

INTORNO AD UN PROBLEMA
DI MECCANICA APPLICATA

MEMORIA

DEL DOTTOR

DOMENICO CIPOLLETTI

Allievo della scuola tecnica nell'Università Romana:

*Corrispondente degl' Annali di Matem. del Prof. Tortolini: del giorn. dell'Architetto
ingegnere ed agronomo del giorn. Arcadico: della corrispondenza scientifica
di Roma ec. ec.*

Il Ch. Professor D'Andrea nei suoi elementi di Meccanica applicata pag. 124, num. 160. si propone la risoluzione del seguente problema.

Determinare l'equilibrio di un solido appoggiato orizzontalmente nelle sue estremità A, A_1 , caricato nel mezzo C di un peso 2Π , e delle pressioni Π_1 applicate ai punti B, B_1 , ugualmente distanti dagli estremi A, A_1 , ed ugualmente inclinate alla orizzontale che passa per i detti punti, e dirette in modo che ambedue tendano o a comprimere o a stendere la parte del solido compresa BB_1 .

Quantunque la deduzione delle formule non sia molto difficile; pure queste si presentano sì lunghe e complesse, che difficilmente si potrebbero adattare alla generalità degli usi pratici; e perciò il Sig. D'Andrea ha esibito delle formule approssimate trascurando alcune quantità inerenti al problema, e ritenendo due e tre termini dello sviluppo in serie di alcune altre, considerandole come molto piccole: pure potendoci essere in pratica qualche caso particolare che esiga una rigorosa accuratezza, in questa breve memoria mi propongo di sciogliere il problema esattamente, e nella massima generalità.

Le forze Π_1 equivalgono a due forze orizzontali $\Pi_1 \cos. \theta$ uguali e contrarie, e a due verticali $\Pi \sin: \theta = Q$, essendo θ l'angolo che quelle formano coll'orizzontale. Perciò ciascuno appoggio sostiene lo sforzo.

$$N = \Pi + \Pi_1 \sin: \theta$$

Essendo il sistema del solido di lunghezza $2a$, e delle forze applicate simmetrico intorno la verticale che passa per C , ciascuna metà di esso è nello stato di un pezzo CA , incastrato in C , caricato in A del peso N , in B della forza verticale Q , che agisce da sotto in sopra, e dell'orizzontale P che agisce da B in C : si chia-

mino a_1 , l'ascisse delle forze Π_1 , e b_1 le loro ordinate; l'equazioni dei due rami CB, BA, saranno

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -Q(a_1 - x) + P(b_1 - x) + N(a - x)$$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = N(a - x)$$

fatto

$$\frac{Q}{\varepsilon} = q^2, \frac{P}{\varepsilon} = p^2, \frac{N}{\varepsilon} = n^2,$$

le due equazioni differenziali proposte divengono

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = n^2(a - x) - q^2(a_1 - x) + p^2 b_1$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = n^2(a - x)$$

Gl' integrali completi sono

$$y = A \operatorname{sen:} px + B \operatorname{cos:} px + \frac{n^2}{p^2}(a - x) - \frac{q^2}{p^2}(a_1 - x) + b_1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{6} n^2 (3ax^2 - x^3) + Cx + D \quad (2)$$

Per $x = 0$, la (1) deve dare $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; per $x = a_1$, i valori di y e $\frac{dy}{dx}$

della (1) e (2) devono essere eguali; per $x = a$, dalla (2) $x = f$, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang:} \varphi$, essendo f l'ordinata massima, e φ l'angolo d'inclinazione del solido ai punti d'appoggio; e perciò si avranno le otto condizioni, detto φ_1 l'angolo d'inclinazione in B_1

$$0 = B + \frac{n^2 a - a_1 q^2}{p^2} + b_1 \quad (3)$$

$$0 = Ap - \frac{n^2 - q^2}{p^2} \quad (4)$$

$$0 = A \operatorname{sen:} pa_1 + B \operatorname{cos:} pa_1 + \frac{n^2}{q^2}(a - a_1) \quad (5)$$

$$0 = \frac{1}{6}(3a - a_1) a_1^2 n^2 + Ca_1 + D - b_1 \quad (6)$$

$$\operatorname{tang:} \varphi_1 = p A \operatorname{cos:} pa_1 - p B \operatorname{sen:} pa_1 - \frac{n^2 - q^2}{p^2} \quad (7)$$

$$\operatorname{tang:} \varphi_1 = \frac{1}{2} a_1 n^2 (2a - a_1) + C \quad (8)$$

$$f = \frac{1}{3} a^3 n^2 + Ca + D \quad (9)$$

$$\text{tang: } \varphi = \frac{1}{2} a^2 n^2 + C \quad (10)$$

che servono per determinare le costanti

$$A, B, b_1, \text{ tang: } \varphi_1, C, P, f, \text{ tang: } \varphi$$

Secondo il metodo approssimato dell' Illustre Professore, trascurando nella (3) b_1 a confronto di

$$\frac{n^2 a - a_1 q^2}{p^2}$$

Si ottiene dalle (4) e (3)

$$A = \frac{n^2 - q^2}{p^3} \quad (11)$$

$$B = - \frac{n^2 a - q^2 a_1}{p^2} \quad (12)$$

uguagliando la (5) colla (6), la (7) colla (8), ed eliminando prima C , e poi D si ottiene per i valori trovati di A e B

$$D = \frac{a_1 (n^2 - q^2)}{p^2} \left(\frac{\text{sen: } pa_1}{pa_1} - \cos: pa_1 \right) + \frac{a_1 q^2 - an^2}{p^2} (\cos: pa_1 - pa_1 \text{ sen: } pa_1 - 1) - \frac{1}{6} a_1 n^2 (3a - 2a_1)$$

$$C = \frac{n^2 - q^2}{p^2} (\cos: pa_1 - 1) - \frac{a_1 q^2 - an^2}{p^2} \text{sen: } pa_1 - \frac{1}{2} a_1 n^2 (2a - a_1)$$

Essendo pa_1 una quantità ordinariamente piccolissima, sviluppando $\text{sen: } pa_1$, $\cos: pa_1$ si potranno trascurare le potenze di pa_1 superiori alla seconda, e ritenere

$$D = \frac{1}{6} a_1^2 q^2 \quad C = - \frac{1}{2} a_1^2 n^2 \quad (13)$$

Sostituendo questi valori nell' equazioni (6), (9), (10) si ha

$$b_1 = \frac{1}{6} a_1^2 n^2 (3a - 4a_1) + \frac{1}{6} a_1^2 n^2 \quad (14)$$

$$f = \frac{1}{6} a^2 n^2 (2a^2 - 3a_1^2) + \frac{1}{6} a_1^3 q^2 \quad (15)$$

$$\text{tang: } \varphi = \frac{1}{2} n^2 (a^2 - a_1^2) \quad (16)$$

Per i valori di A, B, C, D, b_1 , tratti dalle (11), (12), (13), (14), le (1) e (2)

divengono

$$y = -\frac{n^2 - q^2}{p^3} (px - \text{sen: } px) + \frac{an^2 - a_1 q^2}{p^2} (1 - \text{cas: } px) + \frac{1}{6} a_1^2 [n^2 (3a - 4a_1) + a_1 q^2] \quad (17)$$

$$y = \frac{1}{6} n^2 (-3a_1^2 x + 3ax^2 - x^3) + \frac{1}{6} a_1^2 q^2 \quad (18)$$

e sviluppando $\text{sen: } px$, ed apprezzando soltanto le quantità che sono dell'istesso ordine dell'ultimo termine; in vece della (17) si può prendere la

$$y = \frac{1}{6} n^2 (3ax^2 - x^3) - \frac{1}{6} q^2 (3a_1 x^2 - x^3) + \frac{1}{6} a_1^2 [n^2 (3a - 4a_1) + a_1 q^2] \quad (19)$$

Esprimendo R la resistenza alla rottura dell'unità superficiale, E il coefficiente di elasticità, w la sezione, P una forza che agisce secondo la lunghezza del solido, ρ il raggio osculatore, v^1 l'ordinata della sezione corrispondente al punto in cui vi passa l'asse d'equilibrio, l'equazione da cui si ricavano le dimensioni del solido, è la

$$\frac{R}{E} = \frac{P}{Ew} + \text{massimo di } \frac{v^1}{\rho}$$

ritenendo $\rho = \frac{d^2 y}{dx^2}$; ora il massimo di $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ricavato dalla (17) corrisponde ad $x = 0$, ed è $an^2 - a_1 q^2$: quindi l'equazione da cui si devono determinare le dimensioni del solido è

$$\frac{R}{E} = \frac{P}{Ew} + v^1 (an^2 - a_1 q^2) = \frac{P}{Ew} + \frac{v^1}{\varepsilon} (aN - a_1 Q) \quad (20)$$

In virtù della ricerca di valori approssimati per le costanti, la equazione (17) non soddisfa alle condizioni cui deve adempire, e di fatti per $x = 0$, esibisce

$$y = \frac{1}{6} a_1^2 [n^2 (3a - 4a_1) + a_1 q^2]$$

in vece di $y = 0$; quindi è che la (20) non può servire che per casi che non richieggano una scrupolosa esattezza: volendo avere una formola precisa da cui ricavare le dimensioni del solido essendo date le forze Π , Π_1 ; eseguendo l'eliminazione nell'equazioni (3), (4), (5), . . . (10), come il calcolo le ha date; si ottiene

$$A = \frac{n^2 - q^2}{p^3}$$

$$B = -\left(\frac{n^2 - q^2}{p^3}\right) \text{tang: } pa_1 - \frac{n^2 (a - a_1)}{p^2} \text{sec: } pa_1$$

$$b_1 = \frac{n^2 - q^2}{p^3} \text{tang: } pa_1 + \frac{n^2 (a - a_1)}{p^2} \text{sec: } pa_1 - \frac{n^2 a - q^2 a_1}{p^2}$$

$$\text{tang: } \varphi_1 = \frac{n^2 - q^2}{p^2} (\text{tang: } pa_1 \text{sec: } pa_1 + \cos: pa_1 - 1) + \frac{n^2 (a - a_1)}{p} \text{tang: } pa_1$$

$$C = \frac{n^2 - q^2}{p^2} (\text{tang: } pa_1 \text{sec: } pa_1 + \cos: pa_1 - 1) + \frac{n^2 (a - a_1)}{p} \text{tang: } pa_1 - \frac{1}{2} n^2 a_1 (2a - a_1)$$

$$D = \frac{n^2 - q^2}{p^3} [\text{tang: } pa_1 - pa_1 (\text{sen: } pa_1 \text{ tang: } pa_1 + \cos: pa_1 - 1)] + \frac{n^2(a - a_1)}{p^2} (\text{sec: } pa_1 - pa_1 \text{ tang: } pa_1) - \frac{n^2 a - q^2 a_1}{p^2} - \frac{1}{6} n^2 a_1^2 (3a - a_1) + \frac{1}{2} n^2 a_1^2 (2a - a_1)$$

$$f = \frac{n^2 - q^2}{p^3} [\text{tang: } pa_1 + p(a - a_1) (\text{sen: } pa_1 \text{ tang: } pa_1 + \cos: pa_1 - 1)] + \frac{n^2(a - a_1)}{p^2} [\text{sec: } pa_1 + p(a - a_1) \text{ tang: } pa_1] - \frac{n^2 a - q^2 a_1}{p^2} - \frac{1}{6} n^2 a_1^2 (3a - a_1) + \frac{1}{2} n^2 a_1^2 (2a - a_1) - \frac{1}{2} n^2 a a_1 (2a - a_1) + \frac{1}{3} n^2 a^3$$

$$\text{tang: } \varphi = \frac{n^2 - q^2}{p^2} (\text{tang: } pa_1 \text{ sec: } pa_1 + \cos: pa_1 - 1) + \frac{n^2(a - a_1)}{p} \text{tang: } pa_1 - \frac{1}{2} n^2 a_1 (2a - a_1) + \frac{1}{2} n^2 a_1^2 (2a - a_1)$$

In virtù di questi valori la (1) diviene

$$\varepsilon y = \frac{n^2 - q^2}{p^2} [\text{sen: } px - px - \text{tang: } pa_1 (\cos: px - 1)] - \frac{n^2(a - a_1)}{p^2} \text{sec: } pa_1 (\cos: px - 1) \quad (21)$$

dalla quale $\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{n^2 - q^2}{p} \text{tang: } pa_1 \cos: px - \text{sen: } px + n^2(a - a_1) \text{sec: } pa_1 \cos: px$

il cui massimo è $\frac{n^2 - q^2}{p} \text{tang: } pa_1 + n^2(a - a_1) \text{sec: } pa_1$

e quindi l'equazione accurata da cui si devono ricavare le dimensioni del solido è

$$\frac{R}{E} = \frac{P}{Ew} + v^1 \left[\frac{n^2 - q^2}{p} \text{tang: } pa_1 + n^2(a - a_1) \text{sec: } pa_1 \right]$$

Supponendo pa_1 piccolissimo, e fatto in questa

$$\text{tang: } pa_1 = pa_1, \quad \text{sec: } pa_1 = 1$$

ritorna la (20)

Siano ora le forze Π_1 dirette in modo, che invece di comprimere la porzion del solido BB_1 , tendano ad allungarla: allora l'equazioni differenziali dei due rami CB , BA , sono

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - p^2 q = n^2(a - x) - q^2(a_1 - x) - p^2 b_1$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = n^2(a - x)$$

e gl'integrali completi

$$y = Ae^{px} + Be^{-px} - \frac{n^2(a - x)}{p^2} + \frac{q^2(a_1 - x)}{p^2} + b_1 \quad (22)$$

$$y = \frac{n^2}{6} (3ax^2 - x^3) + Cx + D \quad (23)$$

le quali come nel primo caso somministrano le otto condizioni

$$A + B = - \frac{q^2 a_1 - a n^2}{p^2} - b_1$$

$$A - B = - \frac{n^2 - q^2}{p^3}$$

$$A e^{p a_1} + B e^{-p a_1} = \frac{n^2 (a - a_1)}{p^2}$$

$$p A e^{p a_1} - p B e^{-p a_1} = \text{tang: } \varphi - \frac{n^2 - q^2}{p^2}$$

$$b_1 = \frac{n^2 a_1^2}{6} (3a - a_1) + C a_1 + D$$

$$\text{tang: } \varphi_1 = \frac{n^2 a_1}{2} (2a - a_1) + C$$

$$f = \frac{n a^3}{3} + C a + D, \quad \text{tang } \varphi = \frac{1}{2} n^2 c^3 + C$$

dalle quali eseguendo l'eliminazione

$$A = \frac{p n^2 (a - a_1) - (n^2 - q^2) e^{-p a_1}}{p^3 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})}$$

$$B = \frac{p n^2 (a - a_1) + (n^2 - q^2) e^{-p a_1}}{p^3 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})}$$

$$b_1 = \frac{-2 n^2 p (a - a_1) - (n^2 q^2) (e^{p a_1} - e^{-p a_1})}{p^3 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})} - \frac{q^2 a_1 - c n^2}{p^2}$$

$$\text{tang: } \varphi = \frac{-2 (n^2 - q^2) + a - a_1) (e^{p a_1} - e^{-p a_1})}{p^2 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})} + \frac{n^2 - q^2}{p^2}$$

$$C = \frac{-2 (n^2 - q^2) + p n^2 (a - a_1) (e^{p a_1} - e^{-p a_1})}{p^2 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})} + \frac{n^2 - q^2}{p^2} - \frac{n^2 a_1}{2} (2a - a_1)$$

$$D = b_1 + \frac{2 a_1 (n^2 - q^2) - p n^2 a_1 (a - a_1) (e^{p a_1} - e^{-p a_1})}{p^2 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})} - \frac{n^2 - q^2}{p^2} a_1 - \frac{1}{6} n^2 a_1^2 (3a - a_1)$$

$$f = b_1 - \frac{2 (a - a_1) (n^2 - q^2) - p n^2 (a - a_1)^2 (e^{p a_1} - e^{-p a_1})}{p^2 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})} + \frac{n^2 - q^2}{p^2} (a - a_1)$$

$$- \frac{n^2 a a_1}{2} (2a - a_1) + \frac{1}{6} n^2 a_1^2 (3a - a_1)$$

$$\text{ed } y = \frac{p n^2 (a - a_1) (e^{p x} + e^{-p x} - 2) - (n^2 - q^2) [e^{p a_1} (1 - e^{-p x}) - e^{-p a_1} (1 - e^{p x})]}{p^3 (e^{p a_1} + e^{-p a_1})}$$

