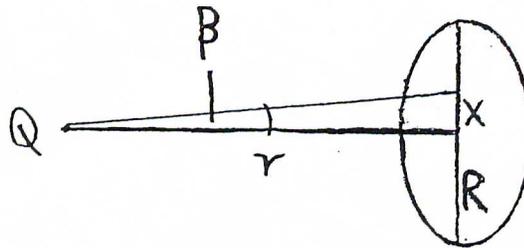


Lichtstrom durch den senkrechten Kreis mit Absorption

Harald Schröder

Wir betrachten eine Punktquelle Q mit senkrechtem Kreis vom Radius R mit Abstand r von Q und ohne Medium wie in der Abb.



$$x \in [0, R] \quad r > 0$$

$I =$ Lichtstärke von Q

Wir wollen zum Lichtstrom gelangen. Der Fall im Medium kann später genauso behandelt werden.

$x \in [0, R]$ ist die Integrationsvariable.

$$E(x) = \frac{I}{r^2 + x^2}$$

ist die Beleuchtungsstärke bei x .

$$\cos \beta(x) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$\beta(x)$ ist der Neigungswinkel bei x .

Für den Lichtstrom Φ durch den Kreis ergibt sich daraus:

$$\Phi = \int_0^R 2\pi x \cdot E(x) \cdot \cos \beta(x) dx \quad (1)$$

$$= 2\pi I \cdot r \cdot \int_0^R \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \quad (2)$$

Substitution: $r^2 + x^2 = t$

$$x = \sqrt{t - r^2} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t - r^2}}$$

$$t(R) = r^2 + R^2 \quad t(0) = r^2$$

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int_{r^2}^{r^2 + R^2} \frac{dt}{2t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \left[\frac{-2}{\sqrt{t}} \right]_{r^2}^{r^2 + R^2} \\ &= \frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2}} \end{aligned}$$

also folgt:

$$\Phi = 2\pi I r \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2}} \right) = 2\pi I \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} \right) \quad (3)$$

Wir betrachten nun dieselbe Anordnung in reiner Luft (mit Medium). Der Schwächungskoeffizient m soll räumlich und zeitlich konstant sein, das bedeutet die Dichte der Luft ist konstant. Dann braucht man bei Gleichung (2) nur den Schwächungsfaktor zuzufügen.

$$\Phi = 2\pi I r \cdot \int_0^R e^{-m\sqrt{r^2 + x^2}} \cdot \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \quad (4)$$

$$r > 0$$

Die Abhängigkeit des Lichtstroms durch die Absorption ~~wird~~ durch folgende Tabelle gezeigt. Mit den Werten $r=8\text{m}$, $R=4\text{m}$ und $I=30$ Candela ergibt sich:

$m[\text{Meter}^{-1}]$	$\Phi[\text{Lumen}]$
0	19.90
0.0001	19.88
0.0002	19.87
0.0003	19.85
0.0004	19.83
0.0005	19.82
0.0006	19.80
0.0007	19.78
0.0008	19.77
0.0009	19.75
0.001	19.73
0.005	19.08
0.01	18.29
0.05	13.04
0.1	8.547
0.5	0.2931
0.6	0.1263
0.7	0.05450
0.8	0.02353
0.9	0.01017
1	0.004395
1.1	0.001901
1.2	0.0008232
1.3	0.0003566
1.4	0.0001546
1.5	0.00006706
1.6	0.00002911
1.7	0.00001264
1.8	0.000005496
1.9	0.000002390
2	0.000001040
2.1	0.0000004529
2.2	0.0000001973
2.3	0.00000008603
2.4	0.00000003753

Bei der Integraalauswertung wurde die Simpsonregel mit 50 Schritten verwendet.

Literatur

- [1] Harald Schröer „Lichtstrom und Beleuchtungsstärke“, german and english edition, Wissenschaft und Technik Verlag Berlin 2001