# Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven.

Von Axel Harnack in Leipzig.

Die Frage, aus wie vielen von einander verschiedenen reellen Zügen eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit oder ohne Singularitäten höchstens zusammengesetzt sein kann, ist, wie es scheint, bisher nicht aufgeworfen worden; jedenfalls findet sich, soweit mir die hierher gehörige Litteratur bekannt ist, eine Beantwortung derselben nur für einzelne Fälle. Bei der Classification der Curven nach ihrem Geschlechte trat zunächst die Eigenschaft gleich zu Tage, dass *alle Curven vom Geschlecht:* $p = 0$ (von Cayley Unicursalcurven benannt), falls sie überhaupt reell sind, nur *einen Zug* besitzen, wobei die Singularitäten (vielfache Punkte, bezüglich vielfache Tangenten), auch wenn sie isolirt vorkommen, nicht als Züge gezählt werden. Diese Eigenschaft liess sich aus der rationalen und eindeutigen Darstellung der Curve vermittelst eines Parameters ohne Weiteres erschliessen*). Die Untersuchung der Curven dritter Ordnung hatte schon früher zu dem Resultate geführt, dass hier nicht mehr als zwei getrennte Züge auftreten, ein Satz, der sich vermöge der eindeutigen Beziehung, welche zwischen Curven gleichen Geschlechtes besteht, oder, was in diesem Falle das nämliche besagt, vermöge der Darstellbarkeit aller dieser Curven durch elliptische Functionen leicht dahin erweitern lässt, dass *alle Curven vom Geschlecht:* $p = 1$ höchstens *zwei* von einander verschiedene Züge besitzen. Auch ist bekannt, dass die allgemeine Curve vierter Ordnung *vom Geschlecht:* $p = 3$ aus *vier* gesonderten Theilen zusammengesetzt sein kann.

Es ist nun der Zweck dieser Note, nachzuweisen, dass ein gleich einfaches Gesetz für Curven beliebigen Geschlechtes gilt, *demgemäss eine Curve vom Geschlecht $p$ nie mehr als $p + 1$ getrennt verlaufende*

---

*) Dass diese rationale und eindeutige Darstellung des Curvenelementes $x$ durch einen Parameter $\lambda$ zugleich zu einer wechselseitig eindeutigen gemacht werden kann, so dass die Werthe von $x$ durch eine continuirliche Aufeinanderfolge aller Werthe von $\lambda$ im Allgemeinen *eindeutig* erhalten werden, ist neuerdings von Lüroth nachgewiesen worden. Math. Ann. Bd. IX, p. 163.

*Züge enthält*, sodann aber zu zeigen, *dass auch wirklich, für jede Geschlechtszahl $p$, Curven mit $p+1$ Zügen existiren.* Die Methode, welche bei dieser Darstellung zur Anwendung kommen wird, gründet sich, entsprechend der Definition der Curve durch eine algebraische Gleichung mit reellen Coefficienten, ausschliesslich auf das Bezout'sche Theorem und auf die nach den Untersuchungen von v. Staudt und Möbius geläufige Unterscheidung der algebraischen Curvenzüge in *paare* und *unpaare*.

Unter einem *vollständigen Zuge* wird im Folgenden die Gesammtheit aller der Theile zu verstehen sein, deren Durchlaufen nothwendig ist, um von einem Punkte des Zuges nach Ueberschreitung anderer Punkte, und zwar eines jeden im Allgemeinen nur einmal, zu dem Ausgangspunkte zurückzukehren, mag dann auch dieser Zug im Endlichen in verschiedene *Aeste* zerrissen erscheinen, wie z. B. bei der Hyperbel. Dabei muss ferner betont werden, dass die Aenderung der Tangentenrichtung eine continuirliche sein soll. Zufolge dieser Bemerkung sind zwei Curvenzüge, auch wenn sie sich schneiden, noch immer als zwei gesonderte zu betrachten.

Endlich soll hier gleich gesagt werden, dass die nachstehenden Untersuchungen, zunächst für Ordnungscurven ausgesprochen, einen vollständig dualen Charakter tragen, so dass sie giltig bleiben, auch wenn die Curve als durch die Bewegung einer Geraden erzeugt gedacht wird. Denn hierbei lassen sich die Curvenzüge in gleicher Reihe in *paare* und *unpaare* trennen, je nachdem die Anzahl der von einem Punkte der Ebene an den Zug ausgehenden Tangenten gerade oder ungerade ist. Die in diesem Sinne unpaaren Züge sind durch eine *ungerade* Anzahl von Rückkehrpunkten charakterisirt; und zwar muss diese ungerade Zahl, falls keine Doppeltangenten oder Wendetangenten am Zuge auftreten sollen, auch hier mindestens gleich *drei* sein. Das Auftreten dieser beiden Singularitäten aber, von denen jede als zwei Rückkehrpunkte absorbirend betrachtet werden muss, ändern den Charakter eines paaren oder unpaaren Classenzuges ebensowenig, wie der des paaren oder unpaaren Ordnungszuges durch das Entstehen von Doppel- oder Rückkehrpunkten gestört wird.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehe ich zu dem Beweise des oben aufgestellten Satzes selbst über. Derselbe verlangt den Nachweis: *erstlich* der Unmöglichkeit von $p+2$ oder mehr Zügen, *sodann* der Existenz von $p+1$ Zügen.

## I.

Betrachtet man zunächst eine Curve $n^{ter}$ Ordnung, ohne irgend welchen vielfachen Punkt, deren Geschlecht $p$ mithin gleich $\frac{1}{2}(n-1)\cdot(n-2)$ ist, so gilt der Satz, dass diese Curve, falls $n$ eine gerade Zahl ist, gar keinen, falls $n$ eine ungerade Zahl ist, nur einen unpaaren Zug besitzt. Denn da sich zwei unpaare Züge mindestens in einem Punkte schneiden, so würden, falls die Curve $n^{ter}$ Ordnung mehrere solcher Züge enthielt, Doppelpunkte auftreten, was für die allgemeine Curve eben ausgeschlossen ist.

Wir nehmen nun an, die Curve $n^{ter}$ Ordnung bestände aus $p+1=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ paaren Zügen (dieselben sollen der Kürze halber im Folgenden auch als „Ovale" bezeichnet werden), zu denen, falls $n$ ungerade ist, noch ein unpaarer, falls $n$ gerade ist, noch ein paarer Zug tritt. Jeder paare Zug hat bekanntlich die Eigenschaft von jedem anderen algebraischen Zuge immer nur in einer *geraden* Anzahl von Punkten, die auch gleich Null sein kann, geschnitten zu werden. Diese Eigenschaft wird uns nützlich, indem wir eine Curve $n-2^{ter}$ Ordnung construiren, welche jedes der $p+1$ Ovale in einem auf demselben willkührlich angenommenen Punkte schneidet. Durch Festsetzung *eines* Schnittpunktes wird dann jedesmal ein *zweiter* auf dem Ovale mitbedingt sein.

Eine allgemeine Curve $n-2^{ter}$ Ordnung ist aber erst durch $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ Punkte bestimmt, so dass, wenn auf den $p+1$ Ovalen je ein Schnittpunkt gegeben wird, noch

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n+1)-\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-1=n-3$$

Punkte gewählt werden können, durch welche diese Curve ebenfalls hindurch gehen soll. Verlegt man dieselben sämmtlich auf den noch übrigen Zug der Curve $n^{ter}$ Ordnung und bestimmt die Anzahl der Punkte, in denen die so construirte Curve die gegebene schneidet, so ergiebt sich, dass diese Zahl mindestens gleich $n(n-2)+2$ werden würde, *was der Annahme einer irreducibelen Curve $n^{ter}$ Ordnung widerstreitet.*

Denn die $p+1$ Ovale, von denen jedes in zwei Punkten geschnitten werden müsste, liefern zusammen $(n-1)(n-2)+2$ Punkte. Der gesondert betrachtete Zug erfordert, falls er gerade ist, ebenso eine gerade Anzahl von Schnittpunkten, so dass aus der Annahme der $n-3$ Punkte noch ein weiterer hervorgeht; ist er dagegen ungerade, so wird er von der construirten Curve, deren Ordnungszahl $n-2$ dann ebenfalls ungerade ist, in einer ungeraden Anzahl von Punkten getroffen, so dass auch hier die $n-3$ gegebenen Schnittpunkte mindestens noch einen weiteren erfordern. In beiden Fällen ergiebt sich also die als unmöglich erkannte Zahl:

$$(n-1)(n-2)+2+(n-3)+1=n(n-2)+2\,.$$

Es ist somit bewiesen, dass bei einer allgemeinen Curve $n^{ter}$ Ordnung die Zahl der vollständigen Züge jedenfalls nicht grösser als $p+1$ sein kann.

Dieser Satz behält aber auch für Curven, welche mit Singularitäten behaftet sind, seine Giltigkeit. Bei dem Nachweise hiervon werde ich mich indessen, um nicht weitläufig sein zu müssen, zunächst nur auf die einfachen Singularitäten (Doppelpunkte und Rückkehrpunkte) beschränken.

Da bei diesen Betrachtungen das Auftreten mehrer unpaaren Züge, durch deren Schnittpunkte Doppelpunkte entstehen, zu berücksichtigen ist, so muss die Untersuchung hier so geführt werden, dass man die Anzahl dieser unpaaren Züge als bekannt voraussetzt. Es sei demnach eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung gegeben, von welcher angenommen wird, dass sie $\nu$ unpaare Züge besitzen soll. Dieselben schneiden sich in mindestens $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ Punkten, welche mithin Doppelpunkte für die betrachtete Curve sind. Ausserdem möge dieselbe noch $d$ Doppelpunkte oder Rückkehrpunkte enthalten, über deren Realität und Lage gar keine Annahmen getroffen werden, von denen also auch ein Theil dadurch zu Stande kommen kann, dass sich je zwei der $\nu$ unpaaren Züge in mehr als *einem* Punkte schneiden. Das Geschlecht der Curve wird also:

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}\nu(\nu-1) - d,$$

und es ist der Nachweis zu erbringen, dass solch eine Curve jedenfalls nicht mehr als $p+1$ Züge, also im vorliegenden Falle nicht mehr als $p+1-\nu$ Ovale besitzen kann.

Der Beweis dieses Satzes erleidet einige Modificationen, je nachdem die Zahl $n$ und demgemäss auch $\nu$ *gerade* oder *ungerade* ist. Es soll zunächst der *erste* dieser beiden Fälle näher betrachtet werden:

Angenommen die Curve habe noch $p-\nu+2$ Ovale, so construire man wiederum eine allgemeine Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung, welche jedes dieser Ovale in einem vorgeschriebenen Punkte schneidet und ausserdem durch die $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)+d$ Doppelpunkte einfach hindurchgeht (durch diese letzteren sind möglicherweise auch imaginäre Bestimmungsstücke für die Curve gegeben). Bei dieser Forderung bleiben noch

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n+1) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + \nu - 2 = n + \nu - 4$$

Bestimmungsstücke zur Construction der Curve willkührlich. Man kann mithin verlangen, dass diese noch durch $n+\nu-4$ vorgeschriebene Punkte (was eine *gerade* Anzahl ist), gelegen auf irgend einem der vorausgesetzten Ovale hindurchgeht. Berechnet man nun, in wie viel Punkten sich die beiden Curven $n^{\text{ter}}$ und $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden, so ist zu berücksichtigen, dass jeder der $p-\nu+2$ Punkte, welche auf den Ovalen angenommen wurden, noch einen zweiten Schnittpunkt bedingt, selbst wenn reelle Doppelpunkte auf den Ovalen in der Form von Schleifen oder Spitzen auftreten, oder wenn insbesondere Doppelpunkte dadurch zu Stande kommen, dass sich die Ovale unter einander oder mit den unpaaren Zügen schneiden; denn das Auftreten dieser letzteren Art von Doppelpunkten kann auf jedem Ovale immer nur paarweise erfolgen. Ebenso trifft die zu construirende Curve jeden der unpaaren Züge der Voraussetzung nach in $\nu - 1$ Punkten, und da diese Zahl ungerade ist, während die zu construirende Curve eine gerade Ordnungszahl besitzt, so muss auf jedem Zuge noch mindestens ein weiterer Schnittpunkt gelegen sein, auch wenn noch andere als diese $\nu - 1$ Doppelpunkte auf einem unpaaren Zuge vorhanden sind. Die Summe aller Schnittpunkte wird demnach mindestens gleich:

$$2(p-\nu+2)+2d+\nu(\nu-1)+\nu+n+\nu-4=n(n-2)+2$$

sein müssen, was der Voraussetzung widerstreitet.

Ist aber $n$ und also auch $\nu$ eine ungerade Zahl, so wird man durch eine ganz analoge Betrachtung auf dieselbe unmögliche Zahl von Schnittpunkten geführt, nur dass jetzt die Annahme von $\nu - 1$ Punkten, in denen die Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung einen unpaaren Zug schneiden soll, desshalb noch immer einen weiteren Schnittpunkt nach sich zieht, weil ein unpaarer Curvenzug von einer algebraischen Curve mit ungerader Ordnungszahl in einer ungeraden Zahl von Punkten getroffen wird*).

## II.

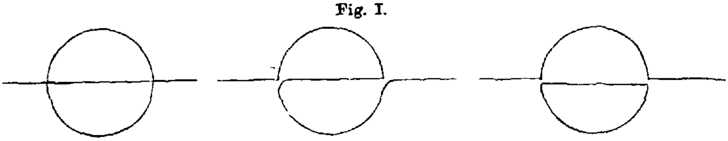
Um die *Existenz* von Curven mit der Maximalzahl reeller Züge nachzuweisen, steige man von den bekannten Curven niederer Ordnung zu denen höherer Ordnung auf, indem man zu einer allgemeinen Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die ihr zukommende Maximalzahl wirklich besitzt, eine gerade Linie hinzunimmt und nun den Verlauf dieser beiden Curven gleichzeitig ins Auge fasst. Es wird sich zeigen, dass man auf diese Weise eine Curve $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung der gesuchten Art construiren kann, wenn man die Curventheile, welche an die gemeinsamen Schnittpunkte herantreten, nach bekannten Principien durch ähnlich verlaufende ersetzt. Werden *alle* singulären Punkte dabei aufgelöst, indem die Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung selbst ohne Singularitäten vorausgesetzt wird, so gelangt man durch diese Betrachtung auch nur zu der *allgemeinen* Curve $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung und kann also noch nicht den Satz aussprechen, dass es zu *jeder* Geschlechtszahl $p$ Curven mit $p+1$ reellen Zügen giebt. Der Vollständigkeit halber wird man daher die

*) Für die Anwendung dieser Betrachtungsweise auf Curven mit höheren Singularitäten soll hier nur die Regel angeführt werden: Die Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung ist so zu bestimmen, dass sie in einem $k$-fachen Punkt der Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher das Geschlecht derselben um $\frac{1}{2}k(k-1)$ Einheiten erniedrigt, einen $k-1$-fachen Punkt erhält. Derselbe ist demnach als Schnittpunkt der beiden in Betracht gezogenen Curven $k(k-1)$-mal zu rechnen.

$n-2$ Geschlechtszahlen, welche zwischen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ und $\frac{1}{2}n(n-1)$ liegen, nachträglich zu berücksichtigen haben.

Nimmt man zunächst eine *Curve zweiter Ordnung* und zwar der Einfachheit halber eine *Ellipse* an ($a_x{}^2=0$), und schneidet dieselbe durch eine gerade Linie ($v_x=0$) in zwei reellen Punkten, so kann das Gebilde, welches durch diese beiden Curven entsteht, auf zwei verschiedene Weisen beschrieben werden: entweder man durchläuft dasselbe in einem continuirlichen Zuge, wobei nur jeder der beiden Schnittpunkte zweimal überschritten wird, oder man setzt es aus zwei Zügen zusammen, welche nur in den beiden Schnittpunkten aneinanderstossen.

Fig. I.



Dem Durchlaufen der ersten Art entspricht eine *eintheilige*, dem der zweiten eine *zweitheilige* Curve dritter Ordnung. Um die Gleichung solch einer zweitheiligen Curve, auf die es hier ankommt, zu erhalten, verfahre man folgendermassen: Es seien $q_x^{(1)}=0$, $q_x^{(2)}=0$, $q_x^{(3)}=0$ die Gleichungen dreier Geraden, von denen keine die innerhalb der Ellipse liegende endliche Strecke von $v_x$ in reellen Punkten schneidet*); alsdann ist, wenn $\lambda$ einen willkührlichen Parameter bezeichnet, durch die Form:

$$a_x^2 \cdot v_x + \lambda \cdot q_x^{(1)} \cdot q_x^{(2)} \cdot q_x^{(3)} = 0$$

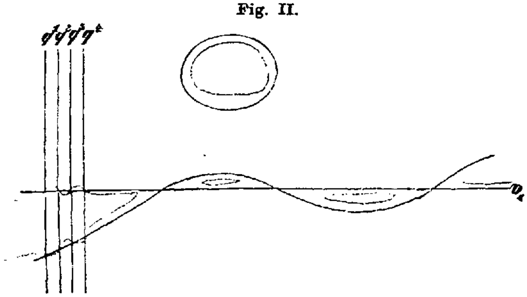
ein Büschel von Curven dritter Ordnung dargestellt. Giebt man der Grösse $\lambda$ einen unendlich kleinen Werth, so muss die Curve sich in unmittelbarer Nachbarschaft des Kegelschnittes und der Geraden erstrecken; ihre sechs Schnittpunkte mit jenem, so wie ihre drei Schnittpunkte mit dieser sind durch die Wahl der Linien $q$ festgelegt. Da nun die Curve die Linie $v_x$ an keiner innerhalb des Kegelschnittes gelegenen Stelle schneidet, so verläuft sie in der Weise, dass ihr einer Zug längs der einen Kegelschnitthälfte und den ausserhalb des Kegelschnittes befindlichen geradlinigen Strecken liegt, während der andere Zug längs der anderen Hälfte auch in der Nähe der innen liegenden geradlinigen Strecke sich befindet. *Man hat also eine zweitheilige Curve vom Geschlecht: $p=1$ construirt; der eine Zug derselben wird von der Geraden $v_x$ in drei reellen Punkten geschnitten.*

---

*) Man kann ebensowohl die Festsetzung treffen, dass *zwei* der Linien $q$ die begrenzte Strecke von $v_x$ durchkreuzen, dagegen führt die Annahme, dass *eine* oder alle *drei* Linien so gelegen sind, zu einem Büschel von Curven 3ter Ordnung, welches in der Nachbarschaft von $a_x{}^2 v_x = 0$ nur *eintheilige* Curven enthält.

Von der so erhaltenen zweitheiligen Curve 3ter Ordnung gehe man nun zu der gesuchten Curve 4ter Ordnung durch ein gleiches Verfahren weiter. Da nämlich zufolge der über die Linien $q$ getroffenen Annahme die Gerade $v_x$ den einen unpaaren Zug in drei reellen Punkten schneidet, so entstehen aus dem unpaaren Zuge und dieser Geraden gleichsam drei Ovale, von denen zwei im endlichen geschlossen sind, das dritte dagegen durch die unendlich ferne Gerade getheilt erscheint. Diese drei Ovale stossen in den drei Schnittpunkten zusammen, ein viertes, durch den paaren Zug der Curven dritter Ordnung gegeben, liegt abgesondert.

Fig. II.



Indem man nun vier Linien: $q_x^{(1)} \cdots q_x^{(4)}$ auswählt, welche nicht durch die beiden endlichen Strecken auf $v_x$ hindurchgehen, liefert die Gleichung:

$$a_x^3 \cdot v_x + \lambda \cdot q_x^{(1)} q_x^{(2)} q_x^{(3)} q_x^{(4)} = 0$$

bei unendlich kleinen Werthen von $\lambda$ eine *viertheilige* Curve vierter Ordnung, sobald man die noch mögliche Bestimmung trifft, dass diese Curve durch einen Punkt gehen soll, welcher sich innerhalb eines der beiden im endlichen gelegenen Ovale, die aus dem unpaaren Curvenzuge entstanden sind, befindet. *Zugleich wird wiederum der eine Zug dieser Curve 4ter Ordnung von der Geraden $v_x$ in vier reellen Punkten nämlich in den Durchschnittspunkten dieser Linie mit den Geraden: $q_x^{(1)} \cdots q_x^{(4)}$ geschnitten.*

Die allgemeine Curve 5ter Ordnung, vom Geschlecht $p = 6$, mit *sieben* Theilen entsteht nun aus der viertheiligen Curve vierter Ordnung, da wiederum die Linie $v_x$ so liegt, dass sie den einen Zug derselben in vier reellen Punkten trifft. Denn dieses Gebilde lässt sich nach denselben Principien, die oben angewandt wurden, in drei Ovale und einen unpaaren Zug zertheilen. *Die Linie $v_x$ schneidet diesen letzteren Zug in fünf reellen Punkten.*

Es ist leicht einzusehen, dass man auf diese Weise weiter vorgehen kann. Man gelangt dabei immer von einer Curve $n$ter Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ Zügen, von denen mindestens ein Zug durch eine Gerade $v_x$ in $n$ reellen Punkten getroffen wird, zu einer Curve $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+n=\frac{1}{2}n(n-1)+1$ reellen Zügen, womit der verlangte Nachweis erbracht ist.

Es kommt bei diesem Fortgange nur auf zwei Dinge an: erstlich muss unter den $p+1$ Zügen der Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung mindestens einer existiren, welcher von einer Geraden $v_x$ in $n$ reellen Punkten getroffen wird; sodann müssen die $n+1$ Linien $q_x^{(i)}$ so gewählt werden, dass keine die Gerade $v_x$ innerhalb der $n-1$ endlichen Strecken schneidet, welche durch die Durchschnittspunkte der Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung gebildet werden. Sind diese Bestimmungen getroffen, so hat man die noch immer erfüllbare Forderung zu stellen, dass die zu construirende Curve $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung durch einen Punkt geht, welcher innerhalb eines der $n-1$ im endlichen geschlossenen Räume, welche zur Bildung von ebensovielen Ovalen Anlass geben, in hinreichender Nähe der ursprünglichen Curve gelegen ist*).

Um die Allgemeingiltigkeit des Satzes, dass es zu *jeder* Geschlechtszahl $p$ Curven mit $p+1$ Zügen giebt, einzusehen, müssen auch Curven, welche mit Singularitäten behaftet sind, in den Kreis der Betrachtung gezogen werden. Es fragt sich nämlich, ob man bei einer allgemeinen Curve $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung mit $p+1$ Zügen successive soviele reelle oder imaginäre Doppelpunkte entstehen lassen kann, dass das Geschlecht derselben um eine, zwei $\cdots$ bis mindestens $n-2$ Einheiten verringert wird, wodurch dann alle zwischen ihrem anfänglichen Geschlechte und dem Geschlechte einer allgemeinen Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung liegenden Zahlen erhalten werden. Geht bei diesem Fortgange jedesmal *nur ein Zug* verloren, so ist der behauptete Satz bewiesen.

Entsprechend dem Principe, welches bisher angewandt wurde, soll nun, um dieses zu erweisen, ein Weg gezeigt werden, auf den man von einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit $n-3$ (oder weniger) Doppelpunkten zu einer Curve $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung mit $n-2$ (oder weniger) Doppelpunkten wirklich gelangen kann, so dass nicht mehr als die erforderliche Zahl von Zügen verschwindet, das heisst: noch immer $p+1$ vorhanden bleiben.

Setzt man die Existenz einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnnng ($a_x^n=0$) voraus, welche $n-2$ Doppelpunkte und $p+1$ Züge besitzt, deren einer von einer geraden Linie ($v_x=0$) in $n$ reellen, von einander verschiedenen Punkten getroffen wird, — Annahmen, welche bekanntlich für Curven

*) Innerhalb des Büschels: $a_x^n \cdot v_x + \lambda \cdot q_x^{(1)} \cdots\cdot q_x^{(n+1)} = 0$ gewährt bei dieser Bestimmungsweise der Linien $q_x^{(i)}$ die zerfallene Curve $a_x^n \cdot v_x = 0$, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist, den Uebergang von Curven mit $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ zu Curven mit $\frac{1}{2}n(n-1)-(n-3)$ oder mit $\frac{1}{2}n(n-1)-(n-2)$ Zügen.

niederer Ordnung, z. B. für $n=3$ oder 4 erfüllbar sind — so lässt sich jedenfalls eine zweite Curve $n^{ter}$ Ordnung ($\alpha_x^n=0$) construiren, welche die nämlichen Punkte wie die erste zu Doppelpunkten besitzt und ausserdem die Gerade $v_x$ in $n$ vorgeschriebenen Punkten schneidet. Man wähle nun diese $n$ Punkte, durch welche $\alpha_x^n=0$ hindurchgehen soll, derart, dass einer von ihnen mit einem der gemeinsamen Schnittpunkte von $v_x$ und $a_x^n$ zusammenfällt, und zwar mit einem der beiden, in welchen die auf $v_x$ abgetheilten endlichen Strecken mit der durch das unendliche gehenden zusammenstossen. Die übrigen $n-1$ Punkte nehme man auf dieser letztgenannten Strecke selber an. Fügt man nun noch eine Gerade ($w_x=0$) hinzu, welche durch denselben Schnittpunkt von $v_x$ und $a_x^n$, durch welchen auch $\alpha_x^n$ gelegt wurde, hindurchgeht, so wird die Gleichung:

$$a_x^n \cdot v_x + \lambda \alpha_x^n \cdot w_x = 0$$

für beliebige Werthe von $\lambda$ im Allgemeinen eine Curve $n+1^{ter}$ Ordnung mit $n-2$ Doppelpunkten darstellen. Denn die Doppelpunkte der Curve $n^{ter}$ Ordnung und der eine Schnittpunkt von $v_x$ und $w_x$ sind singuläre Punkte für alle Curven dieses Büschels. Bei unendlich kleinen Werthen von $\lambda$ verläuft die Curve unendlich benachbart zu dem Gebilde $a_x^n \cdot v_x$ und besitzt die dem Geschlecht entsprechende Maximalzahl, weil auch hier die wesentliche Forderung befriedigt ist, dass ausser dem einen Ovale, welches sich an den durch das unendliche gehenden Zug als Schleife ansetzt, jedes andere zu einem selbstständigen Zuge sich gestaltet. Es folgt dieses wiederum aus der Annahme, dass weder die Curve $\alpha_x^n$ noch die Linie $w_x$ durch eine der endlichen Strecken von $v_x$ hindurchgeht. Bei der Curve $n+1^{ter}$ Ordnung treten somit $n-2$ Züge mehr als bei der Curve $n^{ter}$ Ordnung auf, wodurch der behauptete Satz bewiesen ist. Zugleich erkennt man, dass eine zu $v_x$ benachbarte gerade Linie den einen Curvenzug in $n+1$ reellen, von einander verschiedenen Punkten schneidet, so dass man von der so gewonnenen Curve $n+1^{ter}$ Ordnung auf die nämliche Weise zu einer Curve $n+2^{ter}$ Ordnung mit $n-1$ (oder weniger) Doppelpunkten übergehen kann.

Mit diesen Betrachtungen, welche sich noch auf mannigfache Weise ändern lassen, ist die bemerkenswerthe Eigenschaft algebraischer Curven vollständig bewiesen:

*Es giebt zu jeder Geschlechtszahl $p$ Curven mit der Maximalzahl von $p+1$ Zügen.*

Solche Curven der Untersuchung der algebraischen Integrale und der durch Umkehr derselben entstandenen Functionen zu Grunde zu legen, scheint von erheblichem Vortheile zu sein, da sich bei ihnen functionelle Beziehungen, vollständiger als bei den Curven mit weniger Zügen, in reeller Weise veranschaulichen lassen. So gewinnen, um hier noch dieses eine zu erwähnen, die $2p$ Perioden eines auf die Curve bezüglichen überall endlichen Integrales die geometrische Bedeutung, dass $p$ derselben durch den Uebergang von einem reellen Zuge zu den $p$ anderen entstehen, während die $p$ übrigen Perioden durch das Umlaufen dieser $p$ reellen Züge zu Stande kommen. Die Periode, welche sich auf den einen erstgenannten Zug bezieht, muss bereits als lineare Combination der anderen betrachtet werden. Eine genauere Darlegung dieser Verhältnisse setzt indess eine nähere Untersuchung darüber voraus, auf welche Weise sich bei einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung die adjungirten Curven $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung legen lassen, und welcher Art das System der $2p+2(n-2)$ Tangenten ist, welche von einem Punkte der Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung ausgehen.

Auch müssen die vorstehenden Betrachtungen noch nach der Richtung hin erweitert werden, dass bestimmte Gruppirungen und Lagenbeziehungen verschiedener Curvenzüge hinsichtlich des Einflusses untersucht werden, welchen sie auf die Erniedrigung der Anzahl überhaupt vorhandener reeller Züge ausüben. Da sich hieraus der Einfluss vielfacher Punkte erschliessen lassen wird, so werden diese Untersuchungen unter anderem dazu führen, auch für Curven im Raume die Frage nach der Vieltheiligkeit zu lösen.

Leipzig, im Januar 1876.