22.

Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques;

pour faire suite au traité des propriétés projectives des figures, et servir d'introduction à la Théorie générale des propriétés projectives des courbes et surfaces géométriques. *)

Présenté à l'Académie royale des Sciences de l'institut de France le 8. Mars 1824, et approuvé le 22. Janvier 1826, par une commission composée de M. M. Legendre, Ampère et Cauchy rapporteur.

(Par Mr. *J. V. Poncelet*, Capitaine au Corps Royal du Génie.)

Discours préliminaire.

Dans le Traité que j'ai publié **) l'année dernière sur les propriétés projectives des figures, je me suis moins attaché à faire un recueil de théorèmes et de problêmes de Géométrie, qu'à poser des principes généraux et féconds, à l'aide desquels ou pût aborder les uns et les autres pour ainsi dire sans hésitation, et à la manière dont cela se pratique dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, dite Analyse des Coordonnées. Je crois avoir mis, en effet, tout lecteur géométre en état de découvrir, par lui-même, et de démontrer au besoin, cette foule de propositions qui appartiennent aux figures composées, en général, de points, de droites, de sections coniques, de plans et de surfaces du second ordre quelconques, propositions qu'à cause de leur élégante simplicité et de leur utilité dans les arts, les anciens, aussi bien que les modernes, ont cultivées avec une sorte do prédilection, et qui pour la plupart et jusqu'à ces derniers temps, avoient été traitées par des méthodes si restreintes, si différentes les unes des autres et souvent si pénibles, qu'il étoit comme impossible d'en saisir l'ensemble et d'en deviner la commune origine.

Qu'il me soit permis ici de fixer un instant l'attention de l'Académie sur quelques uns de ces principes généraux, qu'on n'a point encore

*) Ce mémoire n'a été publié jusqu'ici. Note du red.

**) Ce Mémoire, redigé dans le courant de l'année 1823, a été remis à Mr. Arago vers la fin de Novembre, même année, lors de son séjour à Metz. On peut voir, à la page 349. du Tome XVI. des *Annales de Mathématiques*, publiées par M. Gergonne, le rapport qui en a été fait à l'Académie royale des sciences, par M. Cauchy. Note de l'auteur.

assez appréciés peut-être, et qui me paroissent aussi neufs qu'importans en Géométrie; cet exposé succint répandra quelque jour sur l'objet des recherches qui m'occupent actuellement, et m'y conduira de la manière la plus naturelle et la plus philosophique.

Parmi ces principes, je placerai en première ligne, par l'étendue des conséquences qui en dérivent, ceux qui se rattachent à la doctrine des projections, et à l'aide desquels on transforme des figures très générales en d'autres tout à fait particulières et vice versa; de telle sorte que les propriétés des unes étant connues, on en conclut, sur le champ, les propriétés des autres, du moins celles de ces propriétés dont la nature est assez générale pour se conserver dans les diverses projections centrales de la figure, et que, pour cette raison, j'ai nommées projectives dans l'ouvrage déjà cité.

Le caractère de ces sortes de propriétés n'étoit pas difficile à établir pour ce qui concerne les relations purement descriptives ou graphiques; il se reconnoit toujours au simple énoncé, et j'ai donné d'ailleurs les loix des modifications qu'il éprouve dans les cas particuliers où certains objets s'éloignent à l'infini, ou prennent des situations déterminées, telles que celles du parallèlisme et de l'asymptotisme.

Quant aux relations purement métriques ou concernant les rapports de mesure de lignes, leurs caractère de projectibilité, si je puis m'exprimer ainsi, ne pouvoit être présenté d'une manière entièrement générale, à cause de la complication des expressions, et j'ai dû me borner à l'établir pour une classe particulière de relations métriques, et cependant encore très étendue, puisqu'elle comprend tout ce qu'on connoît actuellement sur les propriétés projectives des figures, et qu'elle en indique une infinité d'autres qui ne le sont pas encore. J'ai même lieu de croire qu'il n'est aucune relation métrique projective, qui ne puisse être ramenée à cette classe particulière par des transformations convenables de calcul *). Mais cette restriction même est un grand avantage, puisqu'indépendamment du caractère de simplicité qu'elle imprime aux relations métriques, elle les rend encore aptes à demeurer applicables, non plus seulement aux projections ou perspectives ordinaires de la figure, mais aux projections sphériques faites du centre de la sphère et

*) Voyez la note II. à la fin de ce Mémoire.

pour lesquelles les simples distances sont remplacées par les sinus des arcs de grands cercles correspondans, et à cette espèce de projection beaucoup plus générale que j'ai nommée, faute d'expressions convenables, perspective dans un plan ou plane, et perspective dans l'espace ou en relief; genre de projections sur lesquelles on n'avoit encore rien donné, rien écrit, et qui mérite cependant toute l'attention des géomètres, et particulièrement celle des sculpteurs, qui manquent encore de préceptes rigoureux et généraux pour le tracé de cette espèce de tableaux qu'on est convenu de nommer bas-reliefs.

En effet, je crois avoir établi ces préceptes dans le supplément placé à la fin de mon ouvrage, et, de la même manière que j'avois montré, dès la première partie, comment, par la projection centrale ordinaire, on peut ramener les figures composées de sections coniques et de lignes concourantes, en d'autres beaucoup plus élémentaires composées uniquement de cercles et de droites parallèles, j'ai aussi établi, dans ce supplément, les moyens d'étendre aux surfaces du second ordre en général, et à l'aide de la perspective-relief, les propositions qui concernent simplement les sphères et systèmes de sphères; et je crois en avoir montré d'assez belles applications pour faire saisir l'esprit général de la méthode, et en faire apprécier toute l'utilité et l'importance.

Un autre principe très étendu, auquel peut-être on n'avoit pas assez accordé d'attention dans la Géométrie rationnelle, c'est le principe de continuité, en vertu duquel on donne aux différentes propositions de la Géométrie, l'extension et la généralité qui leur manquent d'ordinaire, d'après la manière restreinte dont il arrive souvent qu'on envisage les figures et les résultats des raisonnemens qu'on leur applique. L'admission et l'emploi de la loi de continuité m'étoient tout-à-fait indispensables pour donner aux principes de la doctrine des projections et aux diverses conséquences qui en dérivent, la certitude et l'étendue nécessaires, outre qu'ils offroient les moyens d'interpréter et d'introduire ouvertement en Géométrie, la considération des infinis et des imaginaires qui jouent un rôle si important et si nécessaire dans l'analyse algébrique, et on peut le dire, dans toutes les applications du calcul. La conséquence de l'admission de la continuité a été la théorie des sécantes et des cordes idéales et, de tout objet qui, sans cesser d'exister effectivement dans les transformations d'une même figure, a pourtant cessé de dépendre d'une manière purement géometrique, d'autres objets auxquels il se rapportoit, et qui le définissoient ou le construisoient dans la figure primitive.

Enfin, je signalerai un dernier principe, que je n'ai pas dû ni voulu exposer avec toute sa généralité qui lui est propre, dans le Traité des propriétés projectives, et qui constitue ce que j'ai nommé la Théorie des polaires réciproques, par analogie à ce que les géometres avoient déjà appelé le pôle et la polaire des lignes et des surfaces du second ordre.

Au premier aperçu, on pourroit croire que le principe dont il s'agit est moins général et moins vaste que les précédens, en ce qu'il ne constitueroit qu'une théorie particulière relative aux lignes et aux surfaces du second ordre; mais on se tromperoit étrangement; car il est tel qu'au simple énoncé d'une proposition suffisamment générale de l'étendue, ou pour m'énoncer avec plus de précision, d'une relation projective et de situation, on est toujours en état d'en assigner, sur le champ, une autre toute différente, toute aussi générale et qu'il seroit souvent très difficile d'établir par des moyens directs, à moins toute fois que la proposée ne soit elle-même la réciproque, ce dont il y a des exemples.

J'ai exposé les premiers élémens de cette doctrine, ainsi généralisée, dans un numéro des Annales de Mathématiques *), en partant de quelques théorêmes déjà précédemment établis par les géomètres sur les pôles et polaires des lignes et surfaces du second ordre, théorêmes qui sont d'ailleurs une conséquence très simple des principes généraux de la projection centrale combinés avec la loi de continuité; et je ne connois que le Rédacteur de ce recueil, Mr. Gergonne, qui s'en soit servi depuis **) pour établir la proposition réciproque d'un fort beau théorême dû à Mr. Coriolis, répétiteur à l'école polytechnique, lequel s'étoit contenté simplement d'en faire insérer l'énoncé dans ces mêmes Annales.

Il me seroit impossible de donner ici une idée tant soit peu générale de la théorie des polaires réciproques, sans entrer dans des détails qui excéderoient les bornes que je me suis prescrites et que je ne dois pas dépasser quant à présent; je me contenterai donc de renvoyer aux ouvrages cités, en remarquant toute fois que je n'en ai présenté là qu'une

*) Tome VIII, année 1818, page 201.

**) ibid. Tome XI, année 1821, page 335.

indication très rapide, fort incomplette et qui suffisoit à l'objet des recherches que j'y avois en vue. Je n'y ai même fait mention uniquement que de ce qui concerne la réciprocité des relations graphiques ou descriptives qui subsistent entre la figure primitive et sa dérivée; or il est très facile d'étendre toute cette doctrine aux relations purement métriques qui rentrent dans la classe de celles que j'ai nommé projectives, et c'est ce que je me propose de faire bientôt, quand j'en viendrai à exposer les propriétés des lignes et des surfaces courbes géométriques, dont la démonstration repose nécessairement sur la théorie des polaires réciproques.

C'est là aussi que j'aurai occasion de développer, avec toute l'étendue qui leur est propre, les principes de la Théorie des transversales établis par Mr. Carnot dans la Géométrie de position, et que jusqu'ici on n'avoit guère appliqués qu'aux systèmes de lignes droites et aux sections coniques. J'ai dû me borner, dans le Traité des propriétés projectives, à faire voir comment les principes fondamentaux et déjà connus de cette théorie pourroient se démontrer directement à l'aide des considérations de la perspective ou projection centrale, et je devois éviter d'en déduire des conséquences des applications dont l'exposé eût pu paroître étranger au but général de l'ouvrage et m'eut entrainé dans des développemens trop considérables. Je ne saurois d'ailleurs me proposer, quant à présent, de présenter à l'académie, une notice, même sommaire, des résultats auxquels je suis ainsi parvenu; cette notice seroit ici prématurée et conviendra mieux à l'époque où je serai en situation de lui offrir le travail lui-même; mon but actuel est seulement de mettre sous ses yeux, un aperçu général des efforts que j'ai faits jusqu'àprésent et que je me propose encore de faire, pour agarandir le domaine, déjà si vaste, de la Géométrie rationnelle, et surtout pour lui créer des ressources, des méthodes universelles qui paraissent encore lui manquer, et sembleroient plus particulièrement appartenir à la Géométrie analytique.

En effet, on a dû s'apercevoir facilement, d'après ce qui précède, que la doctrine des propriétés projectives, celle de la perspective en relief, le principe ou la loi de continuité, enfin la Théorie des polaires réciproques et la Théorie des transversales étendue aux lignes et surfaces courbes, ne forment pas simplement des classes, plus ou moins étendues, de problêmes et de théorêmes, mais constituent proprement, pour la Géométrie pure, des principes, des méthodes d'investigation et d'invention, des moyens d'extension et d'exposition, dans le genre de ceux qu'on a nommés principes d'exhaustion, méthode des infiniment petits etc.

Dans la théorie des lignes et des surfaces géométriques, que je me propose de faire paraître par portions et successivement, je n'adopterai aucune de ces méthodes d'une manière exclusive; je les mettrai toutes indifféremment à contribution selon l'avantage qu'elles pourront offrir dans chaque cas, et je montrerai ainsi l'étendue des ressources qui leur sont propres, et des conséquences que l'on en peut déduire. Mais, comme la théorie des courbes et des surfaces géometriques est étroitement liée à la doctrine du centre des moyennes harmoniques, qui est proprement une généralisation de celle du centre des moyennes distances; que cette doctrine n'est point connue et n'a été enseignée nulle part, je débute par un premier mémoire qui en renferme les principes les plus utiles et les plus remarquables, et dont je me contenterai de donner ici une notion aussi succincte qu'il me sera possible de le faire.

La proportion harmonique, comme on sait, tire son nom des trois principaux accords de la musique, et elle fait la base de l'échelle diatonique. Transportée dans le domaine de la Géométrie par les anciens et les modernes, elle les a déjà conduits à d'interressantes propriétés des lignes, dont la plupart sont exposées dans le Traité des propriétés projectives; elle semble, en un mot, devoir jouer un rôle brillant et nécessaire dans toutes les questions et propriétés qui ne concernent que la direction indéfinie des lignes et non leur mesure: il est facile, en effet, de démontrer qu'elle remplace partout, en projection, la division en parties égales, qui se présente si fréquemment dans la plupart des figures régulières de la Géométrie.

Supposons qu'à partir d'un même point et sur une même droite, on porte, dans le même sens, trois distances, dont la 1ere moins la 2eme, soit à la 2eme moins la 3eme, comme la 1ere est à la 3eme, ces trois distances seront en proportion harmonique; et, si l'on porte, à partir du même point et toujours dans le même sens, un nombre quelconque de distances, telles que trois quelconques d'entr'elles, qui sont consécutives, forment une proportion harmonique, la suite de toutes ces distances formera ce qu'on nomme une progression harmonique; or on démontre qu'il en sera encore ainsi pour toutes les projections centrales ou perspectives de la figure sur une droite arbitraire. Maintenant, si l'on suppose l'origine commune des segmens harmoniques à l'infini, soit dans la figure primitive, soit dans la projection, les points restans formeront une échelle de parties égales; et pour le dire en passant, c'est cette même propriété qui, dans l'art du dessin, a fait donner à la division en parties harmoniques, le nom d'échelle perspective ou fuyante.

Mr. Brianchon, dans ses applications de la théorie des transversales, a donné quelques uns des propriétés de l'échelle et de la progression harmonique, et j'en indique, dans mon mémoire, plusieurs autres qui étoient indispensables pour établir la théorie du centre des moyennes harmoniques, et qui sont la conséquence assez simple d'une remarque faite par Mac-Laurin, sur la proportion harmonique; savoir: que, „dans une telle proportion, la valeur inverse ou réci- „proque de la seconde des trois distances auxquelles elle se rapporte, „est moyenne arithmétique entre les réciproques de la première et „de la troisième;" il en résulte, en effet, que lorsque des distances ou segmens, comptés d'un même point et sur une même droite, sont en progression harmonique, les réciproques de ces distances sont, de leur côté, en progression arithmétique; ce qui justifie completement la première de ces dénominations, et fournit, à l'instant, le moyen de calculer un terme quelconque de la suite dont le rang est assigné.

Mac-Laurin, qui n'avoit point à examiner les propriétés de la progression harmonique, s'est contenté de déduire de sa remarque, la définition suivante de la moyenne harmonique: „La moyenne harmo- „nique entre un nombre quelconque de quantités est telle que sa recipro- „que est moyenne arithmétique entre toutes celles des autres, prise avec „un signe convenable *)." Il en a déduit en outre, une construction assez simple pour déterminer cette moyenne harmonique ou cette somme de réciproques, dans le cas de plusieurs distances ou segmens rangés sur une même droite et comptés d'un même point; son but étoit d'arriver, par là, à un théorême fort beau de Côtes sur les courbes algébriques et à quelques autres analogues sur la courbure de ces lignes, qui se

*) Voyez le *Traité des courbes géométriques*, par Mac-Laurin.

présentent comme des corollaires très particuliers du résultat de mon travail.

Tel est le point d'où je suis parti pour établir la doctrine du centre de moyennes harmoniques, qui fait le sujet du mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, et voici maintenant à quoi je suis parvenu.

J'ai commencé par transformer la relation qui définit la moyenne harmonique, d'après Mac-Laurin, en une autre plus générale et qui fût immédiatement projective dans le sens que j'ai précédemment indiqué; j'ai de suite été conduit à reconnoître que le point qui répond à cette moyenne, en supposant toujours les distances ou segmens comptés sur une même droite et d'une même origine, devenoit proprement le centre de moyennes distances des points appartenans aux autres, toutes les fois qu'on venoit à supposer l'origine commune à l'infini, soit dans la figure primitive, soit dans ses projections; rapprochement qui étoit impossible d'après la définition de Mac-Laurin, et qui m'a conduit à nommer, par analogie, le point en question, centre de moyennes harmoniques des points proposés, par rapport à l'origine commune d'où se mesurent les segmens harmoniques.

Dès lors je me suis trouvé en état de traduire, en les généralisant, soit les définitions, soit les propriétés qui concernent le centre des moyennes distances d'un nombre quelconque de points situés arbitrairement dans un plan ou dans l'espace; et pour le faire, je n'ai eu besoin constamment que de me servir des principes établis dans le Traité des propriétés projectives. J'ai obtenu, de cette manière, ce que j'ai déjà nommé précédemment la Théorie du centre des moyennes harmoniques. Mais ce n'est pas tout, comme les Géomètre sont parvenus, dans ces derniers temps, à étendre la Théorie du centre des moyennes distances au cas où les moyennes arithmétiques sont prises relativement à des coefficiens numériques quelconques, j'en ai fait tout autant pour celle du centre de moyennes harmoniques, et je suis arrivé ainsi à des conséquences qui offrent un nouveau champ de spéculations et de découvertes aux géomètres, et qui, dans des mains plus habiles, ne tarderont peut-être pas à produire des applications aussi heureuses qu'utiles.

Quoiqu'il en soit, j'ai exposé dans la dernière partie de mon mémoire, quelques unes des propriétés qui découlent de la Théorie du centre des moyennes harmoniques, pour les systêmes de points, de droites et de plans, et, afin de ne pas en multiplier inutilement le nombre, je me suis borné à celles dont la nature générale permet de les appliquer immédiatement aux courbes et aux surfaces géométriques d'un ordre quelconque; mettant ainsi ceux qui liront ce Mémoire en état de pressentir cette extension, et de se familiariser, peu à peu, avec ce qu'elle pourroit, au premier aspect, avoir de trop difficile ou de trop abstrait.

De la division harmonique des lignes droites, des progressions, des échelles et des moyennes harmoniques.

Il existe entre la division harmonique et la division en parties égales, une analogie très grande, qui conduit à une foule de conséquences et de rapprochemens curieux: avant de l'exposer dans toute sa généralité, il convient de l'éxaminer dans le cas le plus simple, celui d'une droite ou distance, portant uniquement un point de division entre ses extrémités; mais, attendu que les propriété relatives à ce cas sont généralement connues des géomètres, je ne ferai que rappeler celles qui me sont nécessaires, et renverrai pour plus de développement au „Traîté des propriétés projectives des figures."

1. Soit AB (Fig. 1.) une droite ou distance quelconque; prenons sur cette droite et son prolongement, les points Q et P, tels qu'on ait
$$\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}=\frac{PQ-PA}{PB-PQ},$$
la distance AB sera divisée harmoniquement en P et Q, et cette définition devra s'étendre au cas même où l'un quelconque des points proposés sera supposé à l'infini; mais alors le rapport des segments qui lui appartiennent dans la relation ci-dessus sera l'unité; donc il en sera de même du rapport des deux autres segmens restans. Que P, par exemple, passe à l'infini, on aura, d'après cette définition, $QA=QB$; et parconséquent le point Q, conjugué à P, divisera en parties égales la distance AB. Ainsi la division en parties harmoniques d'une droite, n'est qu'une extension de la division en parties égales, ou plutôt celle-ci est comprise implicitement dans l'autre, pourvu qu'on restitue le point de division qui est passé à l'infini, et qui est conjugué au point milieu. On admet

d'ailleurs que les droites qui renferment un même point situé à l'infini sont parallèles.

2. Cela posé, projetons, d'un point quelconque S, les quatre points A, B, P, Q ~~ainsi~~ définis, sur une droite arbitraire $P'B'$, on prouve aisément que les noveaux points A', B', P', Q' conservent entr'eux la relation harmonique

$$\frac{P'A'}{P'B'} = \frac{Q'A'}{Q'B'} = \frac{P'Q' - P'A'}{P'B' - P'Q'};$$

c'est-à-dire que cette relation est **projective** (voyez plus loin, l'art. 18.). Or, d'après ce qui précède, cela doit s'étendre au cas même pour lequel l'un quelconque des points proposés, ou l'un quelconque des points de la projection, passe à l'infini; ce qui exige alors que la transversale qui porte ce point soit parallèle à la projetante; donc la divivision harmonique se changeant, pour cette transversale, en division de parties égales, on voit que l'une de ces divisions est la perspective ou projection centrale de l'autre, et peut servir directement à la construire.

3. Mais on peut pousser plus loin ce rapprochement, en mettant la relation harmonique sous une forme d'abord indiquée par Mac-Laurin (Traité des courbes géométriques.).

En effet, de la proportion,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PQ - PA}{PB - PQ},$$

on tire immédiatement

$$2PA.PB = PB.PQ + PA.PQ,$$

ou, en divisant tout par $2PA.PB.PQ$,

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}\right);$$

relation entièrement analogue à celle qui a lieu pour la division en parties égales, lorsqu'on remplace le point P par un point quelconque p (Fig. 2.), et les rapports $\frac{1}{PQ}$, $\frac{1}{PA}$, $\frac{1}{PB}$ par les simples segments pQ, pA, pB; on a effectivement, en supposant que Q soit le milieu de AB:

$$pQ = \tfrac{1}{2}(pA + pB).$$

4. En nommant, avec Mac-Laurin, **réciproque** d'une ligne son **rapport inverse** à l'unité de mesure, la relation ci-dessus pour la division harmonique, exprimera que la réciproque de PQ est moyenne arithmétique entre les réciproques des segmens PA et PB; c'est pourquoi, quand une ligne

AB (Fig. 1.) est divisée harmoniquement aux points P et Q, ou que les segmens PA, PQ et PB, relatifs au point P, sont en proportion harmonique, on dit que le segment PQ est moyen harmonique entre les deux autres PA et PB; et comme, dans le cas ci-dessus de la division en parties égales, le point Q est nommé le centre des moyennes distances de A et de B, nous pourrons dire également que, dans celui de la division harmonique, le point Q est le centre des moyennes harmoniques des points A et B; et cela non d'une manière absolue, mais seulement par rapport au point P qui sert d'origine commune aux segmens harmoniques.

5. De plus, d'après ce qui a été observé ci-dessus (2.), en mettant la figure en projection ou perspective sur une droite quelconque $P'B'$ (Fig. 1.), le point Q', qui répond à celui dont il s'agit, sera encore un centre de moyenne harmonique par rapport aux points A' et B' de la projection, et relativement au point P' qui sert d'origine aux nouveaux segmens: ainsi, dans le faisceau des projetantes SA, SB, SP, SQ, on pourra nommer la droite SQ l'axe des moyennes harmoniques de SA et SB, par rapport à la droite SP, qui sera l'axe des origines harmoniques: la transversale $P'B'$ étant d'ailleurs prise parallèlement à ce dernier axe, tous ses points Q' deviendront des centres de moyennes distances d'après l'art. 2. déjà cité.

6. Pour complétter l'analogie entre les deux relations

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}\right), \quad pQ = \tfrac{1}{2}(pA + pB),$$

on peut remarquer qu'elles éprouvent dans leurs termes, les mêmes variations de signes pour les mêmes changemens de positions des points qui leur correspondent.

Supposons, par exemple, que, dans le cas de la division harmonique (Fig. 1.), le point P passe, d'un mouvement continu, de la gauche à la droite de A, à l'instant où la distance PA deviendra nulle, le segment QA devra (1.) l'être aussi, de même que PQ; par conséquent le point Q passera, à son tour, de la droite à la gauche du point A, et les distances PA, PQ, ayant changé de sens, devront changer en même temps de signe dans la relation ci-dessus, qui deviendra ainsi

$$-\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}\right) \text{ ou } \frac{1}{PQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{PA} - \frac{1}{PB}\right)$$

pour le cas où le point P auroit pris la place du point Q, et réciproquement. C'est en effet, ce dont on peut s'assurer directement à l'aide de la relation primitive; car, en la mettant sous cette forme

$$\frac{QA}{QB} = \frac{PQ - QA}{PQ + QB},$$

on en tire

$$\frac{1}{QP} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{QA} - \frac{1}{QB}\right)$$

résultat qui tient d'ailleurs à ce que, d'après la définition ci-dessus (1.) les points Q et P joissent de propriétés réciproques à l'égard de A et de B.

D'après cela, on voit que la règle des signes, pour la relation harmonique, est que, en considérant toujours comme positif le terme $\frac{1}{PQ}$, les termes $\frac{1}{PA}$, $\frac{1}{PB}$ qui entrent dans le second membre de cette relation, devront être affectés du signe $+$ ou du signe $-$, selon que, par rapport à l'origine P, les points aux quels ils répondent seront placés du même coté que le point Q ou d'un côté différent; or c'est ce qui a lieu précisement (Fig. 2.) dans la relation

$$pQ = \tfrac{1}{2}(pA + pB).$$

Donc la même règle des signes est applicable à ces deux espèces de relations, et par conséquent elles conserveront une forme semblable pour la même disposition des points à l'égard des origines P et p auxquelles elles se rapportent; seulement, en conservant ses points A et B, on ne sauroit changer, dans le cas de la division harmonique, l'origine P sans que le point Q ne change en même temps, au lieu qu'il reste fixe dans celui de la division en parties égales.

7. Les choses ainsi entendues, supposons (Fig. 1.) qu'on divise en deux parties égales, au point Q, la distance PQ moyenne harmonique entre PA et PB, on aura donc,

$$\frac{2}{PQ} = \frac{1}{PQ_1} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB};$$

et parconséquent, si l'on mène par le point P une suite de transversales PAB, $PA''B''$ .... dans l'angle ASB, puis qu'on prenne, sur chacune d'elles, des points Q_1, Q_1'' .... tels qu'on ait, en égard à la règle des signes posée ci-dessus,

$$\frac{1}{PQ_1} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}, \quad \frac{1}{PQ_1''} = \frac{1}{PA''} + \frac{1}{PB''} \; \ldots\ldots$$

les points ainsi définis seront (2. et 5.) sur une droite Q, Q'', parallèle à l'axe SQ des moyennes harmoniques des côtés de l'angle ASB, et passant par ses points a et b où chacune des parallèles Pa, Pb à l'un de ses côtés, rencontre l'autre. Car, pour ces positions particulières de la transversale PAB, ou $PA''B''$, le point Q_1, ou Q''_1, se confond avec l'un des points correspondans A ou B, d'après la relation ci-dessus, attendu que l'un des segmens correspondans devient infini.

Or delà résulte un moyen, indiqué par Mac-Laurin, pour construire directement le point Q, lorsqu'on connoit les points, P, A et B. Quant au centre Q des moyennes harmoniques, il est plus simple et plus élégant de le déterminer à l'aide du procédé suivant, qui n'exige que l'emploi de la ligne droite ou de la règle: ayant mené par l'origine P des segmens harmoniques, une transversale arbitraire $PA''B''$ dans l'angle des projetantes SA, SB, on joindra, par de nouvelles droites AB'', BA'', les points ainsi obtenus sur ces projetantes avec les points donnés A, B, et le point S' de leur intersection appartiendra à la projetante SQ du point Q cherché. Il est visible, en effet, que, si l'on substitue l'angle $AS'B$ à l'angle ASB, et la droite PS' à la droite PS, l'axe des moyennes harmoniques (5.) de cet angle, par rapport à P, et qui renferme nécessairement Q et Q'', devra aussi passer par le sommet S', et se confondre par conséquent avec celui SQ de l'angle ASB; on conclueroit d'ailleurs la même chose en observant que la figure peut être mise en projection ou perspective, sur un nouveau plan, de façon que P passe à l'infini, ou que les droites PAB, $PA''B''$ deviennent parrallèles, et c'est ainsi que nous avons démontré cette proposition généralement connue, a l'art. 154. du Traité des propriétés projectives.

8. Considérons maintenant une droite af (Fig. 3.), divisée en un nombre quelconque de parties égales aux points b, c, d, e ....; le point à l'infini de cette droite pourra être regardé (1.) comme l'origine commune des segmens harmoniques relatifs à trois points de division consécutifs quelconques, en y comprenant les points extrêmes a et f; donc (2.) si l'on projette le système de tous ces points sur une droite arbitraire $a'f'$, en a', b', c', d', e', f', il en sera de même du point p' qui est la projection du point à l'infini de af, à l'égard de trois points de division consécutifs quelconques de $a'f'$; c'est-à-dire que les segmens relatifs à p' et à ces points formeront une proportion harmonique; donc la suite de tous les segmens pa', pb', pc', pd' .... pf' formera une pro-

portion harmonique continue; et l'on pourra dire, avec Mr. Brianchon (Application de la théorie des transversales etc. §. 68.) que ces segmens forment une progression harmonique.

Pour justifier encore davantage cette expression, nous remarquerons que, d'après l'art. 2. et les articles suivans, il doit régner entre les réciproques des segmens qui répondent au point p' et aux différens points de division de $a'f'$, la même relation qu'entre les simples distances d'un point quelconque p de af, aux différens points de division $a, b, c \ldots . f$; mais ces dernières forment une progression arithmétique, donc il en est de même des réciproques qui leur correspondent.

En effet, on aura pour la droite af et le point arbitraire p,

$$2pb = pa + pc, \quad 2pc = pb + pd, \quad 2pd = pc + pe, \quad \ldots .$$

ou

$$pb - pa = pc - pb = pd - pb = pe - pd \ldots .,$$

comme aussi l'on a (3.), pour la droite af' par rapport à l'origine des divisions harmoniques p',

$$\frac{2}{p'b'} = \frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'c'}, \quad \frac{2}{p'c'} = \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'd'}, \quad \frac{2}{p'd'} = \frac{1}{p'c'} + \frac{1}{p'e'}, \quad \ldots .$$

ou

$$\frac{1}{p'b'} - \frac{1}{p'a'} = \frac{1}{p'e'} - \frac{1}{p'b'} = \frac{1}{p'd'} - \frac{1}{p'b'} = \frac{1}{p'e'} - \frac{1}{p'd'} \ldots .$$

9. Il résulte de ce rapprochement, en particulier, qu'on pourra calculer un terme quelconque de la progression harmonique, par les mêmes règles que l'on calcule un terme de la progression arithmétique, au moyen des extrêmes, quand son rang et assigné.

Supposons, par exemple, que la droite af soit divisée en $m+n$ parties égales aux points $b, c, d, \ldots .$, et qu'il y ait parconséquent $m+n+1$ segmens $pa, pb, pc, \ldots . pf$ correspondans au point arbitraire p; proposons nous de rechercher le segment pd du point d qui appartient à la n^e partie à compter de a, nous aurons, dans le cas dont il s'agit, des divisions égales,

$$pd = pa + ad = pa + \frac{n}{m+n}af = pa + \frac{n}{m+n}(pf - pa)$$

ou

$$pd = \frac{m}{m+n}pa + \frac{n}{m+n}pf = \frac{1}{m+n}(mpa + npf);$$

donc on aura aussi, dans le cas de la division harmonique, c'est-à-dire pour la perspective $a'f'$,

$$\frac{1}{p'd'} = \frac{1}{m+n}\left(\frac{m}{p'a'} + \frac{n}{p'f'}\right),$$

relation qui, en vertu de la continuité, doit même s'étendre au cas où les nombres m et n sont incommensurables entr'eux, et qui servira immédiatement à résoudre tous les problêmes analogues à ceux où il s'agit de diviser des distances en parties proportionnelles à des nombres donnés. On voit, en outre, qu'elle a une forme tout-à-fait semblable à celle (3.) qui concerne la simple division harmonique de $a'f'$ en p' et d'; si l'on y suppose en effet, m et n égaux à l'unité, on retombera sur celle dont il s'agit. C'est pourquoi on pourroit dire que le segment $p'd'$, relatif au point de division d', est moyen harmonique entre les segmens $p'a'$ et $p'f'$ pour les coëfficiens m et n, et que le point d' lui-même est le centre des moyennes harmoniques de a' et f' relativement à p' et à ces mêmes coëfficiens.

Enfin il résulte encore de ce qui précède que les points extrêmes a' et f' d'une échelle harmonique étant donnés, ainsi que le nombre des parties dont elle se compose et l'origine p' des segmens harmoniques, on pourra construire successivement, à l'aide du calcul, et sans recourir à l'échelle des divisions égales af, l'échelle harmonique dont il s'agit, à laquelle son grand usage dans la perspective a fait donner le nom d'Echelle perpective ou fuyante *).

10. On déduiroit beaucoup d'autres conséquences remarquables de ce qui précède; nous nous contenterons d'observer que, pour se oonstruire une échelle harmonique sur un dessin, ou pour diviser une ligne $a'f'$ en un certain nombre de parties harmoniques par rapport à un point quelconque p' pris pour origine, et qu'on nomme quelque fois point de fuite dans les Traités de perspective, il n'est point indispensable de recourir au calcul, comme nous venons de le faire, ni même de construire d'abord une échelle ordinaire de parties égales comme l'indique la Fig. 3.; des opérations purement linéaires ou qui s'exécutent avec la régle seule, suffisent pour atteindre le même but.

Remarquons d'abord que, quand une droite $a'f'$ est divisée en parties harmoniques aux points b', c', d', e', ..., par rapport à un point

*) Je ne crois pas que ces dernières propriétés de l'échelle harmonique aient encore été remarquées des géomètres; elle en possède quelques autres intéressantes, auxquelles les précédentes nous conduiroient aisément, mais dont l'examen nous écarteroit de notre objet. On peut consulter, à cet égard, le Mémoire de Mr. Brianchon, déjà cité art. 8. ci-dessus.

p' qui sert d'origine aux segmens harmoniques, la même chose aura lieu encore (2. et 8.) dans toutes ses projections centrales ou perspectives sur une autre droite quelconque; c'est-à-dire que, quel que soit le centre de projection s que l'on ait choisi en particulier, si l'on coupe le faisceau des projetantes sp', sa', sb', ... sf' qui lui correspondent par une droite arbitraire, le système de points qui en résulte, forme encore une échelle harmonique, ayant pour origine le point répondant à p'; c'est-à-dire, en un mot, que l'échelle harmonique est projective. Si, de plus, on prend pour transversale une droite af parallèle à la projetante sp', ou que l'origine des segmens harmoniques passe à l'infini dans la projection, l'échelle harmonique se changera en une échelle ordinaire de parties égales (2. et 8.).

11. Supposons donc (Fig. 4.) que a' et b' étant les deux premiers points de division d'une échelle harmonique, et p l'origine des segmens harmoniques ou le point de fuite, il s'agisse de construire successivement toutes les autres parties de l'échelle, prolongée de part et d'autre de a' jusqu'à l'infini: on tirera arbitrairement les deux droites pe'', ps'' par le point p, et l'on joindra, par d'autres droites $a''b'$, $a''a'$, un point quelconque a'' de pe'' aux points donnés a' et b', ces droites iront déterminer sur ps'' deux points s' et s'', dont on se servira ainsi qu'il suit pour construire l'échelle harmonique $a'b'c'd'$.....

On tirera $s''b'$ qui rencontrera pe'' en b''; traçant $s'b''$, elle ira rencontrer pf' au 3[e] point de division harmonique c'; traçant ensuite $c's''$, elle rencontrera pe'' en c'', et $s'c''$ ira construire le 4[e] point de division d'; il est évident que l'on pourra poursuivre cette opération à volonté, soit à droite, soit à gauche du point a', ce qui donnera l'échelle harmonique demandée a', b', c', d', ... *).

En effet, si l'on met la figure en projection sur un nouveau plan parallèle à $ps's''$, c'est à dire tel que cette droite passe à l'infini, les quadrilatères $a'b'a''b''$, $b'c'b''a''$, ... seront des parallélogrammes, et par conséquent la droite $a'f'$ sera une échelle ordinaire de parties éga-

*) Ces constructions sont entièrement analogues à celles que M. Brianchon a données pour la division d'une distance en parties égales dans les Applications de la Théorie des transversales (voy. §. 51. et 52.); mais, dans ce cas, elle ne peuvent s'effectuer uniquement avec la règle ou des alignemens.

les pour la nouvelle figure, de sorte qu'elle en est une de parties harmoniques pour l'ancienne.

12. Supposons maintenant que, s'étant donné une distance quelconque af, il s'agisse de la diviser en un certain nombre de parties harmoniques relativement au point quelconque p pris pour origine: on tracera arbitrairement une droite pf' passant par p, et l'on construira, comme ci-dessus, une échelle harmonique quelconque $a'b'c'd'\ldots f'$ par rapport à ce point, mais dont le nombre des divisions soit précisément celui des parties qn'on veut obtenir sur af. Cela posé, on tracera les droites aa', ff' qui, par leur intersection, donneront le point s, dont on se servira pour projeter les points de division de l'échelle $a'f'$ sur af. Il est évident, en effet, qu'à cause que la relation harmonique est projective, les points b, c, ... ainsi obtenus seront les points demandés.

Mais si, le nombre de parties harmoniques de af étant $m+n$, on demandoit simplement le point d qui appartient à la n^e partie, comme dans le problême ci-dessus (9.) résolu à l'aide du calcul, ayant d'ailleurs construit l'échelle harmonique $a'f'$, il n'y auroit autre chose à faire qu'à projeter le n^e point de division d' en d sur af, à partir de s.

Ces dernières considérations, quoiquelles nous aient un peu écarté de notre premier objet, nous seront néanmoins utiles pour ce qui concerne la partie des applications.

Du centre des moyennes harmonique des points quelconques rangés en ligne droite.

13. Jusqu'ici nous nous sommes bornés à comparer la division en parties égales à celle en parties harmoniques; mais on peut étendre plus loin l'objet des ce définitions, en observant, en général, que toutes les relations ou propriétés qui ont pour fondement la division en parties égales, doivent pouvoir se convertir en des relations ou propriétés analogues de la division harmonique; or de cette nature sont évidemment toutes celles qui concernent les centres de moyennes distances.

Soient, par exemple, a, b, c (Fig. 5.) trois points quelconques situés en ligne droite; soit q le centre de moyennes distances de ces points, p un point quelconque pris pour origine des segmens, on aura, comme on sait,

$$pq = \frac{pa+pb+pc}{3},$$

pourvu qu'on ait égard à la règle des signes posée ci-dessus (6.). Projetons les points a, b, c, q sur une droite quelconque $a'd'$, à partir d'un point arbitraire s et soient a', b', c', q' les points de la projection, on peut se demander quel rôle le point q' jouera par rapport aux points a', b', c'. Or je dis qu'en nommant p' le point qui représente, sur $a'c'$, celui à l'infini de ad, et dont la projetante sp' est ainsi parallèle à ad, on aura

$$\frac{1}{p'q'} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'}\right),$$

toujours en ayant égard à la règle des signes qui vient d'être indiquée.

Pour le prouver, il nous suffira de rechercher la manière dont on peut obtenir les points q et q' au moyen de ceux dont ils dépendent respectivement.

Pour le point q, il faut, comme on sait, prendre le milieu x de ab, puis diviser cx en trois parties égales, et prendre le premier point de division q, à partir de x, pour le point demandé; en effet on aura,

$$2px = pa + pb,$$
$$pq = px + \tfrac{1}{3}(pc - px) = \frac{2px + pc}{3} = \frac{pa + pb + pe}{3},$$

Or, pour obtenir ce qui concerne le point q' de la projection, il suffira évidemment de remplacer la division en parties égales par la division harmonique, en prenant p' pour origine; c'est à dire (3. et 9.) que, dans les relations ci-dessus, il faudra simplement remplacer les segmens qui se rapportent au point arbitraire p, par les réciproques de ceux qui répondent au point p', projection de celui à l'infini de ac; on aura donc,

$$\frac{1}{p'q'} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'}\right):$$

ce qui précède montre aussi, d'après l'article 12., comment il faudroit s'y prendre pour construire directement le point q' avec la règle, et sans recourir à la division en parties égales qu'indique la figure.

14. Le cas où l'on remplaceroit les trois points a, b, c par quatre points quelconques seroit encore plus facile à établir. En effet, s'il s'agittoit d'obtenir leur centre des moyennes distances, il suffiroit évidemment de prendre le milieu ou le centre des moyennes distances de deux quelconques de ces points, puis celui des deux autres, puis enfin le centre des moyennes distances des deux centres partiels ainsi trouvés; ce qui donneroit de suite, en nommant d le quatrième point, et conservant d'ailleurs les mêmes dénominations que ci-dessus,

$$pq = \frac{pa + pb + pc + pd}{4},$$

et parconséquent, en passant à la projection sur une droite quelconque $a'c'$,

$$\frac{1}{p'q'} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'} + \frac{1}{p'd'}\right).$$

En général, on voit que, quel que soit le nombre m des points a, b, c, d, ... rangés sur une même droite, le centre q des moyennes distances de tous ces points sera unique, et tel qu'en le projetant ainsi que ces points, sur une droite quelconque en q', a', b', c', d', ..., et nommant p' le point qui représente celui à l'infini de la proposée abc, on aura

$$\frac{1}{p'q'} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'} + \frac{1}{p'd'} + \text{etc.}\right),$$

ou

$$\frac{m}{p'q'} = \frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'} + \frac{1}{p'd'} + \text{etc.},$$

pourvu encore qu'on ait égard à la règle des signes posée art. 6. On voit de plus (12.), comment on pourra construire, avec la règle seule et sans recourir aux centres des moyennes distances, le point q' dont il s'agit, quand tous les autres a', b', c, d', ... seront donnés ainsi que le point p' qui sert d'origine commune aux segmens harmoniques; mais cette construction se faisant d'une manière successive et assez pénible, quand le nombre des points donnés est tant soit peu considérable, nous indiquerons plus tard des moyens généraux et simples pour y parvenir.

15. Mac-Laurin, qui a eu à considérer, dans son Traité des courbes géométriques, quelques unes des propriétés du point q' défini par les relations métriques ci-dessus, et qui n'a point aperçu l'analogie qui regnoit entre ce point et le centre des moyennes distances, ni les moyens de déduire l'un de ces points de l'autre, s'y prenoit d'une manière différente pour construire la valeur de $p'q'$: il déterminoit, à l'aide du procédé de l'article 7., le point dont la distance à p' a pour réciproque la somme des réciproques de $p'a'$ et de $p'b'$, c'est à dire $\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'}$, puis le nouveau point dont la distance à p' a pour réciproque la somme des réciproques du point déjà obtenu et du point c', c'est-à-dire $\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'}$, puis etc.; car, en nommant Q' le dernier point ainsi

obtenu, on aura

$$\frac{1}{p'Q'} = \frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'} + \text{etc.} = \frac{m}{p'q'},$$

et par conséquent $p'q' = mp'Q'$: cette méthoda a, comme on voit, l'inconvénient d'exiger l'emploi de la règle et du compas réunis, au lieu que la précédente n'exige s'implement que celui de la règle.

Mac-Laurin nomme $p'q'$ la moyenne harmonique des segmens $p'a'$, $p'b'$, $p'c'$, ...; nous pourrons donc dire aussi, par analogie, que le point q', projection du centre des moyennes distances des points a, b, c, ... en nombre m, est lui-même le centre des moyennes harmoniques des points a', b', c', ... de la projection, par rapport à p' qui représente le point à l'infini de pc; or cette définition s'accorde parfaitement avec celle de l'art. 4., dont elle n'est guère que l'extension; et, comme ici le faisceau des projetantes sa', sb', sc', ... conserve les mêmes propriétés à l'égard de sp', sq', quelle que soit la transversale $p'c'$, on pourra dire encore que la projetante sq' est l'axe des moyennes harmoniques du faisceau dont il s'agit; et cela non d'une manière absolue, mais seulement par rapport à la projetante sp' qui, à son tour, conservera le nom d'axe des origines harmoniques, et qui, venant à passer à l'infini avec les points, changera évidemment la projetante sq' en un simple axe des moyennes distances.

16. Les relations qui définissent le centre q' (Fig. 5.) des moyennes harmoniques étant projectives (14.), ou telles qu'elles subsistent dans toutes les projections centrales de la figure, on voit que les définitions et propriétés précédentes seront applicables directement à un faisceau quelconque de droites projetantes qui s'appuieroient sur des points donnés en ligne droite, sur leur centre de moyenne harmonique et sur l'origine relative à ce centre; c'est-à-dire que toute transversale déterminera, dans ce faisceau, un nouveau système de points qui auront entr'eux la même corrélation que les premiers, sauf le cas ou la transversale sera parallèle à l'axe des origines, et pour lequel l'origine des segmens harmoniques passant à l'infini, le centre des moyennes harmoniques se changera évidemment en un centre des moyennes distances.

Enfin on voit que si, par l'origine des segmens harmoniques de plusieurs points situés en ligne droite, on mène une droite ou un axe quelconque, et qu'on abaisse, de ces différens points et de leur centre de moyennes harmoniques des ordonnées sur cet axe, qui soient parallèles entr'elles, et à un autre axe arbitraire, celle qui répond au centre de moyennes harmoniques, sera encore la moyenne harmonique de toutes celles qui répondent aux points proposés; propriété qui est entièrement analogue à celle du centre des moyennes distances, si ce n'est que, pour ce dernier, l'origine étant entièrement arbitraire, il en est de même des axes de projection.

17. Au surplus, on peut partir de la définition générale du centre des moyennes harmoniques, pour ètablir directement ses diverses propriétés, sans recourir aux considérations précédentes, qui d'ailleurs nous paraissent mériter l'attention des géomètres. Or cette nouvelle manière d'envisager la question va nous conduire à d'autres résultats non moins remarquables que les premiers.

Soient a, b, c, d, ... (Fig. 6.) des points quelconques, en nombre m, rangés sur une même droite, et p un point arbitraire de cette droite pris pour origine des segmens; regardons, d'après la règle de l'art. 6., comme positifs tous les segmens qui sont à droite de p, et comme négatifs ceux qui sont dirigés dans le sens contraire. Cela posé si l'on choisit, sur la droite dont il s'agit, un point q tel que

$$\frac{m}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} \ldots\ldots,$$

en attribuant à chaque terme le signe qu'il doit avoir d'après le sens du segment qu'il renferme, le point q, ainsi déterminé, sera unique et le centre des moyennes harmoniques des points a, b, c, d, ... relativement à p. Il s'agit, en premier lieu, de prouver que ce point est **projectif**, c'est-à-dire tel qu'en le mettant en projection, sur une droite quelconque $p'd'$ et à partir d'un point arbitraire s de l'espace, aussi bien que le système de tous les points que l'on considère sur pd, la relation ci-dessus aura toujours lieu entre ces différens points.

Pour y parvenir nous mettrons cette relation sous la forme suivante, afin d'en mieux étudier ses propriétés:

$$\frac{1}{pq} - \frac{1}{pa} + \frac{1}{pq} - \frac{1}{pb} + \frac{1}{pq} - \frac{1}{pc} + \frac{1}{pq} - \frac{1}{pd} + \text{etc.} = 0.$$

Mais

$$\frac{1}{pq} - \frac{1}{pa} = \frac{pa - pq}{pa \cdot pq} = -\frac{aq}{ap \cdot pq}, \quad \frac{1}{pq} - \frac{1}{pb} = -\frac{bq}{bp \cdot pq},$$

$$\frac{1}{pq} - \frac{1}{pc} = \frac{cq}{cp \cdot pq}, \quad \ldots;$$

donc, substituant et supprimant le facteur pq commun à tous les termes, il viendra

$$-\frac{aq}{ap}-\frac{bq}{bp}+\frac{cq}{cp}+\frac{dq}{dp}+\text{etc.}=0,$$

équation dans laquelle les termes négatifs proviennent uniquement des points a, b, c, ... qu'on a supposés à gauche de q. Mais, d'après la règle de signes admise ci-dessus pour la définition du point q, chaque terme devra conserver le signe qu'il a actuellement, ou en changer, selon que le point a, b, c, ... auquel il se rapporte sera à droite ou à gauche du point p; donc l'équation ci-dessus pourra être remplacée généralement par cette autre

$$\frac{aq}{ap}+\frac{bq}{bp}+\frac{cq}{cp}+\frac{dq}{dp}+\text{etc.}=0,$$

pourvu que, dans chaque position des points du système, on attribue le signe $+$ ou le signe $-$ à un segment quelconque, selon qu'il est situé sur la droite ou sur la gauche de celles des origines p ou q à la quelle il se rapporte, ou ce qui revient au même et ce qui est plus simple encore, pourvu qu'on attribue à chaque terme de la relation ci-dessus le signe $+$ ou le signe $-$, selon que les deux segmens qui y entrent sont dirigés dans le même sens ou en sens contraire, par rapport à celui des points a, b, c, ... qui leur est commun.

D'après cela, on pourra énoncer ainsi d'une manière générale la rélation dont il s'agit:

L'origine p et le centre q des moyennes harmoniques d'un nombre quelconque de points a, b, c, d, ... rangés en ligne droite, sont tels que, si l'on prend successivement le rapport des distances de chacun de ces points à q et à p, la somme de tous ces rapports sera nulle, en attribuant le signe $+$ ou le signe $-$ à un rapport quelconque, selon que le point correspondant est situé sur l'un des prolongemens de la distance pq, ou entre ses extrémités.

18. Cet énoncé n'est évidemment que l'extension de celui qui se rapporte au cas particulier de l'art. 1. d'où nous sommes partis, et dans le quel ou ne considère que deux points a et b; prouvons maintenant qu'il s'applique à toutes les projections de la figure faite, d'un point quelconque s de l'espace, sur une droite arbitraire $p'd'$ du plan spd, et par

conséquent qu'il en est de même de la relation (17.) d'où nous sommes partis.

En effet, d'après ce qui a été établi art. 9. et suiv. du **Traité des propriétés projectives**, on a, en nommant P la perpendiculaire abaissée de s sur pd, et p, q, a, b, c, ... les projetantes sp, sq, sa, sb, sc, ...,

$$aq = \sin(asq)\frac{a.q}{P},\quad bq = \sin(bsq)\frac{b.q}{P},\quad cq = \sin(csq)\frac{c.q}{P},\quad \ldots.,$$

$$ap = \sin(asp)\frac{a.p}{P},\quad bp = \sin(bsp)\frac{b.p}{P},\quad cp = \sin(csp)\frac{c.p}{P},\quad \ldots.$$

Donc en sustituant ces expressions dans la dernière relation ci-dessus, et supprimant les facteurs communs à tous les termes, on aura la nouvelle relation

$$\frac{\sin asq}{\sin asp} + \frac{\sin bsq}{\sin bsp} + \frac{\sin csq}{\sin csp} + \text{etc.} = 0,$$

qui exprime qu'il y a entre les sinus des angles projetants la même relation qu'entre les segmens qui leur correspondent respectivement. Or de là on conclut aisément, et par réciproque, que, cette relation ayant lieu pour le faisceau des droites projetantes, il faut nécessairement qu'elle subsiste entre les segmens d'une transversale quelconque $p'd'$ prise pour axe de projection des segmens; donc enfin la relation examinée est de sa nature **projective**, ainsi qu'il s'agissoit de le démontrer directement; c'est-à-dire que, dans le faisceau ci-dessus, les projetantes sp et sq sont des **axes** (15.) **d'origines** et de **moyennes harmoniques** relativement à toutes les autres.

19. Remarquons en passant que, quoique la relation examinée en dernier lieu, subsiste entre les sinus des angles projetans des différens segmens qui y entrent, on ne sauroit pourtant en conclure que celle d'où nous sommes partis (17.) jouisse de la même propriété; or, je dis que cette dernière relation aura encore lieu de la même manière, non plus entre les sinus des angles projetans des différens segmens, mais entre les tangentes trigonométriques de ces angles, c'est-à-dire qu'on aura

$$\frac{m}{\text{tang}\, psq} = \frac{1}{\text{tang}\, psa} + \frac{1}{\text{tang}\, psb} + \frac{1}{\text{tang}\, psc} + \text{etc.}$$

En effet, la relation dont il s'agit étant projective d'après ce qui précède, devra subsister pour une transversale $p'd'$ perpendiculaire à la projetante sp du point p, mais les segmens $p'q'$, $p'a'$, $p'b'$, $p'c'$, ... de cette transversale, sont évidemment alors proportionnels aux tangentes trigonométriques des angles projetants qui leur correspondent respectivement; donc la relation ci-dessus a lieu entre ces tangentes, comme il s'agissoit de le démontrer, et comme il seroit facile de l'établir de plusieurs autres manières.

20. La transformation que nous avons fait subir, art. 17., à la relation qui définit le centre des moyennes harmoniques, n'est pas la seule qui puisse lui convenir, et il en est d'autres qui ne sont pas moins dignes de remarque, et qui sont tout aussi générales.

En effet, soit A un point quelconque de la direction de pd, pris pour nouvelle origine des segmens, servant à remplacer l'origine p, on aura identiquement

$$pa - pq = Aa - Aq,\quad pb - pq = Ab - Aq,\quad pc - pq = Ac - Aq,$$
$$pd - pc = Ad - Ac, \; \ldots .$$

pourvu qu'on regarde comme positifs les segmens des points placés à la droite de A, et comme négatifs ceux des points placés à la gauche de ce point; donc on aura aussi

$$\frac{1}{pq} - \frac{1}{pa} = \frac{pa - pq}{pa.pq} = \frac{Aa - Aq}{pa.pq} = \frac{Aa}{pa.pq} - \frac{Aq}{pq}.\frac{1}{pa},$$
$$\frac{1}{pq} - \frac{1}{pb} = \frac{Ab}{pb.pq} - \frac{Aq}{pq}.\frac{1}{pb},\quad \frac{1}{pq} - \frac{1}{pc} = \frac{Ac}{pc.pq} - \frac{Aq}{pq}.\frac{1}{pc} + \text{etc.}$$

d'où, en substituant dans la première des transformées de l'art. 17., et multipliant tout par pq,

$$\frac{Aa}{pa} + \frac{Ab}{pb} + \frac{Ac}{pc} + \frac{Ad}{pd} + \text{etc.} = Aq\left(\frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \text{etc.}\right) = \frac{mAq}{pq}$$

relation qui est assujettie à la même règle de signes que celle de l'endroit cité, et qui, de plus, la renferme comme cas particulier, puisqu'elle redonne celle-ci quand on y suppose $Aq = 0$, ou qu'on suppose le point A en q. En admettant même que l'origine arbitraire A soit à l'infini, les segmens infinis devant être censés égaux, disparaitront comme facteurs communs à tous les termes, et l'on retombera sur la relation

$$\frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \text{etc.} = \frac{m}{pq},$$

d'où nous sommes partis en premier lieu.

Mais la relation générale obtenue en dernier lieu, conduit à beaucoup d'autres relations semblables, sélon qu'on suppose le point A placé en a ou b ou c ....; par exemple: si $Aa = 0$, on aura

$$\frac{maq}{pq} = \frac{ab}{pb} + \frac{ac}{pc} + \frac{ad}{pd} + \text{etc.},$$

relation dans la quelle il faudra avoir égard à la règle de signes posée ci-devant, en regardant a et p comme les origines des divers segmens.

Elle deviendroit de même, pour $Ab = 0$, $Ac = 0$, etc.

$$\frac{mbq}{pq} = \frac{ba}{pa} + \frac{bc}{pc} + \frac{bd}{pd} + \text{etc.}$$

$$\frac{mcq}{pq} = \frac{ca}{pa} + \frac{cb}{pb} + \frac{cd}{pd} + \text{etc.}$$

d'où l'on en déduiroit une infinité d'autres.

Ces diverses relations, y compris celle d'où elles dérivent, satisfont toutes aux conditions indiquées art. 18.; donc, non seulement elles sont projectives, mais elles ont encore lieu d'une manière semblable entre les sinus des angles projetans qui répondent aux différens segmens.

21. Ce qui précède suffit pour faire apercevoir que le point q, ou le centre des moyennes harmoniques de points rangés en ligne droite, offre, dans ses propriétés, l'analogie la plus grande avec ce que l'on nomme le centre des moyennes distances de points pareils; pour la mettre dans tout son jour, il ne s'agit évidemment (14.) que d'examiner ce qui arrive dans les relations ci-dessus, pour le cas où l'on suppose le point p, qui sert d'origine aux segmens harmoniques, situé à l'infini sur ad. Mais alors tous les segmens qui ce comptent de ce point, sont infinis et doivent être censés égaux comme ne différant entr'eux que d'une quantité finie; donc la relation générale trouvée ci-dessus,

$$\frac{mAq}{pq} = \frac{Aa}{pa} + \frac{Ab}{pb} + \frac{Ac}{pc} + \frac{Ad}{pd} + \text{etc.},$$

se réduira simplement à la suivante

$$mAq = Aa + Ab + Ac + Ad + \text{etc.},$$

dans laquelle les différens termes devront, d'après ce qui précède, être affectés du signe $+$ ou du signe $-$, selon que le point auquel ils se rapportent sera à droite ou à gauche de l'origine A des segmens, et qui aura lieu quelle que soit la position de cette origine relativement aux points donnée a, b, c, ...; or on reconnoit ici la propriété caractéristique de ce qu'on nomme le centre des moyennes distances.

De plus, puisquè la relation générale ci-dessus est de sa nature projective, on voit que l'un de ces systêmes pourra toujours être envisagé comme la projection centrale ou perspective de l'autre, ainsi que cela a déjà été établi d'une manière différente art. 14. et 16. de ce mémoire. On peut d'ailleurs, comme on va le voir, partir directement de la définition particulière du centre des moyennes distances pour en déduire celle, beaucoup plus générale, qui convient au centre des moyennes harmoniques.

En effet, si nous nommons p le point à l'infini de ad, et q le centre des moyennes distances des points a, b, c, d, ..., nous pourrons, d'après le raisonnement déjà établi ci-dessus, mettre la relation particulière qui définit ce centre q, sous la formule générale,

$$\frac{mAq}{pq} = \frac{Aa}{pa} + \frac{Ab}{pb} + \frac{Ac}{pc} + \frac{Ad}{pd} + \text{etc.};$$

or cette relation, dans la quelle les segmens qui se mesurent du point p, sont infinis et égaux, satisfait aux conditions indiquées art. 18.; donc elle aura lieu à la fois pour toutes les perspectives du système proposé sur des droites arbitraires; et par conséquent, dans ces perspectives, le centre des moyennes distances deviendra le centre des moyennes harmoniques.

22. Supposons maintenant que, dans l'équation générale relative au centre des moyennes harmoniques q, les segmens relatifs à ce centre deviennent infinis, ou si l'on veut, supposons le point q à l'infini, ce qu'on peut toujours obtenir en mettant la figure en projection sur une droite quelconque parallèle à la projetante de se point; le rapport des segmens infinis Aq, pq devenant l'unité, l'on aura pour définir alors le point correspondant p, la nouvelle relation

$$m = \frac{Aa}{pa} + \frac{Ab}{pb} + \frac{Ac}{pc} + \frac{Ad}{pd} + \text{etc.}$$

Mais l'origine A étant entièrement arbitraire, on peut également la supposer à l'infini, confondue avec q, ce qui rèduit la relation ci-dessus à la suivante,

$$\frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \text{etc.} = 0,$$

en supprimant les facteurs ou segmens égaux et infinis; or, sous cette forme, elle est une conséquence très simple de celle d'où nous sommes partis (17.) pour la definition du centre q des moyennes harmoniques.

On voit, d'après cela, que les points p et q ne sont pas réciproques, et ne jouissent pas entr'eux des mêmes propriétés à l'égard des points a, b, c, d, ... comme sembleroit l'indiquer le cas particulier où ces derniers points sont au nombre de deux seulement (6.); aussi arrive-t-il que, bien qu'il ne corresponde nécessairement qu'un seul point q, ou qu'un seul centre des moyennes harmoniques relativement à un même point p pris pour origine (14.), et aux m points donnés a, b, c, d, ..., cependant il existe, en général, $m-1$ points p répondans à un même point q, choisi à volonté, et aux m points donnés a, b, c, ... C'est ce qu'il est, en effet, aisé de démontrer, avec ou sans calcul; mais, comme cette démonstration exige des développemens qui ne seroient pas ici à leur place, nous nous abstiendrons, pour le moment, de la donner, en renvoyant le lecteur à nos prochains mémoires.

23. Avant de terminer ce sujet, nous remarquerons que les diverses transformations que nous avons fait subir à la relation du No. 17., et qui expriment autant de propriétés du centre des moyennes harmoniques, sont uniquement basées sur ce que le nombre m est précisement égal à celui qui marque le nombre des points donnés a, b, c, ... Pour toute autre valeur de m, ces transformations seroient évidemment impossibles, ou du moins on seroit conduit à d'autres résultats, et la relation cesseroit d'être projective sous sa forme actuelle. Dans ces mêmes circonstances, pour construire le point q défini par cette relation, il faudra nécessairement faire usage de mesures graduées ou du compas, tandis que la construction du centre des moyennes harmoniques n'exige, comme on l'a fait voir (14.), que l'usage de la règle seule.

Supposons, par exemple, qu'il sagisse de construire le point Q (Fig. 6.) tel qu'on ait, en égard à la règle des signes établie ci-dessus:

$$\frac{n}{pQ} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \text{ etc.},$$

n étant un nombre quelconque. On pourra d'abord construire avec la règle, le centre des moyennes harmoniques q des points donnés a, b, c, d, ... par rapport à l'origine p; ce qui donnera, m étant le nombre de ces points

$$\frac{m}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \text{ etc.},$$

d'où

$$\frac{n}{pQ} = \frac{m}{pq} \text{ et } pQ = \frac{n}{m} pq,$$

expression qu'on ne pourra construire qu'à l'aide de mesures graduées ou du compas.

Il est évident qu'on pourroit aussi opérer directement, comme il a été indiqué art. 15.

24. En général, une équation dont les deux membres seroient composés de la somme d'une suite de réciproques assujetties à la règle de signes posée ci-dessus, et d'ailleurs multipliées par des coëfficiens numériques quelconques, sera ou non projective sous sa forme actuelle, et appartiendra ou non à la géométrie de la règle, toutes les fois que la somme des coëfficiens numériques relatifs à chaque terme, sera, abstraction faite des signes de position, ou ne sera pas la même de part et d'autre.

Pour fixer nos idées, supposons d'abord que l'on ait entre les points p, q, a, b, c, ... (Fig. 6.) la relation

$$\frac{m+m'+m''+\dots}{pq}=\frac{m}{pa}+\frac{m'}{pb}+\frac{m''}{pc}+\text{etc.}$$

dans laquelle m, m', m'', ... sont des coëfficiens numériques quelconques, positifs ou négatifs, mais indépendans de la position des points a, b, c, ... q, à l'égard de p; cette équation étant d'ailleurs assujettie à la règle de signes posée art. 6., elle se changera évidemment en ces deux autres, par des transformations analogues à celles des No. 17. et 20.:

$$\frac{maq}{ap}+\frac{m'bq}{bp}+\frac{m''cq}{cp}+\frac{m'''dq}{dp}+\text{etc.}=0,$$

$$\frac{mAa}{pa}+\frac{m'Ab}{pb}+\frac{m''Ac}{pc}+\frac{m''Ad}{pd}+\text{etc.}=(m+m'+m''\dots)\frac{Aq}{pq},$$

A étant une nouvelle origine quelconque; et réciproquement, de celle-ci on pourra conclure la relation primitive. Mais ces relations sont projectives (18.), donc il en sera de même de la primitive; je dis en outre qu'elles appartiennent à la géométrie linéaire ou de la règle.

En effet, au moyen de la règle, on trouvera (12.) le point x de ab tel, qu'en supposant ab divisée en $m+m'$ parties harmoniques par rapport à p, ax en contienne m' et bx, m: or on aura, d'après l'art. 9.,

$$\frac{m+m'}{px}=\frac{m}{pa}+\frac{m'}{pb}.$$

Pareillement on trouvera avec la règle, sur cx le point m' qui répond à la m^e partie harmonique de cette distance supposée en contenir $m+m'+m''$, et l'on aura

$$\frac{m+m'+m''}{px'}=\frac{m+m'}{px}+\frac{m'}{pc'}=\frac{m}{pa}+\frac{m'}{pb}+\frac{m''}{pc}$$

et ainsi de suite. Donc on arrivera à un dernier point de division X tel qu'on aura:

$$\frac{m+m'+m''+\ldots}{pX}=\frac{m}{pa}+\frac{m'}{pb}+\frac{m''}{pc}+\ldots,$$

et qui ne sera par conséquent que le point q lui-même, le quel se trouvera ainsi construit linéairement ou avec la règle seule.

25. Supposons maintenant (Fig. 7.) qu'on ait la relation harmonique quelconque

$$\frac{n}{pq}+\frac{n'}{pr}+\frac{n''}{ps}+\ldots=\frac{m}{pa}+\frac{m'}{pb}+\frac{m''}{pc}+\ldots$$

relativement à des points $a, b, c, \ldots, q, r, s$ situés en ligne droite, et à l'origine p des segmens harmoniques.

Daprès ce qui précède, on pourra d'abord remplacer tous les points $a, b, c, \ldots$ par un point X, constructible à l'aide de la règle, et tel qu'on ait

$$\frac{m+m'+m''+\ldots}{pX}=\frac{m}{pa}+\frac{m'}{pb}+\frac{m''}{pc}+\ldots;$$

on en trouvera, de la même manière, un autre Y tel qu'on ait

$$\frac{n+n'+n''+\ldots}{pY}=\frac{n}{pq}+\frac{n'}{pr}+\frac{n''}{ps}+\ldots;$$

donc, d'après la relation proposée, il viendra

$$\frac{n+n'+n''+\ldots}{pY}=\frac{m+m'+m''+\ldots}{pX}.$$

Si donc $n+n'+n''+\ldots=m+m'+m''+\ldots$ le point X devra se confondre avec le point Y, et parconséquent la relation d'où l'on est parti, appartiendra uniquement à la géométrie de la règle et sera d'ailleurs projective d'après ce qui précède, tandis qu'elle exigera, pour être construite, la règle et le compas dans toute autre supposition.

26. Ces diverses considérations nous permettent de généraliser la définition du centre des moyennes harmoniques, à peu près comme l'ont déjà fait MM. Carnot et Simon L'huilier de Genève, à l'égard du centre des moyennes distances: en posant, par exemple, pour la définition de ce point, l'équation

$$\frac{m+m'+m''+\ldots}{pq}=\frac{m}{pa}+\frac{m'}{pb}+\frac{m''}{pc}+\text{etc.},$$

q pourra encore être appelé le centre des moyennes harmoniques de $a, b, c, \ldots$ relativement à p, mais pour des coëfficiens numériques quelconques positifs $m, m', m'', \ldots$. Quant au cas où quelques uns de ces coëfficiens seroient négatifs indépendamment des signes de position des segmens auxquels ils se rapportent, on pourroit nommer le point correspondant q l'ex-centre des moyennes harmoniques, comme l'a fait, d'une manière analogue, Mr. L'huilier pour le cas des simples distances. En effet, la relation ci-dessus conduisant à cette autre, d'après ce qui a été observé plus haut (24),

$$(m+m'+m''+\ldots)\frac{Aq}{pq}=\frac{mAa}{pa}+\frac{m'Ab}{pb}+\frac{m''Ac}{pc}+\text{ etc.},$$

on retombera directement sur les définitions du centre et de l'ex-centre des moyennes distances, définis par M. L'huilier, en supposant (21.) que le point p passe à l'infini.

27. Je crois inutile de pousser plus loin ces rapprochemens entièrement analogues à ceux qui ont été établis, dans ce qui précède, pour le cas particulier où les coëfficiens m, m', m'', ... sont simplement égaux à l'unité; et je ferai seulement remarquer que les diverses définitions et propositions établies jusqu'à présent, pour ce cas particulier, doivent s'étendre, de la même manière, au cas général: ainsi, par exemple, le point p sera toujours l'origine des segmens harmoniques; et si, d'un point quelconque s de l'espace, on mène aux différens points que l'on considère des projetantes sp, sq, sa, sb, sc, ... celles qui appartiennent à p et à q devront continuer à s'appeler (15.) les axes des origines et des moyennes harmoniques de toutes les autres etc.

Dans le paragraphe suivant, je montrerai comment on peut étendre toute cette doctrine du centre des moyennes harmoniques, au cas où l'on considère des points quelconques situés dans un plan ou dans l'espace.

Du centre des moyennes harmoniques d'un systême de points quelconques situés ou non dans un même plan.

28. Nous n'avons encore envisagé, jusqu'àprésent, que les propriétés relatives au centre des moyennes harmoniques de points rangés en ligne droite; mais ce que nous avons dit pour ce cas particulier va nous conduire, sans peine, à ce qui concerne le systême d'un nombre quelconque de points situés à volonté sur un plan ou dans l'espace; car tout consiste simplement à partir de la définition ordinaire du centre des moyennes distances pour en déduire, à l'aide de la perspective ou projection centrale, celle qui convient au centre des moyennes harmoniques en général, et même les diverses propriétés qui peuvent lui appartenir. Il est

entendu d'ailleurs que, dans tout ce qui va suivre, le centre des moyennes distances et celui des moyennes harmoniques seront pris par rapport à des coëfficiens numériques quelconques, répondans respectivement aux points proposés suivant les définitions admises No. 26.

Considérons d'abord le cas où le système des points proposés *A*, *B*, *C*, *D*, ... (Fig. 8.) appartient à un même plan, et soit *Q* le centre des moyennes distances de ces points: l'une des propriétés essentielles du point *Q* c'est que, si l'on fait la projection du système sur une droite arbitraire *bd*, et par des parallèles *Aa*, *Bb*, *Cc*, ... à un axe quelconque, la projetante *Qq* de *Q*, sera l'axe des moyennes distances (15. et 27.) de celles des autres points du système, de sorte que, pour la transversale arbitraire *bd*, le point *Q* qui appartient à cet axe, sera le centre des moyennes distances des points *a*, *b*, *c*, *d*, ... relatifs aux diverses projetantes, ou, en d'autres termes, il sera (21.), par rapport au point à l'infini de *bd*, le centre des moyennes harmoniques, de ces mêmes points.

Cela posé, voyons ce qui se passe dans la perspective de la figure sur un nouveau plan arbitraire: tout système de projetantes parallèles *Aa*, *Bb*, *Cc*, ... sera devenu (Fig. 9.) un faisceau de droites convergentes en un même point *S*, et tous les points de concours *S* seront rangés sur une même droite *PS*, projection ou perspective de tous les points à l'infini du premier plan (Traité de propriétés projectives, No. 106.); le point *p* où la droite *PS* ira rencontrer la transversale arbitraire *bd* qui lui correspond, représentera donc aussi le point à l'infini de *bd* dans la figure primitive 8., de sorte que le point *q* sera devenu (26.) le centre des moyennes harmoniques des points *a*, *b*, *c*, ... par rapport à *p*. Mais la droite *bd* est arbitraire; donc, pour tout faisceau de projetantes, semblable à celui qui précède, la projetante *SQ* de *Q* sera (27.) l'axe des moyennes harmoniques de celles *SA*, *SB*, *SC*, ... des points proposés, par rapport à la droite invariable *SP*, qui, ici, sert d'axe commun des origines.

29. D'après cela, on peut dire que le point *Q* est le centre des moyennes harmoniques des points proposés *A*, *B*, *C*, ...; et cela non d'une manière absolue, mais seulement par rapport à la droite particulière *PS*, qu'on peut appeler l'axe des origines harmoniques. Or il s'agit de prouver maintenant qu'un système quelconque de points

A, B, C, ... (Fig. 9.) étant donné sur un plan, aussi bien qu'une droite PS prise pour axe des origines harmoniques, on peut toujours déterminer un point Q, et seulement un point Q, qui jouisse, par rapport à cette droite, des propriétes qui viennent d'être examinées, ou qui soit le centre des moyennes harmoniques des points proposés A, B, C, ... relativement à cette droite.

Qu'on mette, en effet, la figure en perspective sur un plan quelconque parallèle à la droite PS, c'est-à-dire tel que cette droite passe à l'infini dans la nouvelle figure; il est clair, d'après ce qui précède, que s'il existe, pour la figure primitive, un ou plusieurs points qui soient des centres de moyennes harmoniques par rapport aux proposés et à PS, tous ces centres devront se changer à la fois, en des centres de moyennes distances pour la nouvelle figure; mais un systême de points quelconques ne sauroit avoir plus d'un centre de moyennes distances, et possède cependant toujours un tel point; donc pareillement le systême des points proposés a toujours un centre de moyennes harmoniques par rapport à une droite donnée à volonté sur son plan, et ne sauroit avoir qu'un seul point pareil pour chaque position donnée de cette droite, ce qui donne lieu à la proposition suivante.

Une droite, prise pour axe des origines, étant donnée à volonté dans le plan d'un systême de points quelconques, il existe un autre point et seulement un point, qu'on peut nommer le centre des moyennes harmoniques des premiers par rapport à la droite proposée, et dont la propriété est telle que, si d'un point quelconque de cette droite, on mène des projetantes aux points donnés, l'axe (27.) des moyennes harmoniques de toutes ces projetantes, par rapport à la droite donnée, ira toujours passer par le point fixe ou centre des moyennes harmoniques dont il sagit.

30. Les propriétés ci-dessus du centre des moyennes harmoniques de points quelconques situés sur un plan, se rapportent évidemment (24.) à celles que nous avons nommées projectives; donc si, d'un point quelconque de l'espace, on fait la projection ou perspective de la figure sur un nouveau plan quelconque, le centre des moyennes harmoniques des points proposés ne cessera pas d'être un centre de moyennes harmoniques en projection, par rapport à la droite qui représente l'axe des ori-

gines harmoniques du premier système; on pourra donc dire aussi que, dans l'espace, la projetante de ce point est l'axe des moyennes harmoniques des projetantes qui appartiennent aux points proposés, et cela non d'une manière absolue, mais relativement au plan projetant de la droite d'où se comptent les segmens harmoniques, plan qu'on peut aussi nommer pour cette raison, plan des origines harmoniques.

Ces définitions sont évidemment des extensions de celles de l'art. 27. relatives aux faisceaux de droites convergentes tracées dans un même plan, et elles donnent lieu à l'énoncé qui suit:

Un système de points quelconques étant situé dans un même plan, et un plan quelconque étant donné à volonté dans l'espace, si, d'un point choisi arbitrairement dans ce dernier plan, on mène des droites ou *projetantes* aux différens points du premier, puis qu'on détermine, par rapport au second plan considéré comme plan des origines, l'axe des moyennes harmoniques de ces droites, tous ses axes semblables iront passer par un même point, qui sera (29.) le centre des moyennes harmoniques des proposés, relativement à la droite d'intersection de son plan et du plan des origines.

31. Maintenant il ne nous sera pas difficile d'étendre ces considérations au cas où les points proposés A, B, C, D, ... (Fig. 9.) au lieu d'être sur un même plan, sont situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Remarquons d'abord qu'un système pareil a toujours un centre de moyennes distances et n'en a qu'un seul dont la propriété est que, „si „l'on projette par des parallèles quelconques, tous les points pro- „posés sur un plan arbitraire, la projection de ce centre sera encore le „centre des moyennes distances de la projection des autres points du „système; c'est-à-dire que la projetante qui lui est relative sera l'axe „des moyennes distances de celles des autres points de la figure."

Mais, d'après les principes que nous avons établis dans le Traité des propriétés projectives (Supplément. No. 5. 6. et suiv.), la figure qu'on vient de considérer peut toujours être censée la perspective en relief d'une autre, dans la quelle tous les points à l'infini de l'espace, relatifs à la première, sont remplacés par ceux d'un plan unique; de sorte que les différens faisceaux de projetantes parallèles de cette figure, sont devenus des faisceaux de droites convergeants en des points de ce plan. De plus, dans la nouvelle figure, les centres et axes de moyennes distances sont devenus (30.) des centres et axes de moyennes harmoniques par rapport au plan dont il s'agit ou aux droites qui le concernent; et d'un autre côté, quelle que soit la situation d'un plan à l'égard d'un système de points quelconques donnés dans l'espace, on peut toujours, d'après les principes cités, considérer ce système comme la perspective en relief d'un autre pour lequel le plan dont il s'agit est passé à l'infini; donc enfin:

Un système de points quelconques, et un plan étant donnés dans l'espace, il existe toujours un autre point et un seul point, qu'on peut nommer *centre des moyennes harmoniques* des proposés par rapport au plan que l'on considère en particulier, et dont la propriété est telle que, si on le projette ainsi que tous les proposés sur un nouveau plan arbitraire et à partir d'un point quelconque du premier pris pour centre de projection, il demeure dans cette projection un centre de moyennes harmonique relativement à la droite d'intersection des deux plans; c'est-à-dire que la projetante qui le renferme est (30.) l'axe des moyenes harmoniques de toutes les autres, relativement au plan qui contient tous les centres de projection, et qui est encore ici le *plan des origines harmoniques*.

32. S'il étoit permis de se servir du compas ou du tracé des parallèles, ce qui précède montre assez comment on devroit opérer pour obtenir le centre des moyennes harmoniques d'un système de points quelconques situés dans un plan ou en général dans l'espace; car, en mettant le système de ces points en perspective de façon que la droite ou le plan des origines harmoniques, qu'on s'est donné arbitrairement, passe à l'infini, tout reviendrait a déterminer le centre des moyennes distances des points de la nouvelle figure et à le projeter sur la première.

Mais, si l'on veut simplement opérer avec la règle, il faudra s'y prendre d'une autre manière.

Par exemple, si les points proposés A, B, C, D, ... (Fig. 9.) sont dans un même plan, ainsi que la droite PS qui sert d'origine aux segmens harmoniques, il faudra, de deux points différens S, S' de cette droite, faire la perspective ou projection centrale des proposés sur deux droites arbitraires telles que pd par exemple; cherchant ensuite, par les procédés du No. 24., et pour chaque droite pd, le centre des moyennes harmoniques q des points a, b, c, d, ... de la projection, et cela par rapport au point p qui appartient à l'axe PS des origines harmoniques, les projetantes qS des centres partiels ainsi obtenus, iront se couper au centre unique (29.) Q des moyennes harmoniques que l'on cherche.

Si les points proposés A, B, C, ... étoient situés d'une manière quelconque dans l'espace, il suffiroit évidemment de remplacer, dans les opérations ci-dessus, l'axe PS des origines harmoniques et les transversales arbitraires pd par des plans.

33. Mais on peut aussi opérer directement sur les points proposés, sans recourir à la projection, ainsi que cela se pratique lorsqu'il s'agit de trouver le centre des moyennes distances; et cette méthode aura en même temps l'avantage d'être plus expéditive que la précédente.

Pour cela, il suffit d'observer, d'après ce qui précède, que l'un de ces systèmes peut toujours être envisagé comme la perspective de l'autre, et qu'il n'y a de différence entre eux, qu'en ce que, pour le cas des moyennes distances, le point, la droite, le plan qui servent d'origine aux segmens harmoniques, sont situés entièrement à l'infini, de sorte que les systèmes de lignes qni y convergent sont des systêmes de parallèles, tandisque les divisions harmoniques sont remplacées par les divisions en parties égales, et vice versa pour l'autre systême de points.

Soient, par exemple, A, B, C (Fig. 10.) trois points quelconques dont il faille trouver le centre des moyennes harmoniques Q par rapport à la droite PP'; on se rappelera que, dans le cas où la droite PP' est à l'infini, et où le point Q devient (Fig. 11.) le centre des moyennes distances de A, B, C, on n'a qu'à prendre les points milieux q, q', q'' des côtés du triangle ABC, et à joindre par une droite chacun de ces points au sommet opposé du triangle; car ces droites donneront, par leur croisement, le point Q demandé. Opérant donc de la même manière sur le triangle proposé ABC (Fig. 10.), en prenant (2. et 7.) pour les points q, q', q'', les centres de moyennes harmoniques des couples de sommets correspondans, et cela en choisissant pour origines respectives des segmens harmoniques les points P, P', P'', où les côtés du triangle ABC vont rencontrer la droite PP', le point Q, ainsi construit, sera le centre

tre des moyennes harmoniques des sommets A, B, C par rapport à cette droite.

34. Pour le cas de quatre points A, B, C, D (Fig. 12.), dont on veut avoir le centre Q des moyennes harmoniques par rapport à la droite $P'P''$, on prendra ces points pour les sommets d'un quadrilatère $ABCD$, dont on prolongera les côtés jusqu'à la droite $P'P''$; on déterminera ensuite les centres des moyennes harmoniques q, q', q'', q''' des paires de sommets appartenans à chaque côté, et cela relativement au point de rencontre de ce côté et de la droite $P'P''$; joignant ensuite ceux de ces centres qui se trouvent sur les côtés opposés du quadrilatère, on aura les droites qq'', $q'q'''$ dont l'intersection Q sera le point demandé; car c'est ainsi qu'on opéreroit si la droite $P'P''$, passant à l'infini, il s'agissoit de déterminer le centre Q des moyennes distances des points A, B, C, D.

On pourroit d'ailleurs remplacer le quadrilatère $ABCD$ par tout autre qui auroit les mêmes sommets; on pourroit aussi chercher le centre des moyennes harmoniques de trois quelconques des points proposés, et le joindre au quatrième par une droite qui devroit renfermer le point cherché etc.; dans tous les cas on obtiendra un point unique Q, comme cela a lieu lorsqu'on suppose l'axe des origines $P'P''$ à l'infini.

35. Si l'on avoit cinq points à considérer, on rechercheroit d'abord le contre des moyennes harmoniques de quatre quelconques de ces points; et la droite qui le joindroit au cinquième, renfermeroit le centre des moyennes harmoniques du système total des points donnés; une nouvelle opération analogue donneroit donc ce centre lui-même. En général, on pourra prendre le centre des moyennes harmoniques d'un certain nombre de points, puis le centre pareil des points restans; la droite qui renfermera les deux centres ainsi trouvés contiendra aussi celui du système total des points donnés. Mais, au lieu de rechercher une nouvelle droite qui contienne ce dernier centre, on pourra se contenter de déterminer, sur la premiere (9. et 12.), le centre des moyennes harmoniques des deux centres partiels déjà trouvés, relativement aux nombres qui marquent de combien de points ces centres respectifs proviennent etc.

On voit comment il faudroit s'y prendre pour un nombre quelconque de points qui seroient supposés dans l'espace; il suffiroit, dans les opérations ci-dessus, de remplacer la transversale $P'P''$ par un plan, ainsi qu'il a déjà été expliqué (32.).

36. Ce qui précède est simplement relatif au cas où les coëfficiens numériques, par rapport auxquels on prend les centres de moyennes harmoniques, sont égaux à l'unité ou égaux entre eux; mais il est évident d'après les art. 26., 27. etc. que tout ce que nous avons pu dire, jusqu'à présent, de ce cas particulier, est immédiatement applicable à celui où les coefficiens seroient des nombres quelconques répondant respectivement aux points donnés. Ainsi, par exemple, si l'on a trois points A, B, C (Fig. 10.) dont m, m', m'' sont les coefficiens numériques respectifs, et qu'il s'agisse d'en trouver le centre des moyennes harmoniques Q, par rapport à ces coëfficiens et à la droite P, P'; on prendra d'abord (9. et 12.) le centre des moyennes harmoniques q des points A et B, par rapport aux coëfficien m et m' qui leur correspondent, et au point P de la droite des origines PP'; puis on prendra pareillement le centre des moyennes harmoniques q' des points B et C, par rapport aux coëfficiens numériques m' et m'' et au point P' de PP'; les droites qC et $q'A$ iront encore se croiser au point Q demandé, et il en seroit de de même de la droite $q''B$, qui appartient au centre des moyennes harmoniques q'' de A et de C, par rapport aux coëfficiens numériques m et m'' de ces points.

En effet, si l'on met la figure en perspective de façon que la droite PP' passe à l'infini, le point Q deviendra évidemment le centre des moyennes distances des points A, B, C par rapport aux coëfficiens respectifs m, m', m''.

D'après cet exemple et d'après ce qui a été dit pour le cas particulier où les coëfficiens numériques sont égaux à l'unité, on voit ce qu'il y auroit à faire pour celui où l'on auroit un nombre quelconque de points auxquels correspondroient respectivement des coëfficiens numériques donnés, s'il s'agissoit de trouver, pour ces coëfficiens, le centre des moyennes harmoniques des points dont il sagit.

37. Il n'est pas inutile d'observer que le cas particulier où les coëfficiens numériques sont égaux entre eux ou égaux à l'unité, donne lieu à des simplifications notables dans la construction générale ci-dessus du centre des moyennes harmoniques. Car, par exemple, s'il s'agit des sommets d'un triangle ABC (Fig. 10.), tout consistera alors, pour avoir les

trois droites cq, Aq' et Bq'' qui contiennent leur centre Q des moyennes harmoniques, de former un nouveau triangle $A'B'C'$ circonscrit au premier, et dont les côtés aillent concourir respectivement aux points P, P' et P'' où les côtés qui leur sont opposés dans le premier, vont rencontrer l'axe ou le plan des origines harmoniques PP'; en effet en se reportant à la projection (Fig. 11.), où l'on suppose PP' à l'infini, il sera facile de voir que les droites AA', BB', CC' qui joignent les sommets opposés des triangles seront précisément celles qui se croisent au point Q demandé.

On peut d'ailleurs remarquer que le triangle inscrit $qq'q''$, qui a ses sommets aux centres des moyennes harmoniques q, q', q'' des côtés du proposé ABC, jouit, à son égard, des mêmes propriétés que le triangle circonscrit $A'B'C'$; de sorte que, si l'on connoissoit seulement l'un quelconque q de ses sommets, on obtiendroit les deux autres par le simple tracé des droites $P'q''q$, $P''q'q$.

38. Plus généralement, si l'on a un nombre quelconque de points A, B, C, D (Fig. 12.) situés ou non dans un même plan, et que $P'P''$ soit l'axe ou le plan des origines harmoniques, il suffira de connaître le centre des moyennes harmoniques q de deux quelconques A, B de ces points, pour en déduire sur le champ, ceux qui appartiennent à tous les points proposés en les prenant deux à deux.

Supposons, par exemple, que les points A, B, C, D, ... soient pris pour les sommets d'un polygone $ABCD$ ...., il sera très facile d'obtenir, sur chaque côté, le centre des moyennes harmoniques des sommets adjacens; car, d'après ce qui précède, pour avoir le centre q' des sommets B et C, ayant déjà le centre q de A et B, on n'aura qu'à tracer la droite qq' qui va rencontrer l'axe des origines harmoniques $P'P''$ au même point que la diagonale AC du polygone appartenant aux trois sommets consécutifs A, B, C que l'on considère.

Pareillement, pour obtenir le centre q'' qui appartient au côté suivant CD, on n'aura qu'à tracer la droite $q'q''$ qui va rencontrer l'axe des origines au point où le rencontre la diagonale BD, déterminée par les sommets extrêmes des côtés BC et CD que l'on considère et auxquels appartiennent les points q' et q''. En continuant donc ainsi jusqu'au dernier côté du polygone $ABCD$ ...., on formera un nouveau polygone q, q', q'', q''' .... inscrit au premier, dont les côtés rencontreront respectivement l'axe des origines $P'P''$ aux points où le coupent les diagonales du premier polygone qui joignent ses sommets alternatifs, et dont les sommets seront précisement les centres de moyennes harmoniques qu'on cherche sur les côtés du polygone *ABCD*...

Il est clair qu'ayant une fois les centres de moyennes harmoniques des différens côtés du polygone *ABCD*...., on aura, sans peine, celui qui appartient à une diagonale ou à deux sommets quelconques, car cette diagonale est elle-même le dernier côté de l'un ou de l'autre des polygones dans lesquels elle divise le proposé, polygones dont on connoît déjà les centres de moyennes harmoniques des différens côtés à l'exception de celui du dernier, qu'on pourra obtenir ainsi par le tracé des simples lignes droites.

39. Toutes ces constructions peuvent d'ailleurs s'établir directement, en supposant qu'on mette la figure en perspective, de façon que la droite ou le plan $P'P''$ des origines harmoniques passe à l'infini; et l'on voit en même temps quelle espèce de simplifications elles apportent dans la détermination ci-dessus (art. 35.) du centre des moyennes harmoniques d'un nombre quelconque de points situés à volonté sur un plan ou dans l'espace; or ces remarques ne sont pas simplement curieuses comme on va s'en convaincre par ce qui suit.

En effet, ce qui précède fournit un moyen très simple et très expéditif pour construire, sur une droite pd (Fig. 9.), le centre des moyennes harmoniques q d'un nombre quelconque de points a, b, c, ..., par rapport à un dernier point p pris pour origine de segmens harmoniques; car, ayant mené d'un point quelconque S situé au dehors de la droite pd, les projetantes Sa, Sb, Sc, Sd, ..., puis, ayant pris, à volonté, de nouveaux points A, B, C, D, ... sur chacune d'elles et répondant respectivement à ceux dont on cherche le centre des moyennes harmoniques, tout consistera à construire, comme il vient d'être expliqué dans ce qui précède, le centre pareil Q des points A, B, C, D, ... par rapport à PS pris pour axe des origines, et à projeter ce centre, de S, sur pd, en q qui sera (28. et 29.) le point demandé.

40. Cette construction est plus simple que celle qui a été indiquée art. 14., et l'on peut remarquer qu'elle s'étend immédiatement au cas général où le centre q des moyennes harmoniques que l'on cherche, est relatif (26.) à des coëfficiens numériques quelconques m, m', m'', ... répondant respectivement aux points donnés a, b, c, d, ..., puisqu'il

suffit évidemment, au lieu de se borner à ne prendre qu'un seul point A, B, C, ... sur chacune des projetantes Sa, Sb, Sc, ... qui appartiennent aux proposés, d'en choisir autant qu'il est marqué par le coëfficient numérique relatif à cette projetante ou au point d'où elle dérive.

Que l'on ait, par exemple, deux points a, b auxquels correspondent respectivement les coëfficiens numériques m et m', on devra prendre m points arbitraires sur la projetante Sa, et m' points pareils sur la projetante Sb; cherchant ensuite le centre Q des moyennes harmoniques de ces $m+m'$ points et le projetant en q sur pb, q sera le centre des moyennes harmoniques de a et de b relativement à m et m'; c'est-à-dire qu'on aura (9.)

$$\frac{m+m'}{pq} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb},$$

ou (24.)

$$m\frac{aq}{ap} + m'\frac{bq}{bp} = 0,$$

en ayant égard à la règle de signes posée art. 17.

Les points A, B, C, ... qu'on doit prendre sur les diverses projetantes Sa, Sb, Sc, ... pouvant avoir une position quelconque, on devra profiter de cette indétermination pour simplifier les opérations relatives à la recherche des points Q et q; mais ces simplifications se présentent d'une manière trop facile, dans les projections de la figure où ces points deviennent des centres de moyennes distances, pour qu'il soit nécessaire d'entrer dans des détails; et l'on seroit conduit d'ailleurs à des résultats qui n'auroient qu'un léger avantage sur ceux de l'art. (9.) et suiv. où l'on ne considère simplement que deux points a, b et les coëfficiens numériques m et n relatifs à ces points.

Application de la théorie du centre des moyennes harmoniques aux propriétés des figures rectilignes et polyédrales.

41. La théorie qui vient de nous occuper donne lieu à un grand nombre de propriétés nouvelles concernant les figures rectilignes; beaucoup de ces propriétés entièrement analogues à celles qu'on déduit ordinairement de la théorie du centre des moyennes distances, sont par là même faciles à découvrir et peuvent être abandonnées aux investigations du lecteur; mais il en est d'autres qui, se rattachant à des propriétés du centre des moyennes distances non aussi généralement connues, et qui, étant susceptibles d'être transportées dans la théorie des courbes et des surfaces géométriques, méritent qu'on leur accorde une attention plus particulière; or c'est à cet objet que nous allons consacrer les dernières pages de ce Mémoire.

Remarquons, en premier lieu, que la plupart des principes que nous avons établis sur le centre des moyennes harmoniques, peuvent être envisagés comme autant de propriétés distinctes des figures composées simplement de points, de droites et de plans quelconques.

Par exemple, les principes des No. 24. et suiv. conduisent immédiatement à cet énoncé:

„Etant donné à volonté, dans un plan, un faisceau de droites projetantes Sp, Sa, Sb, Sc, ... (Fig. 7.), c'est-à-dire convergeant en „un même point S, si, ayant choisi l'une quelconque d'entre elles Sp „pour axe des origines harmoniques, on mène arbitrairement des transversales droites ps, $p's'$, ... dans ce faisceau, puis qu'on détermine, „sur chacune d'elles, le centre des moyennes harmoniques q, q', ... „des points d'intersection a, b, c, ..., a', b', c', ..., qui lui appartiennent, par rapport aux points p, p', ... de l'axe Sp des origines harmoniques et relativement à des coëfficiens numériques quelconques (26.); „la suite des centres pareils sera une seule est même droite Sq, passant „par S, et que nous avons nommée l'axe des moyennes harmoniques du „faisceau formé par toutes les autres projetantes."

42. Au lieu de mener arbitrairement les transversales ps, $p's'$, ..., on peut exiger qu'elles passent par un même point du plan de la figure, et prendre ce point, sur l'axe Sp des origines harmoniques, en p par exemple, au quel cas cet axe devient inutile pour déterminer les centres q, puisque le point p est, pour toutes les transversales, l'origine commune et unique des segmens harmoniques: le théorême ci-dessus subsiste évidemment toujours; mais ainsi particularisé, il offre l'avantage singulier de pouvoir s'étendre à un systême de droites quelconques situées dans un plan, et non plus simplement à un systême de droites convergeant en un même point S; bien plus, pour arriver au théorême ainsi généralisé, il suffit, comme on va le voir, de partir du cas particulier où l'on ne considère que deux droites uniques Sa et Sb, cas qui se déduit immédiatement des principes exposés art. 8. et 9. de ce Mémoire.

Soient, en effet, AB, BC, CD, ... (Fig. 13.) des droites indéfinies quelconques situées sur un plan, p un point arbitraire pris pour pôle des transversales pb qui rencontrent respectivement en a, b, c, d, ... les droites fixes dont il s'agit; je dis que si l'on détermine, sur chaque transversale pb, le centre q des moyennes harmoniques des points a, b, c, d, ... par rapport au pôle p, pris ponr origine des segmens et aux coëfficiens numériques quelconques m, m', m'', ..., la suite des points q sera une droite unique qQ', qu'on pourra appeler l'axe des moyennes harmoniques des droites proposées, relativement à p et aux différens coëfficiens qui leur correspondent respectivement.

Pour le prouver, considérons d'abord deux droites AB, BC, aux quelles répondent les coëfficiens numériques m et m'; si, sur les transversales pd, nous prenons sans cesse les centres q' des moyennes harmoniques qui répondent aux points a et b de l'angle ABC, et aux coëfficiens m et m', d'après ce qui précède, la suite des centres q' sera une droite $q'B$ passant par le sommet de l'angle, et à laquelle correspondra (24. et 26.) un nouveau coëfficient $m+m'$. Soit Q le point où cette droite rencontre CD, la troisième des droites données; prenons sur la transversale variable pb, le nouveau centre q'' des moyennes harmoniques des points c et q' qui appartiennent aux côtés CDc et BQq', de l'angle Q, et cela par rapport au point p et aux coëfficiens m'', $m+m'$ répondans respectivement à ces côtés; le point q'' sera le centre des moyennes harmoniques de a, b, c, et la suite de ces centres sera sur une nouvelle droite $q''Q$ passant par Q, à la quelle correspondra un coëfficient $m+m'+m''$, et qui rencontrera la quatrième AD des droites données en un point Q', qu'il faudra prendre pour nouveau sommet d'angle B. On arrivera donc, en continuant ainsi, à une dernière droite qQ' qui sera le lieu des centres de moyennes harmoniques de tous les points d'intersection a, b, c, d, ... de la transversale mobile et des droites proposées, et qui en sera l'axe des moyennes harmoniques pour les coëfficiens m, m', m'', ..., et relativement au pôle p; théorême qu'on peut énoncer très simplement de cette manière:

Un systême de droites quelconques étant donné dans un plan, si l'on coupe ce systême par une suite de droites transversales passant par un même point ou pôle, puis qu'on détermine, pour chaque transversale, le centre des moyennes harmoniques des points d'intersection correspondans, en prenant le pôle pour origine des segmens; la suite de tous les centres pareils sera une droite unique; c'est-à-dire l'axe des moyennes harmoniques des proposées par rapport au pôle et aux coëfficiens donnés *).

43. Remarquons que chaque de manières dont nous avons enseigné (20. 24. 26.) à définir graphiquement ou numériquement le point q de la transversale mobile pb, donne lieu a un énoncé particulier du théorême qui précède. Ainsi, par exemple, si l'on définit le point q par la relation

$$\frac{maq}{ap}+\frac{m'bq}{bp}+\frac{m''cq}{cp}+\frac{m'''dq}{dp}+\text{etc.}=0,$$

ou par celle-ci

$$\frac{m+m'+m''+\ldots\ldots}{pq}=\frac{m}{pa}+\frac{m'}{pb}+\frac{m''}{pc}+\text{etc.},$$

la suite des points q sera une ligne droite.

Il en sera de même évidemment de la suite des points q déterminés par la relation plus générale

$$\frac{k}{pq}=\frac{m}{pa}+\frac{m'}{pb}+\frac{m''}{pc}+\text{etc.},$$

dans laquelle k est un coëfficient numérique quelconque. Maintenant si, dans cette dernière relation, on suppose tous les coëfficiens égaux à l'unité, on retombera sur le cas particulier démontré directement par Mac-Laurin, dans son Traité des lignes géométriques, à l'aide du principe de l'art. 7. qui lui est dû. Mais on peut généraliser d'avantage encore ces diverses propositions.

44. Si nous remplaçons en effet, dans le théorême ci-dessus, les différents droites données par des plans situés d'une manière quelconque

*) Dans le cas particulier où, les coëfficiens m, m', ... étant égaux à l'unité, on ne considère que le système de trois lignes droites, et où l'on prend pour pôle p le centre de gravité ou des moyennes distances du triangle formé par ces droites, l'axe des moyennes harmoniques passe tout entier à l'infini, et l'on a, pour une transversale quelconque issue de p et rencontrant en a, b, c, les côtés du triangle,

$$\frac{1}{pa}+\frac{1}{pb}+\frac{1}{pc}=0;$$

et, en effet, cette relation, en ayant égard à la loi des signes (17.), est satisfaite pour les trois positions de la transversale où elle passe par l'un des sommets du triangle; car on a alors, par exemple, $pb=pc=2pa$.

Ce théorême a été démontré par Mac-Laurin dans son *Traité des courbes géométriques.*

dans l'espace; la suite des points q ne sera plus simplement sur une droite, mais sur un dernier plan qu'on pourra nommer le plan des moyennes harmoniques relativement au pôle des transversales.

On pourroit établir ce théorême directement et d'une manière analogue à celle que nous venons de mettre en usage pour les systêmes de lignes droites, en partant du cas particulier, et très facile a démontrer, où l'on n'a que deux plans à considérer; mais on peut le déduire aussi très simplement du théorême qui précède.

Par le point qui sert de pôle aux transversales et d'origine aux segmens harmoniques, menons, en effet, un plan arbitraire; il coupera les plans proposés suivant un systême de droites ayant, d'après le théorême cité, une droite unique pour axe des moyennes harmoniques par rapport à ce pôle; or tous les axes semblables se rencontreront évidemment deux à deux; donc ils seront tous compris dans un seul plan, qui sera le plan même des moyennes harmoniques des proposés, suivant la définition admise ci-dessus. Ainsi:

Un systême de plans quelconques a toujours, par rapport à un point fixe pris pour origine et pour pôle des transversales un plan unique des moyennes harmoniques, c'est-à-dire renfermant tous les centres de moyennes harmoniques des points d'intersection qui appartiennent aux diverses transversales.

45. Remplaçons encore, dans le théorême de l'art. 42., le pôle par une droite servant d'axe des origines harmoniques, les transversales droites par des plans transversaux passant par cet axe; enfin supposons les droites proposées situées d'une manière quelconque dans l'espace; je dis que la suite des centres (29.) de moyennes harmoniques des points d'intersection de ces droites et des différens plans transversaux, par rapport à l'axe commun des origines, sera une dernière ligne droite, qu'on pourra nommer l'axe de moyennes harmoniques des proposées par rapport au premier axe.

Projetons, en effet, sur un plan quelconque, le systême des droites proposées et l'axe des origines harmoniques, à partir d'un point quelconque de cet axe pris pour centre de projection, c'est-à-dire de façon que cet axe y devienne un point; tous les plans transversaux seront représentés par des droites en projection, et les centres de moyennes harmoniques qui appartiennent aux points d'intersection de ces plans et des droites proposées resteront encore (29.) de pareils centres pour les points de la projection, par rapport au point ou pôle qui représente l'axe des origines harmoniques; mais ces derniers centres sont (42.) sur une droite, donc les autres restent dans le plan projetant unique de cette droite; et, comme pareille chose doit avoir lieu pour tout autre centre et tout autre plan de projection, on voit que les différens centres de moyennes harmoniques que l'on considère dans l'espace doivent se trouver à l'intersection commune, et par conséquent unique, de tous les plans projetans analogues à celui qu'on vient déxaminer en particulier; donc enfin nous pouvons énoncer ce théorême:

Un système de droites quelconques étant donné dans l'espace, si l'on coupe ce système par une suite de plans transversaux passant par une même droite ou charnière; puis qu'on détermine, pour chaque plan, le centre (art. 32. et suiv.) des moyennes harmoniques des points d'intersection qui lui appartiennent, en prenant la charnière pour axe des origines harmoniques; la suite de tous ces centres sera une même droite, axe des moyennes harmoniques des proposées.

46. Supposons que, dans les figures relatives aux théorêmes qui précèdent, le point et la droite qui servent de pôle ou de charnière aux droites et aux plans transversaux, passe à l'infiini, ces systêmes de droites et de plans transversaux deviendront respectivement parallèles, et les centres de moyennes harmoniques des points qui s'y trouvent, se changeront (26. et 29.) en des centres de moyennes distances; on arrivera donc, pour ces derniers centres, à des théorêmes qui ne seront que des cas très particuliers de ceux dont il s'agit, et qu'il sera d'ailleurs très facile d'établir directement d'après les propriétés généralement connues de cette sorte de centres. Or, en partant delà, on pourra réciproquement s'élever aux théorêmes généraux par des principes de projection analogues à ceux qui ont été mis en usage dans le chapitre précédent (31.); car on remarquera aisément que la figure relative à l'un de ces systêmes, peut toujours être régardé comme la perspective plane ou en relief de l'autre.

47. La doctrine du centre des moyennes harmoniques donne lieu à plusieurs autres propriétés générales des systêmes de points, de droites et de plans, qui ne le cèdent en rien, pour l'élégance, à celles qui précè-

dent. Parmi ces propriétés, on peut ranger les principes mêmes qui ont été énoncés art. 29. 30. et 31., lesquels sont purement relatifs à des systêmes de points quelconques rangés sur un plan ou dans l'espace; nous nous contenterons d'en indiquer rapidement quelques autres, qu'il n'eût pas été convenable d'examiner aux endroits cités.

Soit un systême de plans quelconques passant par une même droite; concevons un dernier plan par cette droite, dont les différens points soient pris pour origine des segmens harmoniques, et qui sera par conséquent le plan des origines harmoniques relativement à tous les autres. Cela posé, traçons à volonté une droite transversale, et déterminons sur elle, le centre de moyennes harmoniques de toutes ses intersections avec les derniers plans par rapport au point de section du plan des origines; il est évident, d'après les principes posés art. 42. et 44., que ce centre et tous ses semblables seront compris dans un seul et même plan passant par la droite commune aux proposés, et qu'on pourra nommer le plan des moyennes harmoniques de ceux-ci par rapport au plan des origines. Ce même faisceau de plans convergeant en une même droite, sera évidemment tel que tout plan transversal y déterminera un faisceau de droites concourant en un même point, et ayant (27.) un axe des origines et un axe des moyennes harmoniques; enfin il existera entre les sinus et les tangentes trigonométriques des angles formés par ces plans, des relations analogues à celles que nous avons vu (18. et 19.) appartenir aux faisceaux harmoniques de simples droites projetantes situées dans un plan unique, mais qui seront plus générales étant relatives à des coëfficiens numériques quelconques.

48. Supposons maintenant que tous les plans proposés concourent simplement en un même point; en prenant une droite arbitraire, passant par ce point, pour axe des origines, le lieu des centres harmoniques relatifs aux diverses transversales qui s'appuyent sur cet axe sera évidemment encore un plan unique passant par le point commun aux proposés; car il renfermera à la fois et tous les axes de moyennes harmoniques (27.) des faisceaux de droites convergentes déterminées dans les plans proposés par tout plan transversal passant par l'axe des origines, et tous les axes de moyennes harmoni-

ques (42.) des systêmes de droites résultantes de l'intersection de ces mêmes plans par un plan transversal arbitraire, relativement au point où ce plan rencontre l'axe des origines; ce qui ne sauroit avoir lieu évidemment sans qu'il ne soit un seul et même plan.

49. Ces lemmes étant établis, concevons un systême de points quelconques dans l'espace, et un plan pris pour plan des origines harmoniques; par une droite quelconque de ce plan, menons de nouveaux plans vers les points donnés, et déterminons pour chaque systême pareil (47.), le plan des moyennes harmoniques par rapport au plan commun des origines, ce plan et tous ses semblables passeront par un seul et même point (31.), centre des moyennes harmoniques des proposés.

Ce théorême offre, comme on voit, une autre manière d'énoncer le principe de l'art 31. cité.

Concevons encore un systême de droites quelconques situées dans l'espace, et prenons une dernière droite arbitraire pour axe des origines harmoniques; cela posé, d'un point quelconque de cet axe, menons aux diverses droites des plans, et prenons (48.), par rapport à l'axe dont il s'agit, le plan des moyennes harmoniques de ce systême de plans, ce plan et tous ses semblables passeront (45.) par une seule et même droite qui sera l'axe des moyennes harmoniques des proposées.

50. Les divers exemples que nous venons de donner, doivent suffire pour montrer la nature des propositions qu'il est possible de deduire des divers principes de la doctrine du centre des moyennes harmoniques, pour les systêmes de points, de droites et de plans quelconques. Il y en auroit d'autres bien plus difficiles a établir, et qui sont en quelque sorte les réciproques des précédentes: ainsi, par exemple, ayant vu (42.) que le lieu des centres de moyennes harmoniques des différentes transversales passant par un point ou pôle, et rencontrant un systême de droites données dans un plan, est une seule et dernière droite, axe des moyennes harmoniques des proposées, on pourroit se demander réciproquement quelle est l'enveloppe de tous les axes semblables de moyennes harmoniques des différens points d'une même droite prise dans le plan des pro-

posées etc.; mais cette question et toutes ses analogues exigent d'autres principes pour résolues, et elles se rattachent intimement à la théorie des courbes géométriques, que nous nous proposons d'établir dans d'autres mémoires, auxquels celui-ci ne sert pour ainsi dire que d'introduction.

Il semble d'ailleurs qu'on ne trouvera pas superflus et dénués d'intérêt par eux-mêmes, les développemens dans lesquels nous venons d'entrer, et dont la plupart nous seront très utiles pour la suite de ces recherches. Par ces mêmes considérations, nous croyons pouvoir, avant de terminer, ajouter à tous ce qui précède, quelques réflexions tendant à modifier et à rendre plus concis l'énoncé de plusieurs des théorêmes qu'on vient de faire connoître, en même temps qu'elles serviront à établir l'espèce de dépendance qui existe entre la théorie des centres de moyennes harmoniques et les principes déjà connus de la théorie des transversales.

51. Considérons le système de trois droites quelconques, pA, pB, pC (Fig. 14.), situées dans un plan et convergeant en un même point p; soient α, β et γ trois points quelconques de leur directions respectives; on aura, pour exprimer que ces trois points sont en ligne droite:

$$\text{triang.}\,\alpha p\gamma = \text{triang.}\,\alpha p\beta + \text{triang.}\,\beta p\gamma,$$

et par conséquent:

$$p\alpha.p\gamma.\sin\alpha p\gamma = p\alpha.p\beta.\sin\alpha p\beta + p\beta.p\gamma.\sin\beta p\gamma;$$

d'où, en divisant tout par le produit $p\alpha.p\beta.p\gamma$,

$$\sin ApC\frac{1}{p\beta} = \sin ApB\frac{1}{p\gamma} + \sin BpC\frac{1}{p\alpha}.$$

Supposons que le point α soit, par rapport à p, le centre des moyennes harmoniques des points a, a', a'', ... situés sur la droite pA, et cela pour les coëfficiens numériques quelconques m, m', m'', ..., pareillement que β soit le centre des moyennes harmoniques des points b, b', b'', ... de pB par rapport à p et pour les mêmes coëfficiens, qu'enfin γ soit le centre pareil des points c, c', c'', ...; le nombre des points situés sur chaque droite étant d'ailleurs le même, on aura (26.):

$$\frac{m+m'+m''+\dots}{p\alpha} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pa'} + \frac{m''}{pa''} + \text{etc.} = \Sigma\left(\frac{m}{pa}\right),$$

$$\frac{m+m'+m''+\dots}{p\beta} = \frac{m}{pb} + \frac{m'}{pb'} + \frac{m''}{pb''} + \text{etc.} = \Sigma\left(\frac{m}{pb}\right),$$

$$\frac{m+m'+m''+\dots}{p\gamma} = \frac{m}{pc} + \frac{m'}{pc'} + \frac{m''}{pc''} + \text{etc.} = \Sigma\left(\frac{m}{pc}\right),$$

dans les quelles Σ est le signe abregé de somme.

Si nous mettons ces valeurs des réciproques de $p\alpha$, $p\beta$, $p\gamma$ dans la relation trouvée ci-dessus, elle deviendra,

$$\sin ApC.\Sigma\left(\frac{m}{pb}\right) = \sin ApB.\Sigma\left(\frac{m}{pc}\right) + \sin BpC.\Sigma\left(\frac{m}{pa}\right),$$

nouvelle relation qui permet d'exprimer ainsi très simplement le théorême du No. 43.

Ayant sur un plan un systême de droites quelconques abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, ..., si, d'un point p pris à volonté sur ce plan, on mène trois transversales arbitraires pA, pB, pC rencontrant respectivement les proposées en a, a', a'', ..., b, b', b'', ..., c, c', c'', ...; on aura constamment, pour des coëfficiens numériques m, m', m'', ... appartenans respectivement à ces mêmes droites,

$$\sin ApC.\Sigma\left(\frac{m}{pb}\right) = \sin ApB.\Sigma\left(\frac{m}{pc}\right) + BpC.\Sigma\left(\frac{m}{pa}\right).$$

Il est évident, en effet, que cette relation exprime tout autant que le théorême de l'art. cité; car on en conclut d'abord que le centre des moyennes harmonique de a, a', a'', ..., celui de b, b', b'', ..., enfin celui de c, c', c'', ... sont en ligne droite, quelles que soient les transversales, pA, pB, pC menées à travers le systême des proposées; laissant donc deux d'entre elles fixes, et faisant varier la troisième autour de p, on voit que la suite des centres des moyennes harmoniques qui lui appartiennent, sera une seule et même droite.

52. La relation que nous venons d'établir ci-dessus pour exprimer que les trois points α, β, γ situés sur les transversales pA, pB, pC convergeant en un même point p, appartiennent à une même droite, et la relation beaucoup plus générale, que nous avons déduite du théorême de l'art. 43., relativement à un systême quelconque de points a, b, c, ..., a', b', c', ..., a'', b'', c'', ... situés trois par trois en ligne droite, doivent être considérées toutes deux comme des cas particuliers et des conséquences très simples de celles qui ont lieu pour trois transversales arbitraires pA, pB, qC (Fig. 15.) formant par leur rencontre mutuelle un triangle pqr, au lieu de converger en un même point.

En effet, on a alors, comme on sait *), dans les hypothèses ci-dessus,

*) Carnot *Essai sur la théorie des trausversales, Traité des propriétés projectives etc.*

$$\alpha p.\beta r.\gamma q = \alpha q.\beta p.\gamma r,$$
$$(pa).(rb).(qc) = (qa).(pb).(rc),$$

dans la dernière desquelles (pa) représente le produit de tous les segmens pa, pa', pa'', ..., (rb) celui de tous les segmens rb, rb', rb'', ... et ainsi de suite pour les autres.

Or, si nous mettons la première de ces relations sous cette forme

$$\alpha p(\beta p + pr).\gamma q = (\alpha p + pq).\beta p.(\gamma q + qr),$$

nous en tirerons la suivante, en développant et divisant par pr,

$$\alpha p.\gamma q = \alpha p.\beta p.\frac{qr}{pr} + \beta p.\gamma q.\frac{pq}{qr} + \beta p.\frac{pq.qr}{pr},$$

qui devient, en remplaçant les rapports des côtés du triangle pqr par les sinus des angles opposés, et en supposant ensuite que p, q, r se confondent en un seul point p (Fig. 14.)

$$p\alpha.pr.\sin ApC = p\alpha.p\beta.\sin ApB + p\beta.pr.\sin BpC,$$

laquelle est précisement la relation obtenue directement à l'art. 51., pour le cas ou les transversales pA, pB, qC concourent en un même point.

53. D'après cela, il est donc naturel de considérer les relations générales qui concernent un nombre quelconque de points rangés sur les trois transversales en question, comme étant pareillement des modifications l'une de l'autre; et c'est, en effet; ce qu'apprend le calcul appliqué à ce cas général, d'une manière analogue à celle qui vient d'être mise en usage pour le cas particulier; mais nous établirons cette conséquence dans un prochain mémoire, indépendamment de tout calcul, c'est-à-dire par des considérations purement géométriques, et cela même quels que soient les points que l'on considère sur les côtés du triangle transversal pqr; la seule condition étant qu'ils satisfassent à la relation générale, dejà posée ci-dessus:

$$(pa).(rb).(qc) = (qa).(pb).(rc).$$

Quant au cas présent, où l'on suppose les points a, b, c, ..., a', b', c', ..., a'', b'', c'', ... situés trois par trois en ligne droite, la même dépendance peut être établie très simplement sans recourir à des transformations algébriques prolixes.

En effet d'après ce qui précède, on aura pour ces différens groupes de points lorsque (Fig. 14.) le triangle pqr s'évanouit,

$$\sin ApC\frac{1}{pb} = \sin ApB\frac{1}{pc} + \sin BpC\frac{1}{pa},$$
$$\sin ApC\frac{1}{pb'} = \sin ApB\frac{1}{pc'} + \sin BpC\frac{1}{pa'},$$
$$\sin ApC\frac{1}{pb''} = \sin ApB\frac{1}{pc''} + \sin BpC\frac{1}{pa''},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

multipliant la première de ces équations par m, la deuxième par m', la troisième par m'', ... etc., m, m', m'', ... étant des nombres quelconques relatifs aux droites abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, ..., ajoutant enfin toutes les nouvelles équations, on retombera directement sur la relation générale posée art. 51. Ainsi le principe de l'art. 43. est une conséquence très timple de la théorie des transversales rectilignes, et il seroit facile de prouver la même chose des autres principes posés en cet endroit; mais, au lieu de nous arrêter à ces détails, nous nous contenterons d'ajouter quelques nouvelles remarques à toutes celles qui précèdent, renvoyant à la note ci-après pour montrer comment on peut les étendre facilement au cas de l'espace.

54. La relation à laquelle nous sommes parvenus pour exprimer que les trois points α, β, γ (Fig. 14.) sont situés en ligne droite sur les transversales pA, pB, pC, peut être mise sous une autre forme, qui offre l'avantage particulier d'être indépendante des lignes trigonométriques, et de ne point devenir insignifiante quand le point p s'éloigne à l'infini, comme cela arrive pour la première. Coupons en effet le faisceau des droites pA, pB, pC par la nouvelle droite ABC, nous aurons

$$\frac{\text{triang.}\,ApC}{\text{triang.}\,BpC} = \frac{AC}{BC} = \frac{pA\,.\,pC\,.\,\sin ApC}{pB\,.\,pC\,.\,\sin BpC};$$

d'oir l'on tire

$$\sin ApC = \frac{AC}{BC}\cdot\frac{pB}{pA}\cdot\sin BpC.$$

On auroit de même, par la comparaison des triangles ApB et BpC,

$$\sin ApB = \frac{AB}{CB}\cdot\frac{pC}{pA}\cdot\sin BpC;$$

substituant ces valeurs dans la relation citée, supprimant le facteur $\sin BpC$, et multipliant ensuite tous les termes par $BC.pA$, il viendra

$$\frac{AC\,.\,pB}{p\beta} = \frac{AB\,.\,pC}{p\gamma} + \frac{BC\,.\,pA}{p\alpha},$$

nouvelle relation qui, satisfaisant aux conditions indiquées art. 18. est projective de sa nature; elle n'apprend d'ailleurs guères plus que celle d'où nous sommes partis, quand on suppose le point p à l'infini; puisquelle ce reduit alors à celle-ci $AC = AB + BC$, qu'on doit considérer comme une simple identité.

Mais, en observant qu'on a

$$pB = p\beta + B\beta,\quad pc = p\gamma + C\gamma,\quad pA = p\alpha + A\alpha,$$

on en déduira, sur le champ,

$$AC.\frac{B\beta}{p\beta} = AB.\frac{C\gamma}{p\gamma} + BC.\frac{A\alpha}{p\alpha},$$

qui est également projective, mais n'a pas l'inconvénient de devenir identique quand les droites pA, pB, pC sont parallèles (Fig. 16.), ou que p s'éloigne à l'infini.

On a alors en effet, à cause que les distances infinies $p\beta$, $p\gamma$, $p\alpha$ peuvent être censées égales entre elles,

$$AC.B\beta = AB.C\gamma + BC.A\alpha,$$

pour exprimer que les points α, β, γ sont situés en ligne droite, de même que les points A, B, C.

Supposons maintenant que l'on considère, sur les transversales pA, pB, pC, un nombre quelconque de points a, b, c, ..., a', b', c', ..., a'', b'', c'', ... rangés trois par trois en ligne droite, on aura donc, pour remplacer la relation générale de l'art. 51., dans le cas de la figure 14.,

$$AC.\Sigma\left(m\frac{Bb}{pb}\right) = AB.\Sigma\left(m\frac{Cc}{pc}\right) + BC.\Sigma\left(m\frac{Aa}{pa}\right),$$

et dans celui de la figure 16., où le point p est à l'infini,

$$AC.\Sigma(m.Bb) = AB.\Sigma(mCc) + BC.\Sigma(mAa),$$

relations dont la première exprime que les centres des moyennes harmoniques, et la seconde que les centres des moyennes distances des grouppes de points respectifs a, a', a'', ..., b, b', b'', ..., c, c', c'', ..., sont situés en ligne droite; et qui, l'une et l'autre, peuvent être considérés, ainsi que celle du No. 51., comme des modifications particulières de la relation (52.) qui se rapporte au cas général où les trarsversales pA, pB, pC sont quelconques et forment un triangle pqr (Fig. 15.)

Au surplus, nous aurions pu partir directement de la relation qui appartient à la figure 16. et qu'il est facile d'établir a priori, pour en déduire, de suite, celle qui se rapporte à la Fig. 14., en employant à cet effet des principes de projection analogues à ceux qui ont été mis en usage à la fin du No. 21.; mais la marche précédente nous a paru plus directe et plus lumineuse.

Note première.

Sur les moyens d'exprimer que quatre points quelconques, appartenans respectivement à un même nombre de droites convergeant en un point unique de l'espace, sont situés sur un seul et même plan.

Sont α, β, γ et δ (Fig. 17.) quatre points quelconques situés respectivement sur les côtés pq, qr, rs et sp du quadrilatère gauche $pqrs$; on aura, comme on sait, d'après la théorie des transversales, pour exprimer que ces quatre points sont dans un même plan, la relation

$$\alpha p.\beta q.\gamma r.\delta s = \alpha q.\beta r.\gamma s.\delta p;$$

d'où il seroit aisé de déduire (52.) celle qui est relative au cas où, le quadrilatère $pqrs$ s'évanouissant, les droites pq, qr, rs et ps concourent simplement en un même point p (Fig. 18.). Mais on peut arriver au même but d'une manière entièrement directe et simple, par des procédés analogues à ceux qui ont été mis en usage (51.) pour le cas particulier de trois points situés en ligne droite.

En effet, pour que les quatre points α, β, γ, δ, placés sur les transversales pA, pB, pC, pD, se trouvent compris dans un même plan, il est nécessaire évidemment et il suffit qu'on ait la relation

$$\text{sol.}\,p\alpha\gamma\delta + \text{sol.}\,p\alpha\gamma\beta = \text{sol.}\,p\alpha\beta\delta + \text{sol.}\,p\beta\gamma\delta;$$

or on a, d'après les principes connus et en représentant par l'expression $\sin(p\delta,\ \alpha p\gamma)$ le sinus de l'angle formé par la droite $p\delta$ et le plan $\alpha p\gamma$, et par $(\alpha\beta\gamma)$ l'aire du triangle qui a pour sommets les points α, δ, γ,

$$\text{sol.}\,p\alpha\gamma\delta = \frac{(\alpha\beta\gamma)p\delta.\sin(p\delta,\ \alpha p\gamma)}{3} = \tfrac{1}{3}\sin(\alpha p\gamma).\sin(p\delta,\ \alpha p\gamma).p\alpha.p\gamma.p\delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{sol.}\,p\alpha\gamma\delta = \tfrac{1}{3}\sin(ApC).\sin(pD,\ ApC).p\alpha.p\gamma.p\delta;$$

on auroit pareillement et selon les mêmes conventions,

$$\text{sol.}\,p\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{3}\sin(ApC).\sin(pB,\ ApC).p\alpha.p\beta.p\gamma,$$
$$\text{sol.}\,p\alpha\beta\delta = \tfrac{1}{3}\sin(BpD).\sin(pA,\ BpD).p\alpha.p\beta.p\delta,$$
$$\text{sol.}\,p\beta\gamma\delta = \tfrac{1}{3}\sin(BpD).\sin(pC,\ BpD).p\beta.p\gamma.p\delta;$$

donc substituant et divisant par le produit $\frac{1}{3}.p\alpha.p\beta.p\gamma.p\delta$, il viendra la relation

$$\frac{\sin(ApC).\sin(pD, ApC)}{p\beta}+\frac{\sin(ApC).\sin(pB, ApC)}{p\delta}$$
$$=\frac{\sin(BpD).\sin(pA, BpD)}{p\gamma}+\frac{\sin(BpD).\sin(pC, BpD)}{p\alpha},$$

qui est entièrement analogue à celle de l'art. 51., et d'où l'on déduiroit des conséquences semblables pour le cas d'un nombre quelconque de grouppes de quatre points rangés dans un plan, tel que celui des points α, β, γ et δ.

Considérons maintenant un plan arbitraire $ABCD$, auquel correspondent les quatre points A, B, C, D sur les droites pA, pB, pC, pD, nous aurons, comme ci-dessus, en nommant P la perpendiculaire abaissée de P sur le plan $ABCD$,

$$\begin{aligned}
\text{sol.}\, pACD &= \tfrac{1}{3}P.(ACD) = \tfrac{1}{3}\sin(ApC).\sin(pD, ApC).pA.pC.pD,\\
\text{sol.}\, pABC &= \tfrac{1}{3}P.(ABC) = \tfrac{1}{3}\sin(ApC).\sin(pB, ApC).pA.pB.pC,\\
\text{sol.}\, pABD &= \tfrac{1}{3}P.(ABD) = \tfrac{1}{3}\sin(BpD).\sin(pA, BpD).pA.pB.pD,\\
\text{sol.}\, pBCD &= \tfrac{1}{3}P.(BCD) = \tfrac{1}{3}\sin(BpD).\sin(pC, BpD).pB.pC.pD;
\end{aligned}$$

substituant, dans la relation déjà trouvée ci-dessus, les produits des sinus tirés de ces dernières, et simplifiant, il viendra

$$(ACD)\frac{pB}{p\beta}+(ACB)\frac{pD}{p\delta}=(BAD)\frac{pC}{p\gamma}+(BCD)\frac{pA}{p\alpha},$$

nouvelle relation qui est projective suivant les principes posés art. 45. du Traité des propriétés projectives, et de laquelle on en déduiroit plusieurs autres en remplaçant les rapports d'aires triangulaires par ceux des lignes de la figure $ABCD$. Contentons nous de remarquer que puisqu'on a

$$pA=p\alpha+A\alpha,\; pB=p\beta+B\beta,\; pC=p\gamma+C\gamma,\; pD=p\delta+D\delta,$$

on peut de nouveau la transformer en celle-ci,

$$ACD.\frac{B\beta}{p\beta}+ACB.\frac{D\delta}{p\delta}=(BAD).\frac{C\gamma}{p\gamma}+(BCD).\frac{A\alpha}{p\alpha},$$

qui jouit de la même propriété, et a de plus l'avantage de demeurer applicable au cas où le point p est censé à l'infini; elle devient effectivemens alors,

$$(ACD).B\beta+(ACB).D\delta=(BAD).C\gamma+(BCD).A\alpha,$$

comme il seroit aisé de le vérifier directement pour ce cas particulier.

Ces diverses relations sont entièrement analogues à celles qui ont été exposées dans le texte pour le cas du plan, et donnent lieu à des conséquences et à des rapprochemens qu'il est facile de déviner et sur lesquelles il est peu nécessaire d'insister.

Note deuxième.

Sur les relations linéaires projectives entre les distances de points rangés sur une même droite, et les formules trigonometriques qui en dérivent.

Avant de terminer, je crois devoir présenter, à l'occasion des recherches qui sont le sujet de ce mémoire, une observation générale et très importante, sur la quelle je n'ai pas suffisamment insisté dans le Traité des propiétés projectives des figures; c'est qu'il n'est, pour ainsi dire, aucune relation métrique, entre les distances d'une figure, qui ne puisse être proposée, généralisée ou transformée d'une manière convenable pour satisfaire aux conditions particulières de *projectibilité* indiquées aux art. 9., 10. et 45. de ce traité, et rappelées No. 18. du présent mémoire.

On en a vu un grand nombre d'exemples dans l'un et dans l'autre de ces écrits, mais il n'y ont été amenés, en quelque sorte, qu'incidentellement, et l'on n'a nullement insisté sur les principes et les moyens qui pourroient y conduire directement ou généralement.

Or ces moyens, comme on a dû s'en apercevoir, consistent principalement dans les suivans, 1) se servir des relations qui expriment la juxta-position ou la contiguité des distances rangées sur une même droite, pour transformer la relation proposée en une autre qui satisfasse aux conditions déjà citées, en introduisant même, si cela est nécessaire, de nouveaux points parmi ceux de la figure; 2) restituer, par la pensée, les points qui, dans le passage de la figure générale à celle qu'on examine, ont pu s'éloigner à l'infini en faisant ainsi disparaître, par suite de leur égalité, certaines distances qui multipliaient ou divisaient les termes de cette dernière relation; 3) chercher enfin à rétablir ces distances dans la relation, sans la troubler et de façon que, sous sa nouvelle forme, elle satisfasse aux conditions prescrites, et devienne par conséquent applicable aux projections centrales ou perspectives de la figure ainsi modifiée par la restitution des points à l'infini.

Le premier de ces moyens convient particulièrement aux relations et aux figures que, par leur nature générale, on reconnaît être essentiellement projectives, quoique, dans leur état actuel, elles ne satisfassent pas aux conditions particulières qui viennent d'être indiquées; les autres conviennent principalement aux relations et aux figures qui, ayant une forme tout à fait particulière et déterminée, ne sauroient la conserver en perspective ou projection centrale: les art. 17. et 20. de ce mémoire nous ont offert des exemples qui se rapportent au premier de ces moyens, et l'art. 21. en contient un seul qui se rapporte aux derniers; mais la théorie du centre des moyennes distances eût pu aisément en fournir un grand nombre de cette sorte. Enfin il est des relations et des figures qui permettent l'emploi simultanée de ces deux moyens; et, parmi ces relations, celles qui expriment la juxta-position des distances rangées sur une même droite sont, sans contredit, les plus simples et les plus remarquables, outre qu'elles sont susceptibles de conduire à des principes de trigonométrie aussi beaux qu'étendus. Je crois, en conséquence, devoir choisir ces relations particulières pour nouvel exemple propre à éclairer les applications des préceptes qui précèdent, d'autant plus que ces sortes d'identités jouent un rôle nécessaire et fort important parmi toutes celles qui peuvent en général appartenir aux figures. Observons d'ailleurs, une fois pour toutes, que dans le cas dont il s'agit, où tous les points sont sur une même droite, les conditions de projectibilité se réduisent simplement à ce que les différens termes de la relation proposée renferment les mêmes lettres, ou qu'en considérant ces différentes lettres comme autant de quantités simples, elles puissent disparoître comme facteurs, soit dans chaque terme séparément, soit dans l'ensemble de tous les termes (voy. les Nr. 9. et suiv. de l'ouvrage déjà cité).

Cela posé, considérons d'abord trois points quelconques A, B, C (Fig. 19.) situés en ligne droite, on aura, pour la position actuelle de ces points

$$AC = AB + BC,$$

relation qui, sous cette forme, ne satisfait pas aux conditions ci-dessus, quoiqu'elle subsiste bien évidemment dans les projections centrales des points de la figure sur une droite arbitraire pn.

Pour la transformer en une autre qui satisfasse à ces conditions, nous chercherons, en premier lieu, à y introduire, selon ce qui a été prescrit ci-dessus, quelques uns des segmens qui se rapportent au point situé à l'infini sur AC, point que nous représenterons par P, et cela de manière à ne pas troubler l'égalité. Or c'est à quoi l'on parvient évidemment en multipliant chacun des termes de cette relation par celui des segmens infinis et égaux PA, PB, PC, qui n'appartient à aucun des points relatifs à ce terme. Cette relation se changera ainsi en cette autre,

$$AC.PB = AB.PC + BC.PA,$$

dont les différens termes renferment les mêmes lettres; et l'on voit aussi comment il faudroit agir pour préparer, de la même manière, toute relation linéaire du premier degré entre les simples distances de points rangés en ligne droite.

Sous cette nouvelle forme d'ailleurs, la relation qui précède n'exprime évidemment rien de plns que celle d'où elle provient, attendu que le point P est censé à l'infini. Mais étant projective, elle ne devrà pas cesser d'avoir lieu en mettant les points A, B, C et P en perspective sur la nouvelle droite arbitraire pn, à partir d'un point quelconque S; on aura donc, en nommant a, b, c et p les nouveaux points, dont le dernier appartient évidemment à la projetante pS parallèle à AC,

$$ac.pb = ab.pc + bc.pa,$$

relation qui a lieu, de la même manière (18.), entre les sinus des angles projetans relatifs à chacune des distances qui y entrent.

On pourroit croire que cette relation est simplement relative à une certaine position particulière de p à l'égard de a, b, c; mais il est facile de prouver le contraire; car ayant choisi, à volonté, un tel point sur une droite abc, on pourra toujours mettre la figure en projection sur une autre droite AC, de façon que p passe à l'infini, puisqu'il suffit de prendre AC parallèle à la projetante Sp de ce point; or la relation ci-dessus, qui est pojective, sera satisfaite naturellement pour la projection AC; donc elle aura pareillement lieu pour la droite ac, quels que soient les points a, b, c, p.

Voyons maintenant comment, par des transformations convenables, nous aurions pu arriver directement à la relation dont il s'agit en partant de celle $ac = ab + bc$ qui n'en est qu'un cas particulier relatif à l'hypothèse où P seroit à l'infini.

A cet effet, multiplions l'équation $ac = ab + bc$ par la distance pb, on aura successivement, pour la position actuelle de a, b, c et p:

$$ac.pb = ab.pb + bc.pb = ab(pc - bc) + bc(pa + ab) = ab.pc + bc.pa,$$

qui est précisément celle qui a été obtenue ci-dessus par une voie très différente.

Sans nous arrêter longuement aux cas particuliers, nous considérerons de suite un nombre quelconque de points a, b, c, d, m, n, rangés sur une même droite; il est évident qu'il existera entre les distances de ces points, pris trois à trois, quatre à quatre, etc., une infinité de relations purement linéaires et évidentes, telles que celle $ac = ab + bc$ qui vient de nous occuper précédemment; or, si l'on prend arbitrairement un nouveau point p sur la droite en question, il sera très aisé, d'après ce qui précède, d'en déduire, sur le champ, un égal nombre d'autres relations plus générales et jouissant de propriétés analogues à celles de la transformée $ac.pb = ab.pc + bc.pa$.

Par exemple, ayant pour la position actuelle des points a, b, c, d, m, n, la relation générale

$$an = ab + bc + cd \ldots\ldots + mn,$$

ou en concluera la suivante, en multipliant chacun de ses termes par le produit des segmens relatifs au point p et à tous ceux des proposés qui n'appartiennent pas à ce terme,

$$an(pb.pc.pd\ldots.pm) = ab(pc.pd\ldots.pm.pn) + bc(pa.pd\ldots.pm.pn) \\ + cd(pa.pb\ldots.pm.pn) + \ldots. + mn(pa.pb.pc.pd,\ldots).$$

Il est visible, en effet, que cette relation remplit toutes les conditions prescrites, et peut s'établir par les mêmes moyens et donner lieu aux mêmes réflexions que celle que nous avons trouvée pour le cas particulier de trois points.

Pour la justifier a posteriori, nous la mettrons sous cette forme beaucoup plus simple, en divisant chacun de ses termes par le produit de tous les segmens relatifs au point p et aux différens points proposés,

$$\frac{an}{pa.pn} = \frac{ab}{pa.pb} + \frac{bc}{pb.pc} + \frac{cd}{pc.pd} \ldots. + \frac{mn}{pm.pn};$$

et, en effet, on est immédiatement conduit à la relation suivante

$$\frac{pn-pa}{pa.pn} = \frac{pb-pa}{pa.pb} + \frac{pc-pb}{pb.pc} + \frac{pd-pc}{pc.pd} \ldots. + \frac{pn-pm}{pm.pn},$$

qui, en effectuant les divisions partielles, se réduit évidemment à une simple identité entre les diverses réciproques des distances pa, pb, pc, ... Cette remarque, à laquelle on n'eût peut-être pas songé sans ce qui précède conduirait également aux diverses autres relations analogues à celle établie ci-dessus: ainsi, par exemple, on auroit, k étant le nombre des points proposés a, b, c, ... m, n,

$$\frac{(k-3)an}{pa.pn} = \frac{ab}{pa.pb} + \frac{ac}{pa.pc} + \ldots + \frac{am}{pa.pm} + \frac{nm}{pn.pm} + \ldots + \frac{nc}{pn.pc} + \frac{nb}{pn.pb}.$$

Au surplus, les relations précédentes ayant lieu pour des points quelconques rangés en ligne droite, doivent être soigneusement distinguées de celles qui expriment des conditions particulières, propres à faire trouver un ou plusieurs de ces points, à l'aide de certains autres supposés donnés. Elles ne sont, en dernière analyse, comme on voit, que des sortes d'identités exprimant et la juxta-position des distances qui y entrent, et leur situation en ligne droite; mais, en ce sens même, elles sont très dignes d'être remarqués pour les conséquences qu'on en peut déduire, en général, soit par rapport aux autres relations projectives entre les distances, soit relativement à celles qui ont lieu entre les lignes trigonométriques des arcs et des angles; car il est évident que, puisqu'elles satisfont toutes aux conditions des Nr. 9. et suiv. du Traité des propriétés projectives rappelées art. 18. de ce mémoire, elles doivent subsister également, et sans conditions quelconques, soit entre les sinus des angles formés par un nombre quelconque de droites Sa, Sb, Sc, ... passant par un même point S, soit entre les sinus des arcs $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, ... qui mesurent ces angles sur une circonférence de cercle ayant pour centre le sommet commun S de tous ces angles.

Ainsi, par exemple, on aura entre ces différens sinus, la relation tres générale

$$\frac{\sin(a'n')}{\sin(p'a').\sin(p'n')}$$
$$= \frac{\sin a'b'}{\sin(a'p').\sin(p'b')} + \frac{\sin b'c'}{\sin(p'b').\sin(p'c')} + \ldots + \frac{\sin m'n'}{\sin(p'm').\sin(p'n')},$$

qu'on peut changer en cette autre, en rapportant tout à l'origine commune p' des arcs,

$$\frac{\sin(p'n'-p'a')}{\sin(p'a').\sin(p'n')}$$
$$= \frac{\sin(p'b'-p'a')}{\sin(p'a').\sin(p'b')} + \frac{\sin(p'c'-p'b')}{\sin(p'b').\sin(p'b')} + \ldots + \frac{\sin(p'n'-p'm')}{\sin(p'm').\sin(p'n')};$$

et qui comprend, sous cette nouvelle forme, comme cas particuliers, presque toutes les formules fondamentales de la trigonométrie, ainsi qu'on peut le voir par les articles 139., 140. et suiv. de la Géométrie de position, où cette même relation générale est exposée d'après des principes fort différens de ceux qui précèdent.

Au surplus, on déduirait beaucoup d'autres relations non moins générales des considérations qui précèdent, et en y supposant ensuite certains angles ou certains arcs égaux à un quadrant, on obtiendroit celles qui concernent les cosinus etc.; mais je laisserai au lecteur le soin de cette investigation et de ces rapprochemens très curieux, et me contenterai d'ajouter une dernière remarque à toutes celles qui précèdent: c'est que les relations entre les simples distances de points rangés sur une même droite, et qui satisfont aux conditions particulières déjà souvent indiquées, s'appliquent directement aux arcs de cercle et aux angles quelconques ayant un sommet commun, et peuvent être établies de la même manière; de sorte que, pour passer de là aux relations qui concernent les lignes trigonométriques, il ne s'agit que de remplacer chaque arc et chaque angle par le sinus qui lui est propre: proposition qui mérite particulièrement d'être remarquée des géomètres.

Enfin je ne crois pas devoir passer sous silence une autre observation très générale, et qui découle immédiatement des No. 18. et 19. du Traité des propriétés projectives; c'est que „toute la théorie du centre des „moyennes harmoniques, qui se trouve exposée dans le présent mémoire, „s'étend immédiatement aux figures tracées sur la surface de la sphère, „en remplaçant les droites indéfinies par des circonférences de grands „cercles, et les distances ou portions de droites par les sinus des portions „correspondantes de ces circonférences."