

Ueber metacyklische Gruppen und Nachbarconfigurationen.

Von

L. HEFFTER in Giessen.

Bei der modernen geometrischen Repräsentation einer Gruppe von Operationen*) hat das zu einer geschlossenen Fläche zusammengebogene *Fundamentalpolygon* vornehmlich die Eigenschaft, bei allen Operationen der Gruppe als Ganzes betrachtet invariant zu bleiben und nur Drehungen im Sinne der Analysis Situs zu erleiden, gerade wie das Tetraeder bei der Gruppe der Tetraederdrehungen**). Im Folgenden soll gezeigt werden, wie speciell bei *metacyklischen Gruppen* ein solches invariantes Gebilde, das natürlich mit dem entsprechenden Dyck'schen *geschlossenen Polygonnetz* nahe verwandt ist, auf sehr einfache, directe Art herzustellen ist. Dabei treten *Nachbarelemente****) auf und zwar u. a. die von mir (a. a. O. S. 491, Anm.) schon erwähnten, *sich selbst dualistischen Netze*, deren Flächen Nachbargebiete und deren Ecken gleichzeitig Nachbarpunkte sind. Endlich gestattet jenes geometrische Gebilde unmittelbar die Aufstellung einer Function, welche bei den Substitutionen der metacyklischen Gruppe und nur bei diesen ungeändert bleibt, d. h. einer *metacyklischen Function*.

§ 1.

Das invariante Gebilde der Gruppe.

Es sei p eine Primzahl, g eine primitive Wurzel derselben und M die aus den beiden cyklischen Substitutionen

$$(1) \quad S = (g^0, g^1, g^2, \dots, g^{p-2}) = (z, gz),$$

$$(2) \quad T = (0, 1, 2, \dots, p-1) = (z, z+1)!$$

erzeugte metacyklische Gruppe der $p(p-1)$ Substitutionen

*) Vergl. Dyck, Math. Ann. Bd. 20 (1882) S. 1ff.

**) Vergl. F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig (1884) S. 14.

***) Vergl. meine Arbeit „Ueber das Problem der Nachbargebiete“ Math. Ann. Bd. 38, (1891) S. 477ff.

$$(3) \quad (z, g^\alpha z + \beta) \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = 0, 1, 2, \dots, p-2 \\ \beta = 0, 1, 2, \dots, p-1 \end{array} \right),$$

wobei natürlich alle Zahlen mod. p zu nehmen sind.

Wendet man auf das Element 1 der Reihe nach die Substitutionen $S^0, S^1, S^2, \dots, S^{p-2}$ an, so erhält man die Reihe von Elementen $g^0, g^1, g^2, \dots, g^{p-2}$, die wir zusammengenommen und in dieser bestimmten Folge kurz durch die unter ihnen allein fehlende Zahl (0) bezeichnen wollen

$$(0) \quad g^0, g^1, g^2, \dots, g^{p-2}.$$

Die Anwendung der Substitutionen $T^0, T^1, T^2, \dots, T^{p-1}$ auf (0) ergibt dann p solche Reihen (0), (1), (2), \dots , ($p-1$) oder in etwas anderer Reihenfolge (0), (g^0), (g^1), \dots , (g^{p-2}), sodass wir das System von p Zeilen aus je $p-1$ Elementen betrachten

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (0) \quad g^0 \quad , \quad g^1 \quad , \quad g^2 \quad , \quad \dots , \quad g^{p-2}, \\ (g^0) \quad g^0 + g^0 \quad , \quad g^1 + g^0 \quad , \quad g^2 + g^0 \quad , \quad \dots , \quad g^{p-2} + g^0, \\ (g^1) \quad g^0 + g^1 \quad , \quad g^1 + g^1 \quad , \quad g^2 + g^1 \quad , \quad \dots , \quad g^{p-2} + g^1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (g^{p-2}) \quad g^0 + g^{p-2}, \quad g^1 + g^{p-2}, \quad g^2 + g^{p-2}, \quad \dots , \quad g^{p-2} + g^{p-2}. \end{array} \right.$$

Dieses System ist für die Gruppe M in dem Sinne invariant, dass es bei deren Substitutionen nur cyklische Verschiebungen der einzelnen Zeilen in sich und Vertauschungen der verschiedenen Zeilen untereinander erleidet. Denn bei T vertauschen sich nur die Zeilen (0), (1), \dots , ($p-1$) cyclisch in der natürlichen Folge und bei S verschiebt sich die Zeile (0) cyclisch in sich selbst, während die Zeilen (g^0), (g^1), \dots , (g^{p-2}) sich in dieser Folge cyclisch vertauschen und ausserdem cyclisch um eine Stelle nach rechts verschieben.

Umgekehrt aber ist jede Permutation der Zahlen 0, 1, 2, \dots , $p-1$, die eine beliebige Zeile von (4) nach beliebiger cyklischer Verschiebung in sich selbst in eine beliebige andere Zeile überführt, eine metacyklische. Denn gehen etwa dabei

$$(g^\alpha) \quad g^0 + g^\alpha, \quad g^1 + g^\alpha, \quad \dots, \quad g^{p-2} + g^\alpha$$

bezw. über in

$$(g^\beta) \quad g^\gamma + g^\beta, \quad g^{\gamma+1} + g^\beta, \quad \dots, \quad g^{\gamma-1} + g^\beta,$$

so geschieht dies durch die metacyklische Substitution

$$T^{-g^\alpha} S^\gamma T^{g^\beta} \quad \text{oder} \quad S^\gamma T^{g^\beta - g^\alpha + \gamma}.$$

Dies veranlasst die folgende geometrische Interpretation des Systems (4). Die p Zeilen (0) (g^0) \dots (g^{p-2}) denken wir uns als p ebene $p-1$ -Ecke mit den gleichen Namen (0), (g^0), u. s. w. und bezeichnen die $p-1$ Ecken von (0) der Reihe nach mit den Zahlen der Zeile (0), die von (g^0) mit den Zahlen der Zeile (g^0) u. s. w., wobei alle Polygone

in gleichem Sinn umlaufen werden müssen, also etwa so, dass die Fläche zur Linken bleibt.

Die so erhaltenen p Polygone fügen sich nun zu einer einzigen geschlossenen Fläche mit nicht umkehrbarer Indicatrix und später zu bestimmendem Geschlecht zusammen, sobald wir je zwei Polygone, die entsprechende Seiten ik und ki besitzen, längs dieser zusammenheften. Es muss hierfür zunächst gezeigt werden, dass zu jeder Seite ik auch eine entsprechende ki vorkommt; ferner lässt sich dann beweisen, dass jedes Polygon auf die angegebene Weise mit allen $p - 1$ übrigen verbunden wird.

Die Differenzen zwischen je zwei auf einander folgenden Zahlen einer Zeile von (4) sind für alle Zeilen

$$(5) \quad g^1 - g^0, g^2 - g^1, \dots, g^p - g^{p-2}.$$

Diese sind sämtlich von einander verschieden, nämlich, auf ihre absolut kleinsten Reste mod. p reducirt, eine Permutation der Zahlen

$$\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{p-1}{2}.$$

Da aber aus einer Zeile von (4) alle andern durch die Substitutionen T^0, T^1, \dots, T^{p-1} entstehen, so folgt, dass, wenn i und k zwei ganz beliebige der Zahlen $0, 1, 2, \dots, p - 1$ sind, die Zahlenfolge ik einmal und nur einmal vorkommt, ebenso also auch die Zahlenfolge ki .

Gehört nun die Zahlenfolge ik z. B. der Zeile (0) an, sodass etwa

$$i \equiv g^\alpha, \quad k \equiv g^{\alpha+1}$$

ist, so muss das Zahlenpaar ki in einer von (0) verschiedenen Zeile auftreten, weil sonst i oder k zweimal in derselben Zeile vorkäme. Sei daher etwa in (g^β)

$$(6) \quad g^\gamma + g^\beta \equiv g^{\alpha+1}, \quad g^{\gamma+1} + g^\beta \equiv g^\alpha,$$

sodass also (0) längs $g^\alpha g^{\alpha+1}$ an (g^β) grenzt, so ergibt sich aus (6) durch Multiplication mit den einzelnen Potenzen von g

$$(7) \quad \begin{cases} g^{\gamma+1} + g^{\beta+1} \equiv g^{\alpha+2}, & g^{\gamma+2} + g^{\beta+1} \equiv g^{\alpha+1}, \\ g^{\gamma+2} + g^{\beta+2} \equiv g^{\alpha+3}, & g^{\gamma+3} + g^{\beta+2} \equiv g^{\alpha+2}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

d. h. (0) grenzt mit den Seiten $g^{\alpha+1}g^{\alpha+2}, g^{\alpha+2}g^{\alpha+3}$, u. s. w. bezw. an die Polygone $(g^{\beta+1}), (g^{\beta+2})$, u. s. w., also längs jeder seiner Seiten an ein anderes der $p - 1$ übrigen Polygone.

Da in Folge der Entstehung der einzelnen Polygone aus (0) vermittelst T, T^2, \dots Entsprechendes für alle p Polygone gilt, so ist gleichzeitig bewiesen, dass diese Polygone sich zu einer einzigen geschlossenen Fläche mit nicht umkehrbarer Indicatrix zusammenfügen und dass sie auf ihr p Nachbargebiete darstellen.

Diese geschlossene Fläche oder dieses *Polyeder*, — wie wir im Sinne der Analysis Situs sagen können, — wollen wir kurz durch M bezeichnen und es *das Polyeder der Gruppe M* nennen. Nach den Bemerkungen, die sich an das System (4) angeknüpft haben, kann jetzt ohne Weiteres der Satz ausgesprochen werden:

Die metacyklische Gruppe M ist identisch mit der Gesamtheit derjenigen Drehungen des Polyeders M , bei welchen jedes Polygon wieder in den Platz eines solchen einrückt.

Bei der Substitution S z. B. dreht sich das Polygon (0) nur um sich selbst, während die übrigen sich um dasselbe drehen. Bei der Substitution T ändert jedes Polygon seinen Platz.

§ 2.

Das Geschlecht des Polyeders M .

Vom Standpunkt der Analysis Situs aus interessirt uns noch das Geschlecht des Polyeders M und der damit zusammenhängende Charakter der entstehenden Nachbarconfigurationen. Um das Geschlecht nach dem erweiterten Euler'schen Polyedersatz ermitteln zu können, brauchen wir noch die Anzahl der *Ecken* des Polyeders; d. h. wir müssen zählen, in wieviel Polyederecken [0] z. B. die $p - 1$ Polygonecken 0 der Polygone $(g^0), (g^1), \dots, (g^{p-2})$ zusammenfallen. Was von [0] gilt, trifft dann durch Uebertragung mittelst T auch für die anderen Ecken von M zu.

Zu diesem Zweck bemerken wir, dass in den Polygonen

$$(g^0), (g^1), \dots, (g^{p-2})$$

die Ecke 0 bzw. unter den Zeichen

$$(8) \quad g^{\frac{p-1}{2}} + g^0, \quad g^{\frac{p+1}{2}} + g^1, \quad \dots \quad g^{\frac{p-3}{2}} + g^{p-2}$$

erscheint. Unter Hinzunahme der beiden benachbarten Eckpunkte haben wir also bei Festhaltung des positiven Umlaufsinnnes in den einzelnen Polygonen die Ecken

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} g^{\frac{p-3}{2}} + g^0, \quad 0, \quad g^{\frac{p+1}{2}} + g^0, \\ g^{\frac{p-1}{2}} + g^1, \quad 0, \quad g^{\frac{p+3}{2}} + g^1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ g^0 + g^{\frac{p+1}{2}}, \quad 0, \quad g^2 + g^{\frac{p+1}{2}}, \\ g^1 + g^{\frac{p+3}{2}}, \quad 0, \quad g^3 + g^{\frac{p+3}{2}}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Folglich gehen von einer Polyederecke [0] aus die Kanten der Reihe nach nach den Ecken

$$(10) \quad p^{\frac{p-3}{2}} + g^0, g^{\frac{p+1}{2}} + g^0, g^{\frac{p+1}{2}} + g^2, g^{\frac{p+5}{2}} + g^2, \dots$$

Wenn diese Zahlenreihe sich erst mit der $(p-1)$ ten Zahl schliesst, so fallen alle Polygonecken 0 in eine einzige Polyederecke [0] zusammen. Andernfalls entstehen mehrere solche [0], [0]', ...

Nun entsteht jede der Zahlen (10) aus der vorhergehenden durch

Multiplication mit $g^{\frac{p+1}{2}}$; also ist nur die Frage, ob $g^{\frac{p+1}{2}}$ primitive Wurzel für p ist oder zu einem niedrigeren Exponenten als $p-1$ gehört. Wenn $\frac{p+1}{2}$ ungerade, also p von der Form $4\nu + 1$ ist, tritt

der erstere Fall ein; wenn $p = 4\nu + 3$ ist, gehört $g^{\frac{p+1}{2}}$ zu $\frac{p-1}{2}$.

Demnach besitzt das Polyeder M im Falle $p = 4\nu + 1$ p Ecken

$$[0], [1], \dots, [p-1]$$

und im Falle $p = 4\nu + 3$ $2p$ Ecken

$$[0], [1], \dots, [p-1],$$

$$[0]', [1]', \dots, [p-1]'$$

Wenn wir jetzt aber die Anzahl der Ecken (p , bzw. $2p$), der Kanten $\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)$ und der einfach zusammenhängenden Flächenstücke (p) kennen, so ergibt sich nach dem erweiterten Euler'schen Polyedersatz

$$2P - 2 = K - E - F,$$

wo P die Geschlechtszahl, K , E , F die Anzahl der Kanten, Ecken, Flächen bedeuten, als *Geschlecht* von M

$$\text{im Falle } p = 4\nu + 1 \quad P = \frac{(p-1)(p-4)}{4},$$

$$\text{,, ,, } p = 4\nu + 3 \quad P = \frac{(p-1)(p-4)}{4} - \frac{p}{2}.$$

Da nun im Falle $p = 4\nu + 1$ von jeder Ecke $p-1$ Kanten nach den $p-1$ übrigen Polyederecken ausgehen, so sind alsdann die p Polyederecken zugleich *Nachbarpunkte*, und wir können in Hinsicht auf das Problem der Nachbarelemente unser Ergebniss dahin formuliren:

Das Polyeder M einer metacyklischen Gruppe M stellt immer eine Configuration von p Nachbargebieten dar und, falls $p = 4\nu + 1$ ist, ein sich selbst dualistisches Netz von p Nachbargebieten und p Nachbarpunkten auf einer Oberfläche vom Geschlecht $\frac{(p-1)(p-4)}{4}$.

§ 3.

Metacyklische Functionen.

Man kann endlich das System (4) oder — was ja auf dasselbe hinauskommt — das Polyeder M benutzen, um daraus eine Function von p Grössen

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$$

abzulesen, die bei den Substitutionen von M und nur bei diesen ungeändert bleibt, also eine *metacyklische Function*.

Zu dem Ende setzen wir an Stelle einer jeden Polygonecke i ($i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$) die Grösse x_i ; die Polygoneiten ik können wir dann in mannigfaltiger Weise analytisch deuten, am einfachsten wohl als das Product zweier verschiedenen, möglichst niedrigen Potenzen von x_i und x_k z. B. durch

$$x_i x_k^2;$$

das Polygon (l) sei die mit x_l^3 multiplicirte Summe der analytischen Ausdrücke seiner Seiten*), also z. B. (0) wird vertreten durch

$$x_0^3 [x_{\rho^0} x_{\rho^1}^2 + x_{\rho^1} x_{\rho^2}^2 + \dots + x_{\rho^{p-2}} x_{\rho^0}^2];$$

endlich soll das ganze Polyeder M als die Summe seiner p Polygone aufgefasst werden. So erhalten wir die Function

$$(11) \quad F_M(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$$

$$= x_0^2 [x_{\rho^0} x_{\rho^1}^2 + x_{\rho^0} x_{\rho^2}^2 + \dots + x_{\rho^{p-2}} x_{\rho^0}^2]$$

$$+ x_{\rho^0}^3 [x_{\rho^0+\rho^0} x_{\rho^1+\rho^0}^2 + x_{\rho^1+\rho^0} x_{\rho^2+\rho^0}^2 + \dots + x_{\rho^{p-2}+\rho^0} x_{\rho^0+\rho^0}^2]$$

$$+ \dots \dots \dots$$

$$+ x_{\rho^{p-2}}^3 [x_{\rho^0+\rho^{p-2}} x_{\rho^1+\rho^{p-2}}^2 + x_{\rho^1+\rho^{p-2}} x_{\rho^2+\rho^{p-2}}^2 + \dots + x_{\rho^{p-2}+\rho^{p-2}} x_{\rho^0+\rho^{p-2}}^2].$$

Dass diese Function für die metacyklischen Substitutionen unempfindlich ist, versteht sich nach ihrer Erzeugung aus dem Polyeder M von selbst und lässt sich ausserdem unmittelbar erkennen. Dass sie aber auch durch keine anderen Substitutionen ungeändert bleibt, kann leicht bewiesen werden.

Gäbe es nämlich noch eine andere Substitution R , welche F_M nicht ändert, so darf man annehmen, dass bei ihr zwei der x z. B. x_0 und x_{ρ^0} unberührt bleiben; denn indem man mit R noch eine geeignete metacyklische Substitution componirt, kann das stets erreicht werden. Da nun unter den einzelnen Termen von F_M nur ein einziger vorkommt, welcher den Factor $x_0^3 x_{\rho^0}$ enthält, nämlich

$$x_0^3 x_{\rho^0} x_{\rho^0}^2,$$

*) Speciell diese Form der Deutung verdanke ich einer mündlichen Bemerkung von Herrn Netto.

so muss auch x_p ungeändert bleiben; ebenso folgt dann, dass auch x_{g^2}, x_{g^3} u. s. w. sich nicht ändern können, m. a. W. dass R die identische Substitution sein muss.

$F_M(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ ist eine metacyklische Function 6^{ten} Grades seiner Argumente mit $p(p-1)$ Termen.

Besitzt p die primitive Wurzel 2 und wählt man diese für g , so lässt sich aus dem Polyeder M eine metacyklische Function $(p-1)$ ^{ten} Grades herleiten, welche nur $\frac{p(p-1)}{2}$ Terme enthält. Deutet man nämlich die Polygonseite ik durch

$$\frac{x_i}{x_k}$$

und das Polygon (l) als Summe seiner Seiten multiplicirt mit $\frac{1}{x_l}$, so erhält man die Function

$$(12) \quad H_M = \frac{1}{x_0} \left[\frac{x_{g^0}}{x_{g^1}} + \frac{x_{g^1}}{x_{g^2}} + \dots + \frac{x_{g^{p-2}}}{x_{g^0}} \right] \\ + \frac{1}{x_{g^0}} \left[\frac{x_{g^0+g^0}}{x_{g^1+g^0}} + \frac{x_{g^1+g^0}}{x_{g^2+g^0}} + \dots + \frac{x_{g^{p-2}+g^0}}{x_{g^0+g^0}} \right] \\ + \dots \dots \dots$$

die sicher durch die metacyklischen Substitutionen nicht geändert wird. Sie enthält zwei Terme mit dem Nenner $x_0 x_{g^0}$, nämlich

$$(13) \quad \frac{x_{g^{p-2}}}{x_0 x_{g^0}} + \frac{x_{\frac{p-3}{2}+g^0}}{x_{g^0} x_{\frac{p-1}{2}+g^0}}.$$

Beide sind dann und nur dann identisch, wenn

$$(14) \quad g^{p-2} \equiv g^{\frac{p-3}{2}} + g^0 \text{ mod. } p$$

oder

$$g^{p-1} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} + g,$$

d. h.

$$(15) \quad g \equiv 2 \text{ mod. } p.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so stimmen je zwei Terme mit demselben Nenner überein, da sie aus jenen durch die Substitutionen S und T herzuleiten sind und dabei die Congruenz (14) bestehen bleibt.

Dann aber ist wieder evident, dass die Function H_M auch *nur* gegen die metacyklischen Substitutionen unempfindlich ist; denn bei einer weiteren Substitution R könnte man wieder annehmen, dass sie x_0 und x_{g^0} unberührt lässt; es würde folgen, dass auch $x_{g^{p-2}}$ unberührt bleibt u. s. w., dass R die identische Substitution ist.

Zieht man also in H_M die beiden übereinstimmenden Terme zusammen und multiplicirt endlich noch mit dem Product aller x , so hat man, falls $g = 2$, in

$$(16) \quad G_M = x_0 x_1 \cdots x_{p-1} \cdot \frac{H_M}{2}$$

eine ganze metacyklische Function $(p-1)^{2^n}$ Grades mit $\frac{p(p-1)}{2}$ Termen.

Die $\frac{p(p-1)}{2}$ Terme von G_M können dabei direct schliesslich so gebildet werden, dass man aus dem Product aller x jedesmal zwei andere fortlässt und dafür dasjenige x zum Quadrat erhebt, dessen Index mit 2 multiplicirt der Summe der Indices jener beiden congruent ist.

Denn in H_M ist ja

$$\frac{1}{x_{2^\alpha} \cdot x_{2^\beta}} = \frac{1}{x_{2^\alpha} \cdot x_{2^\gamma + 2^\alpha}}$$

multiplicirt mit

$$x_{2^\gamma - 1 + 2^\alpha};$$

also ist

$$2(2^\gamma - 1 + 2^\alpha) \equiv 2^\gamma + 2 \cdot 2^\alpha \equiv 2^\alpha + 2^\beta \pmod{p}.$$

Für $p = 3$ ist eine metacyklische Function symmetrisch.

Für $p = 5$ aber ist 2 primitive Wurzel, und man hat daher in G_M eine noch einfachere metacyklische Function als in F'_M . Es ist

$$(17) \quad G_M = x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 \left\{ \frac{x_3}{x_0 x_1} + \frac{x_1}{x_0 x_2} + \frac{x_4}{x_0 x_3} + \frac{x_2}{x_0 x_4} \right. \\ \left. + \frac{x_4}{x_1 x_2} + \frac{x_3}{x_1 x_3} + \frac{x_0}{x_1 x_4} \right. \\ \left. + \frac{x_0}{x_2 x_3} + \frac{x_3}{x_2 x_4} \right. \\ \left. + \frac{x_1}{x_3 x_4} \right\}.$$

Giessen, den 28. Januar 1897.