' = 0$  erhält man die Gleichungen der Complexschraubenlinien; für  $\lambda = 0$  ergeben sich, wie es sein muss, die Geraden des Complexes selbst. Im allgemeinen wird  $t$  ein elliptisches Integral zweiter Gattung, während

$$x_3 - c_2 t = -c_3 \frac{a}{2} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^4 (c_1^2 - c_2^2) + \varrho^2 (2c_2 c_3 a - c_1^2 a^2) - c_3^2 a^2 \varrho}}$$

ein elliptisches Integral erster Gattung wird. Auf eine nähere Untersuchung dieser transcendenten Curven soll hier nicht eingegangen werden; hervorzuheben wäre etwa der Fall  $c_3 = c_2 a$ , in welchem

$$d\varphi = ac_2 \frac{dt}{\varrho},$$

also

$$x_3 = c_2 t - a\varphi + c_4$$

wird. Ist endlich noch ausserdem  $c_1^2 = c_2^2$ , so wird

$$t = \frac{1}{2c_2 a} \int \frac{d\varrho \varrho}{\sqrt{\varrho(\varrho - a^2)}}, \quad d\varphi = \frac{1}{2} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho(\varrho - a^2)}},$$

und setzt man wieder  $\varrho = r^2 + a^2$ , so hat man

$$\frac{2r}{a} = e^{\varphi+c} - e^{-\varphi-c},$$

$$t = \frac{1}{2c_2 a} [r \sqrt{r^2 + a^2} + a^2 \varphi] + c_5,$$

womit die Gleichungen dieser Bahncurven völlig bestimmt sind.

Ich erwähne endlich noch ein anderes Beispiel. Für die Bewegung zweier materieller Punkte, deren Massen — was übrigens gleichgültig ist — beide der Einheit gleich sind, mit den Coordinaten  $x_1, y_1, z_1$  und  $x_2, y_2, z_2$  sei die Gleichung

$$(x_1 - x_2)x_1' + (y_1 - y_2)y_1' + (z_1 - z_2)z_1' = 0$$

vorgeschrieben. Dann ist

$$x_2 = at, \quad y_2 = bt, \quad z_2 = ct$$

zu setzen, und für

$$\xi = x_1 - at, \quad \eta = y_1 - bt, \quad \zeta = z_1 - ct$$

hat man als Gleichungen, von denen die Bewegung des ersten Punktes abhängt

$$(24) \quad \begin{aligned} \xi'' &= \lambda \xi, \\ \eta'' &= \lambda \eta, \\ \zeta'' &= \lambda \zeta, \end{aligned}$$

mit der Bedingung

$$(25) \quad \xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta' + a\xi + b\eta + c\zeta = 0.$$

Aus (24) folgt

$$(26) \quad \begin{aligned} \eta \xi' - \xi \eta' &= c_1, \\ \xi \xi' - \xi \xi' &= c_2, \\ \xi \eta' - \eta \xi' &= c_3, \\ c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \zeta &= 0. \end{aligned}$$

Ferner ist nach dem Princip der lebendigen Kraft

$$(27) \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + 2(a\xi + b\eta + c\zeta) + a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.} = h^2.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= r^2, & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= B^2, \\ a\xi + b\eta + c\zeta &= p, & ac_1 + bc_2 + cc_3 &= C, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= A^2, \end{aligned}$$

$$q = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad q^2 = r^2(A^2 B^2 - C^2) - p^2 B^2$$

so wird aus (25) und (26)

$$(28) \quad \begin{aligned} r^2 \xi' &= -\xi p + c_2 \xi - c_3 \eta, \\ r^2 \eta' &= -\eta p + c_3 \xi - c_1 \xi, \\ r^2 \zeta' &= -\zeta p + c_1 \eta - c_2 \xi \end{aligned}$$

und aus (24), (25)

$$\lambda r^2 + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + a\xi' + b\eta' + c\zeta' = 0.$$

Aus (27), (28) findet man

$$\begin{aligned} r^2(a\xi' + b\eta' + c\zeta') &= q - p^2, \\ \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 &= h^2 - A^2 - 2p, \end{aligned}$$

also

$$(29) \quad \lambda r^2 + h^2 - A^2 - 2p = \frac{p^2 - q}{r^2},$$

während aus (26) durch Quadriren und Addiren entsteht

$$(30) \quad r^2[h^2 - A^2 - 2p] = B^2 + p^2.$$

Somit ist  $p$  und also auch  $q$  und  $\lambda$  eine bekannte Function von  $r$ . Die Integration der Gleichungen (24) ist damit auf die Ermittlung einer Centralbewegung zurückgeführt; die Bewegung selbst ist die eines Punktes  $x_1 y_1 z_1$ , der von einem beweglichen Centrum  $x_2 y_2 z_2$  nach einem gewissen Gesetze angezogen wird. Zur Bestimmung der  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  bedient man sich indessen bequemer der folgenden Formeln.

Aus der Gleichung

$$r \frac{dr}{dt} = \xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta' = -p$$

und der aus (30) folgenden

$$2r \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{B^2 + p^2}{h^2 - A^2 - 2p} \right)$$

findet man ohne weiteres  $t$  als Function von  $p$ , also damit auch  $r^2$  aus (30), und endlich  $q$  aus der Gleichung

$$q = p^2 + r^2 \frac{dp}{dt};$$

d. h. man kann  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  aus der letzten Gleichung (26) und den Werthen von  $p$ ,  $q$  linear berechnen, wobei die 5 Constanten  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $h$ , und die letzte Integrationsconstante aus den Anfangsbedingungen zu entnehmen sind.

Ich schliesse mit der folgenden Bemerkung. Bisher wurde vorausgesetzt, dass die  $p_{ik}$  in den gegebenen Differentialrelationen die Zeit

explicite nicht enthalten. Es werden aber die Gleichungen der Bewegung dieselbe Form beibehalten, wenn diese Beschränkung fallen gelassen wird. Im einfachsten Falle hat man ein mit der Zeit veränderliches P-E-System, und bei der Anwendung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten hat man dasselbe in bekannter Weise als ruhend zu betrachten. Und von hier aus kann man zu dem allgemeineren Falle übergehen, wo Gleichungen von der Form

$$\sum_1^n p_{r,i} dx_i + T_r dt = 0$$

gegeben sind, in denen die  $p_{r,i}$  und  $T_r$  Functionen der  $x$  und der Zeit  $t$  sind. Die Bewegungsgleichungen erfahren auch hier keine Aenderung. In dieser Allgemeinheit hat man dann überhaupt den Fall, dass für das betreffende Problem eine gewisse Anzahl von ersten in den Differentialquotienten  $x_i'$  linearen Integralen vorgeschrieben ist. Andererseits aber ist dieser lineare Charakter nothwendig, wenn überhaupt eine Analogie mit den Gleichungen der Mechanik bestehen bleiben soll.

Dresden, Anfang September 1884.

---