

Complemento alle ricerche sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici.

(Di LUIGI BIANCHI, a Pisa.)

Il presente lavoro è una continuazione della Memoria da me pubblicata l'anno scorso nel tomo 21 di questi *Annali* e insieme della mia Nota ulteriore sull'argomento nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » (7 gennaio 1894) (*). Lo scopo principale di questa nuova pubblicazione è di dare numerose applicazioni numeriche dei metodi generali alla determinazione del gruppo aritmetico riproduttivo di una forma quaternaria a determinante negativo. Essa diversifica dalle precedenti per ciò che alla considerazione di quel sottogruppo riproduttivo della forma, che è congruo coll'identità (mod. 2), è sostituita a dirittura quella del gruppo riproduttivo completo. Col moltiplicare appunto gli esempi, mi sono convinto che se da un lato si perde così il vantaggio che l'incontro fra due sfere di riflessione possa aver luogo solo ortogonalmente o tangenzialmente, dall'altro però l'aggiunta di nuove sfere di riflessione permette di isolare in casi molto più numerosi e con un minor numero di faccie un poliedro racchiuso da sfere di riflessione. Si aggiunga poi che nei casi, assai frequenti, in cui il gruppo possiede infiniti piani di riflessione, la ricerca non risulta affatto complicata dalla estensione di cui è parola.

Alla definizione aritmetica dei gruppi poliedrici corrispondenti al gruppo riproduttivo di una forma quaternaria mi sono arrestato soltanto in un caso (n.º 22, 23), che conduce ad una notevole estensione dei gruppi già da me considerati nel vol. 40 dei « *Mathematische Annalen* ». Del resto anche per gli

(*) Citerò questi due lavori rispettivamente con (A), (B).

Annali di Matematica, tomo XXIII.

altri casi si trovano già nella Nota (B) tutti gli elementi necessari per una tale definizione; soltanto occorre associare alle sostituzioni ivi considerate a determinante 1 convenienti sostituzioni della medesima forma a determinante 2.

Notiamo qui in fine, per non dover ripetere l'osservazione ad ogni singolo esempio, che in tutti i casi considerati nel presente lavoro non esiste, fuori del gruppo aritmetico riproduttivo della forma quaternaria, alcuna sostituzione permutabile col gruppo, cioè il gruppo stesso non è ampliabile. Fanno soltanto eccezione due casi che verranno indicati particolarmente.

§ 1. Le forme quaternarie: $px_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Supporremo qui soltanto, per semplicità, che il numero intero p sia privo di fattori quadrati. Considerando il gruppo aritmetico completo riproduttivo della forma, determiniamo col metodo dei §§ 1, 2 della Nota (B) le riflessioni contenute nel gruppo poliedrico corrispondente. Esse hanno la forma:

$$z' = \frac{(\alpha_1 \sqrt{\lambda} + i \alpha_2 \sqrt{\mu}) z_0 + i \sqrt{\lambda} m}{i \sqrt{\lambda} n z_0 + (\alpha_1 \sqrt{\lambda} - i \alpha_2 \sqrt{\mu})}, \quad (1)$$

essendo:

$$p = \lambda \mu,$$

una qualunque decomposizione di p in due fattori, e indicando con α_1, α_2, m, n numeri interi, *dei quali i due ultimi debbono essere insieme pari o dispari*; inoltre il determinante della (1) deve essere o eguale a 1 o eguale a 2, ciò che scriviamo:

$$\lambda \alpha_1^2 + \mu \alpha_2^2 + \lambda m n = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}. \quad (2)$$

Cerchiamo anzi tutto i piani di riflessione.

Se p è impari, essi si ottengono soltanto quando si faccia

$$n = 0, \quad \lambda = 1, \quad \mu = p, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0,$$

ovvero:

$$n = 0, \quad \lambda = p, \quad \mu = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1,$$

ed hanno rispettivamente le equazioni:

$$\eta = r, \quad \xi = r \sqrt{p},$$

indicando r un intero qualunque. Ma se p è pari abbiamo anche le soluzioni:

$$n = 0, \quad \lambda = \frac{p}{2}, \quad \mu = 2, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1,$$

che danno i nuovi piani di riflessione:

$$\xi = r \frac{\sqrt{p}}{2},$$

r indicando ancora un intero qualunque. Ciò posto, se nel caso di p dispari consideriamo il prisma limitato dai quattro piani di riflessione:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \sqrt{p}, \quad 4) \quad \eta = 1,$$

e nel caso di p pari quello limitato dai quattro piani:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \frac{\sqrt{p}}{2}, \quad 4) \quad \eta = 1,$$

esso non sarà attraversato da alcun altro piano di riflessione. Se poi, togliendo da questo prisma le regioni interne alle sfere di riflessione che lo attraversano, riusciamo ad isolare un poliedro situato tutto al disopra del piano ξ_η , salvo agli eventuali vertici singolari sul piano stesso, avremo o il poliedro fondamentale del gruppo o quello di un suo sottogruppo eccezionale d'indice finito, ciò che nei singoli casi potremo facilmente decidere, determinando le trasformazioni del poliedro in sè stesso (*).

Le sfere di riflessione corrispondenti alla sostituzione (1), per $n \geq 0$, hanno l'equazione:

$$\left(\xi - \frac{\alpha_2 \sqrt{\mu}}{n \sqrt{\lambda}} \right)^2 + \left(\eta + \frac{\alpha_1}{n} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\lambda n^2}, \quad (3)$$

ovvero l'altra:

$$\left(\xi - \frac{\alpha_2 \sqrt{\mu}}{n \sqrt{\lambda}} \right)^2 + \left(\eta + \frac{\alpha_1}{n} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{\lambda n^2}, \quad (3^*)$$

secondo che il determinante della (1) è eguale a 1 ovvero eguale a 2.

(*) Cfr. specialmente i primi paragrafi della Memoria (A).

fondamentale del gruppo G riproduttivo della forma $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Questo gruppo si genera dunque con quattro omologie armoniche elementari corrispondenti alle riflessioni 1) 2) 3) 4). Le loro espressioni effettive, calcolate colla formola (5) della Nota (B), sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, & \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, & \quad 3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \\
 & \quad 4) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Volendo considerare in G anche le sostituzioni coll'ultimo coefficiente negativo, basta associare alle quattro precedenti la quinta sostituzione elementare:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Confrontando questo primo esempio con quello dei §§ 12, 13 (A), vediamo già come la ricerca venga in effetto semplificata, passando dal sottogruppo congruo coll'identità (mod. 2) al gruppo riproduttivo completo. Nel caso attuale la definizione aritmetica del gruppo poliedrico corrispondente a G è molto semplice. Invero il poliedro sopra definito coincide, nel senso non-euclideo con quello del gruppo ampliato di sostituzioni a determinante ± 1 , $\pm i$, i cui coefficienti sono interi di GAUSS, come si trova determinato nel § 12 della mia Memoria ora citata (*). In effetto la sostituzione:

$$z' = \frac{1+i}{2}(-z+1),$$

trasforma l'un poliedro nell'altro.

(*) Math. Annalen, Bd. 40.

§ 3. La forma: $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani di riflessione:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 4) \quad \eta = 1,$$

basta togliere la regione interna alla sfera di riflessione:

$$5) \quad \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2,$$

per avere definito un poliedro (fig. 2.^a) limitato da sfere (piani) di riflessione coi cinque vertici:

$$V_1 \equiv (0, 0, 1) \quad \text{intersezione delle faccie } 1) \ 2) \ 5)$$

$$V_2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 1) \ 3) \ 5)$$

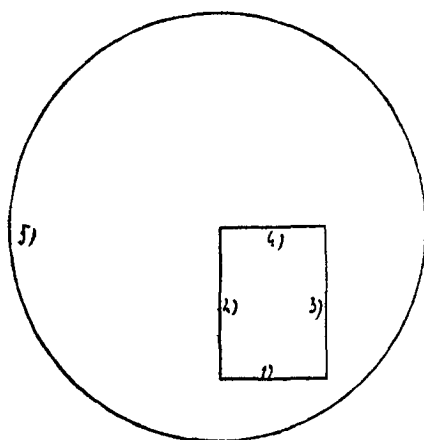
$$V_3 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 3) \ 4) \ 5)$$

$$V_4 \equiv (0, 1, \sqrt{2}) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 2) \ 4) \ 5)$$

$$V_\infty \equiv (0, 0, \infty) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 1) \ 2) \ 3) \ 4).$$

Questo poliedro non è più attraversato da alcuna sfera di riflessione e

non ammette trasformazioni in sè medesimo. Esso è dunque il poliedro fondamentale del gruppo G riproduttivo della forma, il quale si genera quindi con cinque omologie armoniche elementari corrispondenti alle riflessioni da 1) a 5). Le espressioni effettive di queste omologie sono le seguenti:

Fig. 2.^a.

$$1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$3) \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad 5) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Anche qui è facile risalire alla definizione aritmetica del gruppo poliedrico corrispondente. E infatti il poliedro del presente numero coincide, nel senso non-euclideo con quello del gruppo ampliato di sostituzioni a determinante ± 1 , i cui coefficienti percorrono i numeri interi del corpo quadratico immaginario $(1, i\sqrt{2})$ (*).

§ 4. La forma: $3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma limitato dai quattro piani di riflessione:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \sqrt{3}, \quad 4) \quad \eta = 1,$$

togliamo le regioni interne alle due sfere di riflessione:

$$5) \quad \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6) \quad (\xi - \sqrt{3})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2.$$

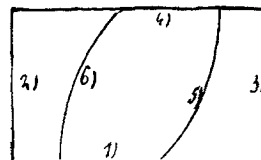


Fig. 3.a.

Il poliedro così definito (fig. 3.^a) ha i sette vertici:

$$V_1 \equiv (0, 0, 1) \quad \text{intersezione delle faccie} \quad 1) \ 2) \ 5)$$

$$V_2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 1) \ 5) \ 6)$$

$$V_3 \equiv (\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}) \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 1) \ 3) \ 6)$$

$$V_4 \equiv (\sqrt{3}, 1, 1) \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 3) \ 4) \ 6)$$

$$V_5 \equiv \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 4) \ 5) \ 6)$$

$$V_6 \equiv (0, 1, \sqrt{2}) \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 2) \ 4) \ 5)$$

$$V_\infty \equiv (0, 0, \infty) \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 1) \ 2) \ 3) \ 4).$$

Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e vi ha un'unica sostituzione che lo riporta in sè medesimo; questa è la ellittica a periodo 2:

$$z' = -z + (\sqrt{3} + i).$$

Se costruiamo la quaternaria corrispondente riproduttiva della forma

(*) Cfr. il § 13 della mia Memoria nel vol. 40 dei Math. Annalen.

$f = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$, troviamo per la sua espressione (*):

$$a) \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Essa appartiene al gruppo aritmetico G riproduttivo di f e quindi per generare G non bastano più, come nel caso precedente, le sole omologie armoniche, colle quali si compone soltanto un sottogruppo eccezionale d'indice 2 in G . Per sostituzioni generatrici di G conviene prendere le sei omologie armoniche corrispondenti alle riflessioni elementari da 1) a 6) (**) ed associare a queste la quaternaria a).

§ 5. La forma: $f = 5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma limitato dai quattro piani di riflessione:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \sqrt{5}, \quad 4) \quad \eta = 1,$$

togliamo le regioni interne alle due sfere di riflessione:

$$5) \quad \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6) \quad (\xi - \sqrt{5})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2.$$

(*) Osserviamo in generale (perchè un calcolo simile si presenterà in diversi esempi seguenti), che se p è impari, alla sostituzione ellittica

$$z' = -z + (\sqrt{p} + i),$$

corrisponde sulla quaternaria $f = px_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ la sostituzione riproduttiva a coefficienti interi

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -p & 1 & 1 - \frac{p+1}{2} & -\frac{p+1}{2} \\ p & -1 & \frac{p+1}{2} & 1 + \frac{p+1}{2} \end{vmatrix}.$$

(**) Omettiamo qui come in seguito di dare le espressioni effettive delle omologie armoniche elementari, che si costruiscono immediatamente facendo uso, come sopra, della formola (5) Nota (B).

Il poliedro risultante (fig. 4.^a) ha i sette vertici:

$V_1 \equiv (0, 0, 1)$	intersezione delle faccie	1) 2) 5)
$V_2 \equiv \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	"	1) 5) 6)
$V_3 \equiv (\sqrt{5}, 0, \sqrt{2})$	"	1) 3) 6)
$V_4 \equiv (\sqrt{5}, 1, 1)$	"	3) 4) 6)
$V_5 \equiv \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	"	4) 5) 6)
$V_6 \equiv (0, 1, \sqrt{2})$	"	2) 4) 5)
$V_\infty \equiv (0, 0, \infty)$	"	1) 2) 3) 4).

Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e la sola sostituzione:

$$a) \quad z' = -z + (\sqrt{5} + i),$$

lo trasforma in sè medesimo. La quaternaria corrispondente ha l'espressione (Cfr. la nota al numero precedente):

$$a) \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

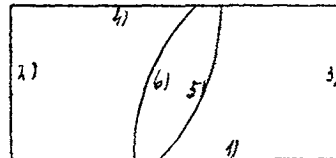


Fig. 4.^a.

Il gruppo G riproduttivo di $f = 5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ ammette dunque per sostituzioni generatrici le sei omologie armoniche corrispondenti alle riflessioni da 1) a 6), alle quali si associ la quaternaria a).

§ 6. La forma: $f = 6x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani di riflessione:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad 4) \quad \eta = 1,$$

tolgansi le regioni interne alle due sfere di riflessione:

$$5) \quad \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6) \quad \left(\xi - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}.$$

Il poliedro così definito (fig. 5.^a) ha i sette vertici:

$V_1 \equiv (0, 0, 1)$	intersezione delle faccie	1) 2) 5)
$V_2 \equiv \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	" "	1) 5) 6)
$V_3 \equiv \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	" "	1) 3) 6)
$V_4 \equiv \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	" "	3) 5) 6)
$V_5 \equiv \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	" "	3) 4) 5)
$V_6 \equiv (0, 1, \sqrt{2})$	" "	2) 4) 5)
$V_\infty \equiv (0, 0, \infty)$	" "	1) 2) 3) 4).

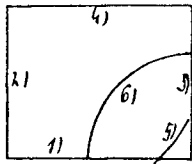


Fig. 5.^a.

Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e non vi ha alcuna trasformazione del poliedro in sè stesso. In questo caso adunque, come per $p=2$, bastano a generare il gruppo le sole omologie armoniche e precisamente le sei elementari che corrispondono alle riflessioni da 1) a 6).

§ 7. La forma: $f = 7x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \sqrt{7}, \quad 4) \quad \eta = 1,$$

togliamo le regioni interne alle quattro sfere di riflessione:

$$5) \quad \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6) \quad (\xi - \sqrt{7})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

$$7) \quad \left(\xi - \frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2}{7}$$

$$8) \quad \left(\xi - \frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{7}.$$

Il poliedro risultante (fig. 6.^a) ha i dieci vertici:

$V_1 \equiv (0, 0, 1)$	intersezione delle faccie	1) 2) 5)
$V_2 \equiv \left(\frac{\sqrt{7}}{3}, 0, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$	" "	1) 5) 7)
$V_3 \equiv \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$	" "	1) 6) 7)
$V_4 \equiv (\sqrt{7}, 0, \sqrt{2})$	" "	1) 3) 6)
$V_5 \equiv (\sqrt{7}, 1, 1)$	" "	3) 4) 6)
$V_6 \equiv \left(\frac{2\sqrt{7}}{3}, 1, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$	" "	4) 6) 8)
$V_7 \equiv \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$	" "	4) 5) 8)
$V_8 \equiv (0, 1, \sqrt{2})$	" "	2) 4) 5)
$V_9^* \equiv \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$	" "	5) 6) 7) 8)
$V_\infty \equiv (0, 0, \infty)$	" "	1) 2) 3) 4),

fra i quali i due ultimi singolari. Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e la sola sostituzione:

$$z' = -z + (\sqrt{7} + i),$$

lo cangia in sè medesimo. La quaternaria corrispondente:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & 1 & -3 & -4 \\ 7 & -1 & 4 & 5 \end{vmatrix},$$

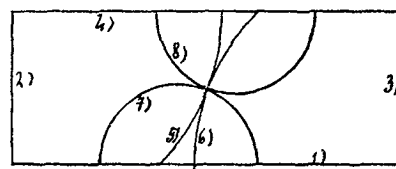


Fig. 6.^a.

insieme colle otto omologie armoniche, corrispondenti alle riflessioni da 1) a 8), dà il sistema di sostituzioni generatrici del gruppo.

Il poliedro del presente numero si è già presentato in altro mio lavoro nei « *Mathematische Annalen* » (Bd. 43, pag. 112).

§ 8. La forma: $f = 10x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad 4) \quad \eta = 1,$$

togliamo le regioni interne alle tre sfere di riflessione:

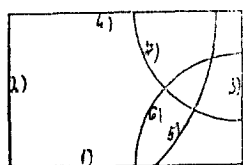


Fig. 7.a.

$$5) \quad \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6) \quad \left(\xi - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}$$

$$7) \quad \left(\xi - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}.$$

Il poliedro risultante (fig. 7.^a) ha i nove vertici:

$V_1 \equiv (0, 0, 1)$	intersezione delle faccie	1) 2) 5)
$V_2 \equiv \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$	" "	1) 5) 6)
$V_3 \equiv \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	" "	1) 3) 6)
$V_4 \equiv \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	" "	3) 6) 7)
$V_5 \equiv \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	" "	3) 4) 7)
$V_6 \equiv \left(\frac{4}{\sqrt{10}}, 1, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$	" "	4) 5) 7)
$V_7 \equiv (0, 1, \sqrt{2})$	" "	2) 4) 5)
$V_8 \equiv \left(\frac{4}{\sqrt{10}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\right)$	" "	5) 6) 7)
$V_\infty \equiv (0, 0, \infty)$	" "	1) 2) 3) 4).

Esso non è attraversato da alcuna sfera di riflessione, nè possiede trasformazioni in sè medesimo. Il gruppo G attuale si genera adunque colle sole omologie armoniche e precisamente colle sette elementari corrispondenti alle riflessioni da 1) a 7).

§ 9. La forma: $f = 15x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \sqrt{15}, \quad 4) \quad \eta = 1,$$

togliamo le regioni interne alle sei sfere di riflessione:

$$5) \quad \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6) \quad (\xi - \sqrt{15})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

$$7) \quad \left(\xi - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2}{3}$$

$$8) \quad \left(\xi - 2\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{3}$$

$$9) \quad \left(\xi - 3\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2}{5}$$

$$10) \quad \left(\xi - 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{5}.$$

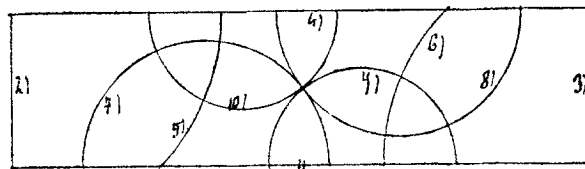


Fig. 8.^a.

Il poliedro risultante (fig. 8.^a) ha i quattordici vertici:

$$V_1 \equiv (0, 0, 1) \quad \text{intersezione delle faccie} \quad 1) \ 2) \ 5)$$

$$V_2 \equiv \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 1) \ 5) \ 7)$$

$$V_3 \equiv \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 1) \ 7) \ 9)$$

$$V_4 \equiv \left(2\sqrt{\frac{5}{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 1) \ 6) \ 9)$$

$$V_5 \equiv (\sqrt{15}, 0, \sqrt{2}) \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 1) \ 3) \ 6)$$

$V_6 \equiv (\sqrt{15}, 1, 1)$	intersezione delle faccie	3) 4) 6)
$V_7 \equiv \left(4\sqrt{\frac{3}{5}}, 1, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$	" "	4) 6) 8)
$V_8 \equiv \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$	" "	4) 8) 10)
$V_9 \equiv \left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	" "	4) 5) 10)
$V_{10} \equiv (0, 1, \sqrt{2})$	" "	2) 4) 5)
$V_{11} \equiv \left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$	" "	5) 7) 10)
$V_{12} \equiv \left(2\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$	" "	6) 8) 9)
$V_{13}^* \equiv \left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{1}{2}, 0\right)$	" "	7) 8) 9) 10)
$V_{\infty}^* \equiv (0, 0, \infty)$	" "	1) 2) 3) 4).

Notiamo che le faccie 2) 3) sono triangolari, le faccie 5) 6) pentagone, le faccie 1) 4) esagonali, mentre le rimanenti quattro 7) 8) 9) 10) sono quadrilateri. I due vertici singolari V_{13} , V_{∞} sono di diversa specie, onde si vede facilmente che la sola sostituzione:

$$z' = -z + (\sqrt{15} + i),$$

trasforma il poliedro in sè medesimo. A questa corrisponde la quaternaria:

$$a) \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -15 & 1 & -7 & -8 \\ 15 & -1 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

alla quale associando le dieci omologie armoniche elementari corrispondenti alle riflessioni da 1) a 10), si ha un sistema di sostituzioni generatrici del gruppo.

§ 10. Le forme quaternarie: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - px_4^2$.

Anche qui supporremo, come al n.° 1, che p sia un numero privo di fattori quadrati. Fondandoci al solito sui risultati dei §§ 1, 2 della Nota (B), troviamo che nel gruppo poliedrico corrispondente al gruppo aritmetico riproduttivo della forma si trovano le riflessioni seguenti:

$$z' = \frac{\sqrt{\lambda}(\alpha_1 + i\alpha_2)z_0 + i(\gamma_1\sqrt{\lambda} + \delta_1\sqrt{\tau})}{i(\gamma_1\sqrt{\lambda} - \delta_1\sqrt{\tau})z_0 + \sqrt{\lambda}(\alpha_1 - i\alpha_2)}, \quad (4)$$

dove

$$p = \lambda\tau$$

è una qualunque decomposizione di p in due fattori, $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \delta_1$ sono numeri interi, e il determinante della (4) è eguale a 1 ovvero a 2, cioè:

$$\lambda(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \gamma_1^2) - \tau\delta_1^2 = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}. \quad (5)$$

Contrariamente a quanto accadeva nel caso del n.° 1, troviamo qui un numero limitato di piani di riflessione e precisamente i quattro piani

$$\eta = 0, \quad \xi = 0, \quad \eta \pm \xi = 0.$$

Se γ_1, δ_1 non sono insieme nulli, abbiamo la sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{\alpha_2\sqrt{\lambda}}{\gamma_1\sqrt{\lambda} - \delta_1\sqrt{\tau}}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\alpha_1\sqrt{\lambda}}{\gamma_1\sqrt{\lambda} - \delta_1\sqrt{\tau}}\right)^2 + \zeta^2 = R^2,$$

essendo:

$$R = \frac{1}{\gamma_1\sqrt{\lambda} - \delta_1\sqrt{\tau}}, \quad \text{o} \quad R = \frac{\sqrt{2}}{\gamma_1\sqrt{\lambda} - \delta_1\sqrt{\tau}},$$

secondo che il determinante della (4) è 1, ovvero 2.

La ricerca dei poliedri fondamentali per le forme attuali risulta certo più complicata, in confronto dei casi precedenti, specialmente in quella parte ove si tratta di accertarsi che nessuna altra sfera di riflessione attraversa il poliedro ottenuto. Qui mi limiterò a trattare il solo caso $p=3$. I casi $p=2$, $p=5$, $p=10$ potrebbero trattarsi egualmente ma non possono dare alcun nuovo risultato, le forme corrispondenti essendo rispettivamente equivalenti a quelle dei n.° 3, 5, 8.

§ 11. La forma: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_4^2$.

Consideriamo lo spazio compreso al disopra del piano $\zeta = 0$ fra i due piani di riflessione:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \eta - \xi = 0,$$

nel triedro positivo degli assi coordinati, e le due sfere di riflessione consecutive col centro nell'origine:

$$3) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} \right)^2.$$

Se ne togliamo la regione interna alla sfera di riflessione:

$$5) \quad (\xi - \sqrt{3})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2,$$

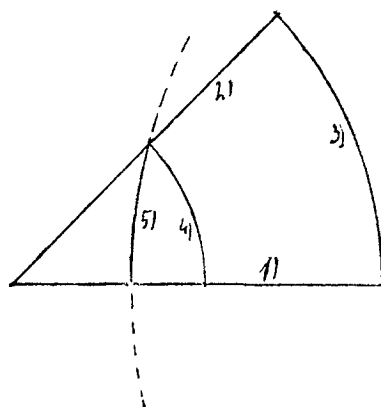


Fig. 9.a.

avremo definito un poliedro (fig. 9.a) coi sei vertici:

$V_1 \equiv (0, 0, 1)$	intersezione delle faccie	1) 2) 3)
$V_2 \equiv \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)$	" "	1) 2) 4)
$V_3 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3} + 1}, 0, \frac{1}{\sqrt{3} + 1}\right)$	" "	1) 4) 5)
$V_4 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	" "	1) 3) 5)
$V_5^* \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3} + 1}, \frac{1}{\sqrt{3} + 1}, 0\right)$	" "	2) 4) 5)
$V_6 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	" "	2) 3) 5),

dei quali uno soltanto, il vertice V_5 , è singolare.

Per dimostrare che nessuna sfera di riflessione attraversa questo poliedro, sono necessari alcuni calcoli, che ci limitiamo ad indicare. Le sfere di riflessione del nostro gruppo si dividono, secondo il numero precedente, nei tre

tipi seguenti:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \left(\xi - \frac{\alpha_2}{\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{3}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{3}} \right)^2 + \zeta^2 &= \frac{1}{(\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{3})^2} \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \gamma_1^2 - 3\delta_1^2 &= 1 \end{aligned} \right. \\ \text{II)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \left(\xi - \frac{\alpha_2}{\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{3}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{3}} \right)^2 + \zeta^2 &= \frac{2}{(\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{3})^2} \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \gamma_1^2 - 3\delta_1^2 &= 2 \end{aligned} \right. \\ \text{III)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \left(\xi - \frac{\alpha_2 \sqrt{3}}{\gamma_1 \sqrt{3} - \delta_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{\alpha_1 \sqrt{3}}{\gamma_1 \sqrt{3} - \delta_1} \right)^2 + \zeta^2 &= \frac{2}{(\gamma_1 \sqrt{3} - \delta_1)^2} \\ 3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \gamma_1^2) - \delta_1^2 &= 2. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Ora si osservi in primo luogo che una sfera di riflessione non può attraversare il poliedro lasciando nel suo interno il vertice V_1 o il vertice V_2 . E invero, se per es. una sfera del tipo I) lascia al suo interno V_1 , si avrà:

$$\frac{\alpha_1^2}{(\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{3})^2} + \frac{\alpha_2^2}{(\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{3})^2} + 1 < \frac{1}{(\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{3})^2},$$

onde:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

e la sfera, avendo il centro nell'origine, comprenderebbe nel suo interno tutta la sfera 3), indi il poliedro. Similmente si dimostra la cosa per le sfere degli altri due tipi e pel vertice V_2 . Dopo ciò si vede facilmente che la sfera supposta traverserebbe una almeno delle due faccie 1) o 2). Ora se si tien conto dei diversi casi possibili, avendo riguardo agli angoli sotto cui due sfere di riflessione possono incontrarsi (*), si vede che una tale sfera non esiste.

(*) Se si considerano per es. due sfere l'una del tipo I):

$$\left(\xi - \frac{\alpha_2}{\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{3}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{3}} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{(\gamma_1 - \delta_1 \sqrt{3})^2},$$

l'altra del tipo II):

$$\left(\xi - \frac{a_2}{c_1 - d_1 \sqrt{3}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1}{c_1 - d_1 \sqrt{3}} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{(c_1 - d_1 \sqrt{3})^2},$$

e si suppone che s'incontrino, per l'angolo A d'intersezione abbiamo la formola:

$$\cos A = \frac{3d_1 \delta_1 - c_1 \gamma_1}{\sqrt{2}},$$

Con maggiore facilità si dimostra che l'attuale poliedro non ammette alcuna trasformazione in sè stesso. Il gruppo aritmetico riproduttivo della forma $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_4^2$ si genera adunque con cinque omologie armoniche elementari.

§ 12. Le forme quaternarie: $px_1^2 + qx_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Qui supponiamo per brevità che p, q siano numeri primi diversi. Per le riflessioni del gruppo poliedrico corrispondente troviamo, col solito processo, la tabella seguente:

$$\begin{aligned}
 \text{Tipo I)} & \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{(\alpha_1 \sqrt{q} + i \alpha_2 \sqrt{p}) z_0 + im}{in z_0 + (\alpha_1 \sqrt{q} - i \alpha_2 \sqrt{p})} \\ q \alpha_1^2 + p \alpha_2^2 + mn &= \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}; & m \equiv n \pmod{2} \end{aligned} \right. \\
 \text{Tipo II)} & \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{(\alpha_1 + i \alpha_2 \sqrt{pq}) z_0 + i \sqrt{q} \cdot m}{i \sqrt{q} \cdot n z_0 + (\alpha_1 - i \alpha_2 \sqrt{pq})} \\ \alpha_1^2 + pq \alpha_2^2 + qmn &= \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}; & m \equiv n \pmod{2} \end{aligned} \right. \\
 \text{Tipo III)} & \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{(\alpha_1 \sqrt{p} + i \alpha_2 \sqrt{q}) z_0 + i \sqrt{pq} \cdot m}{i \sqrt{pq} \cdot n z_0 + (\alpha_1 \sqrt{p} - i \alpha_2 \sqrt{q})} \\ p \alpha_1^2 + q \alpha_2^2 + pqmn &= \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}; & m \equiv n \pmod{2} \end{aligned} \right. \\
 \text{Tipo IV)} & \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{(\alpha_1 \sqrt{pq} + i \alpha_2) z_0 + i \sqrt{p} \cdot m}{i \sqrt{p} \cdot n z_0 + (\alpha_1 \sqrt{pq} - i \alpha_2)} \\ pq \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + pmn &= \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}; & m \equiv n \pmod{2}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Se nessuno dei due numeri primi p, q è uguale a 2, si hanno i soli piani di riflessione:

$$\xi = r\sqrt{p}, \quad \eta = r\sqrt{q},$$

e quindi si hanno le due sole possibilità:

$$3d_1 \delta_1 - c_1 \gamma_1 = 0, \quad \text{o} \quad 3d_1 \delta_1 - c_1 \gamma_1 = \pm 1,$$

cioè l'angolo A può essere di 90° o di 45° . Considerazioni simili valgono per le possibili combinazioni fra le sfere dei tre tipi.

con r intero qualunque. Ma se per es. $p=2$, indi $q>2$, i piani di riflessione sono:

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad \eta = r\sqrt{q}.$$

Le sfere di riflessione hanno le rispettive equazioni:

$$\text{Tipo I)} \quad \left(\xi - \frac{\alpha_2\sqrt{p}}{n}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\alpha_1\sqrt{q}}{n}\right)^2 + \zeta^2 = R^2; \quad R = \frac{1}{n}, \text{ o } R = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

$$\text{Tipo II)} \quad \left(\xi - \frac{\alpha_2\sqrt{p}}{n}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\alpha_1}{n\sqrt{q}}\right)^2 + \zeta^2 = R^2; \quad R = \frac{1}{n\sqrt{q}}, \text{ o } R = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{q}}$$

$$\text{Tipo III)} \quad \left(\xi - \frac{\alpha_2}{n\sqrt{p}}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\alpha_1}{n\sqrt{q}}\right)^2 + \zeta^2 = R^2; \quad R = \frac{1}{n\sqrt{pq}}, \text{ o } R = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{pq}}$$

$$\text{Tipo IV)} \quad \left(\xi - \frac{\alpha_2}{n\sqrt{p}}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\alpha_1\sqrt{q}}{n}\right)^2 + \zeta^2 = R^2; \quad R = \frac{1}{n\sqrt{p}}, \text{ o } R = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{p}},$$

valendo ogni volta per R la prima o la seconda formola secondo che il determinante della corrispondente sostituzione è $=1$, ovvero $=2$.

§ 13. La forma: $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani di riflessione:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 4) \quad \eta = \sqrt{3},$$

togliamo le regioni interne alle due sfere di riflessione:

$$5) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$6) \quad \xi^2 + (\eta - \sqrt{3})^2 + \zeta^2 = 2.$$

Il poliedro così definito (fig. 10.^a) ha i sette vertici:

$$V_1 \equiv (0, 0, 1) \quad \text{intersezione delle faccie } 1) \ 2) \ 5)$$

$$V_2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 1) \ 3) \ 5)$$

$$V_3 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 3) \ 5) \ 6)$$

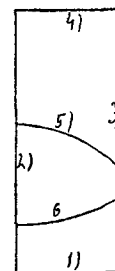


Fig. 10.^a.

$$\begin{aligned}
V_4 &\equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \text{ intersezione delle faccie } 3) \ 4) \ 6) \\
V_5 &\equiv (0, \sqrt{3}, \sqrt{2}) \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad 2) \ 4) \ 6) \\
V_6 &\equiv \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad 2) \ 5) \ 6) \\
V_\infty &\equiv (0, 0, \infty) \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad \text{''} \quad \quad \quad 1) \ 2) \ 3) \ 4).
\end{aligned}$$

Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e le coordinate dei vertici essendo tutte differenti, non vi ha alcuna trasformazione del poliedro in sè medesimo. Dunque il gruppo G riproduttivo della forma si genera con sei omologie armoniche elementari.

Qui è interessante paragonare il poliedro fondamentale ora ottenuto per la forma:

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - x_4^2,$$

coll'altro del n.º 6 per la forma di egual determinante:

$$6x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

I due poliedri sono essenzialmente diversi, poichè nell'attuale abbiamo due faccie triangolari e quattro quadrangolari, mentre in quello del n.º 6 si presentano tre faccie triangolari, due quadrangolari ed una pentagona. Le due forme sopra scritte non sono quindi fra loro equivalenti.

§ 14. La forma: $f = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani di riflessione:

$$1) \ \eta = 0, \quad 2) \ \xi = 0, \quad 3) \ \xi = \sqrt{3}, \quad 4) \ \eta = \sqrt{5},$$

togliamo le regioni interne alle sei sfere di riflessione:

$$\begin{aligned}
5) \quad &(\xi - \sqrt{3})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2 \\
6) \quad &\xi^2 + (\eta - \sqrt{5})^2 + \zeta^2 = 2 \\
7) \quad &\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \\
8) \quad &(\xi - \sqrt{3})^2 + (\eta - \sqrt{5})^2 + \zeta^2 = 1 \\
9) \quad &\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{15} \\
10) \quad &\left(\xi - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

Il poliedro che ne risulta (fig. 11.^a), non attraversato da alcuna altra sfera di riflessione, ha i quattordici vertici:

$V_1 \equiv (0, 0, 1)$	intersezione delle faccie	1) 2) 7)
$V_2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	" "	1) 5) 7)
$V_3 \equiv (\sqrt{3}, 0, \sqrt{2})$	" "	1) 3) 5)
$V_4 \equiv \left(\sqrt{3}, \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	" "	3) 5) 8)
$V_5 \equiv (\sqrt{3}, \sqrt{5}, 1)$	" "	3) 4) 8)
$V_6 \equiv \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{5}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	" "	4) 6) 8)
$V_7 \equiv (0, \sqrt{5}, \sqrt{2})$	" "	2) 4) 6)
$V_8 \equiv \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	" "	2) 6) 7)
$V_9^* \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$	" "	5) 6) 9) 10)
$V_{10} \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{3}\right)$	" "	5) 7) 9)
$V_{11} \equiv \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$	" "	5) 8) 10)
$V_{12} \equiv \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{3}\right)$	" "	6) 8) 10)
$V_{13} \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$	" "	6) 7) 9)
$V_\infty \equiv (0, 0, \infty)$	" "	1) 2) 3) 4).

L'unica trasformazione del poliedro in sè medesimo è data da

$$z' = -z + (\sqrt{3} + i\sqrt{5}),$$

cui corrisponde la quaternaria:

$$a) \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Il gruppo G riproduttivo della forma si genera mediante la a), combinata con dieci omologie armoniche elementari.

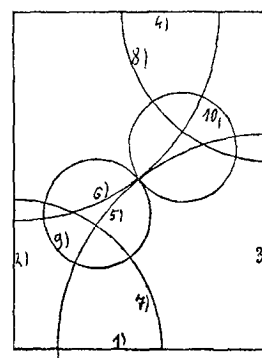


Fig. 11.^a.

§ 15. Confronto fra le due forme: $\begin{cases} f = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - x_4^2, \\ f' = 15x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2. \end{cases}$

Particolarmente interessante è il confronto fra il poliedro del numero precedente e quello del n.º 9. Essi mostrano lo stesso numero e la medesima disposizione di faccie omologhe, onde nasce la questione se si possono trasformare l'uno nell'altro, se cioè sono sovrapponibili nel senso della metrica non-euclidea. Ciò ha luogo infatti e con semplici considerazioni ausiliarie, che qui sopprimiamo, si trova che la sostituzione:

$$z' = \frac{(\sqrt{15} + i)z - 2i\sqrt{3}}{2z - (\sqrt{3} + i\sqrt{5})}, \quad (b)$$

trasforma il primo poliedro nel secondo (*). Se per maggiore chiarezza indichiamo cogli accenti le quantità che si riferiscono al poliedro del n.º 9, abbiamo che la (b) sovrappone i due poliedri colla seguente corrispondenza delle faccie:

$$\begin{pmatrix} 10', 7', 8', 9', 4', 1', 5', 6', 2', 3' \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \end{pmatrix}.$$

Un secondo modo di trasformazione si otterrebbe naturalmente, combinandovi la trasformazione del poliedro in sè medesimo.

Risulta di qui che i due gruppi aritmetici riproduttivi delle due forme f, f' sono simili, cioè esiste una e quindi infinite sostituzioni, che trasformano l'un gruppo nell'altro. Se una tale sostituzione, ridotta a determinante 1, fosse a coefficienti interi, le due forme f, f' sarebbero aritmeticamente equivalenti.

Dimostreremo che ciò non ha luogo, onde si vede già da questo esempio che per l'equivalenza di due forme quaternarie è bensì condizione necessaria ma non sufficiente l'equivalenza dei due rispettivi poliedri fondamentali.

Supponiamo infatti che le due forme:

$$\begin{aligned} f &= 3y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 \\ f' &= 15x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2, \end{aligned}$$

siano aritmeticamente equivalenti. Fra le infinite sostituzioni che trasformano

(*) Si potrebbe constatare lo stesso fatto calcolando, colle note formole della rappresentazione di POINCARÉ, le lunghezze non-euclidee dei vari spigoli.

l'una nell'altra ve ne sarà certamente una che trasforma le omologie armoniche elementari dell'una in quelle dell'altra e quindi necessariamente l'omologia 1') nell'omologia 5) o nella 6) (*). Ma per le espressioni effettive di queste omologie troviamo:

$$1') \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 5) \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & -10 & 2 & 5 \end{vmatrix},$$

e i rispettivi piani e centri di omologia sono:

$$\begin{aligned} \text{per la 1)} & \begin{cases} \text{piano} & x_2 = 0 \\ \text{centro} & (0, 1, 0, 0) \end{cases} \\ \text{per la 5)} & \begin{cases} \text{piano} & 3y_1 + y_4 = 0 \\ \text{centro} & (1, 0, 0, -1) \end{cases} \\ \text{per la 6)} & \begin{cases} \text{piano} & -5y_2 + y_3 + 2y_4 = 0 \\ \text{centro} & (0, -1, 1, -2). \end{cases} \end{aligned}$$

Ora se la sostituzione a coefficienti interi

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ y_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

trasformasse f in f' e cangiasse il centro della 1') in quello delle 5), avremmo la proporzione:

$$a_{12} : a_{22} : a_{32} : a_{42} = 1 : 0 : 0 : -1,$$

e invece l'altra:

$$a_{12} : a_{22} : a_{32} : a_{42} = 0 : -1 : 1 : -2,$$

se lo trasformasse in quello della 6). Ma poichè, il determinante della sostituzione (c) essendo l'unità, a_{12} , a_{22} , a_{32} , a_{42} non possono avere un fattore comune, ne risulterebbe nel primo caso:

$$a_{12} = \pm 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{42} = \mp 1,$$

(*) Il poliedro del n.º 9 ha invece due sole faccie esagonali 1') 4') e quello del n.º 14 le due 5) 6).

e invece nel secondo:

$$a_{12} = 0, \quad a_{22} = \mp 1, \quad a_{32} = \pm 1, \quad a_{42} = \mp 2.$$

Ambedue le volte risulta:

$$3a_{12}^2 + 5a_{22}^2 + a_{32}^2 - a_{42}^2 = 2,$$

mentre, perchè f si trasformi in f' , è necessario che si abbia:

$$3a_{12}^2 + 5a_{22}^2 + a_{32}^2 - a_{42}^2 = 1.$$

Dunque le due forme f, f' non sono equivalenti.

Appoggiandoci sulle medesime considerazioni dei piani e centri di omologia corrispondenti e fissando ad esempio che la corrispondenza delle faccie dei due poliedri sia quella sopra segnata, troviamo la seguente sostituzione a determinante 4:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -15 & 2 & -2 & -5 \end{vmatrix}.$$

che trasforma f in $2f'$. Basta dividere simultaneamente i sedici coefficienti di questa sostituzione per $\sqrt{2}$ per avere una delle cercate sostituzioni a determinante 1 che trasformano f in f' ed il gruppo aritmetico riproduttivo di f in quello di f' .

Ho insistito su questo esempio perchè è evidente che ogniquale volta di due forme di egual determinante si conoscono i poliedri fondamentali si potrà decidere, con calcoli simili a quelli ora eseguiti, della equivalenza delle due forme.

§ 16. Le forme quaternarie: $p(x_1^2 + x_2^2) + rx_3^2 - x_4^2$.

Supponiamo che p, r siano numeri primi diversi. Dalla discussione al § 4 della Nota (B) si deduce che nel gruppo esistono le riflessioni dei tipi seguenti:

$$\text{Tipo I) } \begin{cases} z' = \frac{(x_1 + ix_2)z_0 + i\sqrt{p}(\gamma_1\sqrt{r} + \delta_1)}{i\sqrt{p}(\gamma_1\sqrt{r} - \delta_1)z_0 + (x_1 - ix_2)} \\ x_1^2 + x_2^2 + pr\gamma_1^2 - p\delta_1^2 = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Tipo II)} & \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)\sqrt{p}z_0 + i(\gamma_1\sqrt{r} + \delta_1)}{i(\gamma_1\sqrt{r} - \delta_1)z_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2)\sqrt{p}} \\ p(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + r\gamma_1^2 - \delta_1^2 &= \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \end{aligned} \right. \\ \text{Tipo III)} & \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)\sqrt{r}z_0 + i\sqrt{p}(\gamma_1 + \delta_1\sqrt{r})}{i\sqrt{p}(\gamma_1 - \delta_1\sqrt{r})z_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2)\sqrt{r}} \\ r(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + p\gamma_1^2 - p\delta_1^2 &= \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \end{aligned} \right. \\ \text{Tipo IV)} & \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)\sqrt{pr}z_0 + i(\gamma_1 + \delta_1\sqrt{r})}{i(\gamma_1 - \delta_1\sqrt{r})z_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2)\sqrt{pr}} \\ pr(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \gamma_1^2 - r\delta_1^2 &= \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Qui non esistono che i quattro piani di riflessione:

$$\eta = 0, \quad \xi = 0, \quad \xi \pm \eta = 0,$$

e le equazioni delle sfere di riflessione si scrivono del tutto analogamente come negli altri casi superiormente trattati.

Scegliamo come esempi particolarmente semplici ed interessanti le due forme:

$$3(x_1^2 + x_2^2) + 2x_3^2 - x_4^2$$

$$3(x_1^2 + x_2^2) + 5x_3^2 - x_4^2;$$

esse non sono suscettibili di rappresentare lo zero e in conseguenza i loro poliedri fondamentali non presentano vertici singolari [cfr. (A) §§ 1, 2].

Per la prima forma consideriamo il poliedro seguente. Dallo spazio compreso al disopra del piano $\zeta = 0$ fra i due piani:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \eta - \xi = 0,$$

e le due sfere consecutive col centro nell'origine:

$$3) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{2} - 1)^2,$$

togliamo le regioni interne alle due sfere:

$$5) \quad (\xi - \sqrt{3})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6) \quad \left(\xi - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)} \right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)} \right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3}} \right)^2.$$

Similmente per la seconda forma dallo spazio compreso fra i due piani:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \eta - \xi = 0,$$

e le due sfere concentriche consecutive:

$$3) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{5} - 2)^2,$$

togliamo le regioni interne alle tre sfere:

$$5) \quad (\xi - \sqrt{3})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

$$6) \quad \left(\xi - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3} + \sqrt{15}} \right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2}{(2\sqrt{3} + \sqrt{15})^2}$$

$$7) \quad \left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{5}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{5}} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{(3 + \sqrt{5})^2}.$$

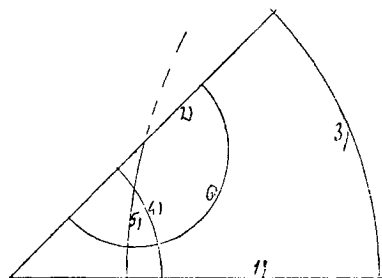


Fig. 12.a.

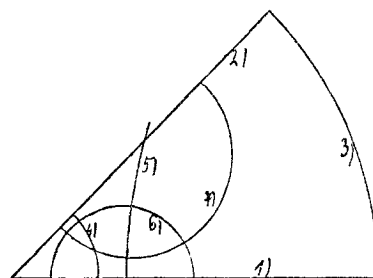


Fig. 13.a.

I poliedri così definiti (fig.^e 12.^a e 13.^a) sono racchiusi da sfere e piani di riflessione e non presentano alcun vertice singolare. Essi non sono più attraversati da alcuna sfera di riflessione, come si dimostra con calcoli alquanto prolissi del tutto simili a quelli indicati al n.^o 10. Il primo poliedro ammette un'unica trasformazione in sè medesimo, data dalla sostituzione ellittica a periodo 2:

$$\alpha) \quad z' = \frac{(\sqrt{2} + i)z - \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)z - (\sqrt{2} + i)},$$

il secondo nessuna trasformazione. Alla α) corrisponde una sostituzione quaternaria riproduttiva della forma $3(x_1^2 + x_2^2) + 2x_3^2 - x_4^2$ con coefficienti irrazionali (contenenti l'irrazionalità $\sqrt{3}$), che non appartiene dunque al gruppo

aritmetico. I due gruppi G riproduttivi delle forme $3(x_1^2 + x_2^2) + 2x_3^2 - x_4^2$, $3(x_1^2 + x_2^2) + 5x_3^2 - x_4^2$ si generano adunque con pure omologie armoniche, il primo con sei, il secondo con sette omologie elementari. Nel primo gruppo abbiamo un primo esempio della circostanza indicata nella Prefazione; esso è permutabile con una sostituzione fuori del gruppo.

§ 17. Le forme quaternarie: $px_2^2 + qx_3^2 - x_1x_4$.

Le forme che andiamo ora a considerare possono bensì ridursi colla sostituzione:

$$x_1 = y_4 + y_1,$$

$$x_4 = y_4 - y_1,$$

a quelle studiate al n.º 12; però la sostituzione da eseguirsi è a determinante 2. La costituzione del loro gruppo aritmetico riproduttivo è per molti rispetti più semplice di quella del gruppo omologo per le forme ora ricordate.

Nel caso $p = 1$ (o $q = 1$) i gruppi poliedrici, cui danno luogo, coincidono precisamente come ora si vedrà, coi gruppi da me studiati nei vol.º 40 e 42 dei « *Mathematische Annalen* ». Quando $p > 1$, $q > 1$ otteniamo dei nuovi gruppi più generali interessanti per la forma delle loro sostituzioni; di questi determineremo in alcuni casi più semplici i poliedri fondamentali. Supporremo per brevità della ricerca che p, q siano numeri primi differenti, ma s'intenderà subito che col medesimo metodo potrebbe trattarsi il caso di p, q numeri composti. Anche qui considereremo il gruppo aritmetico completo riproduttivo delle forme in questione; soltanto siccome nel gruppo totale è sempre evidentemente contenuta la sostituzione:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

e le sostituzioni coll'ultimo coefficiente positivo formano un sottogruppo eccezionale d'indice 2 nel gruppo stesso, ci limiteremo a considerare questo sottogruppo che indicheremo con G .

A fondamento delle nostre ricerche porremo il risultato stabilito nel 42º vol. dei « *Mathematische Annalen* » (pag. 51 s. s.), secondo il quale alle sostituzioni

a determinante 1 del gruppo *algebrico* riproduttivo di $f = px_2^2 + qx_3^2 - x_1x_4$ si può dare la forma:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 + q\alpha_2^2, & 2\sqrt{p}(\alpha_1\gamma_1 + q\alpha_2\gamma_2), & 2q(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1), & \gamma_1^2 + q\gamma_2^2 \\ \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\sqrt{p}}, & \alpha_1\delta_1 + \beta_1\gamma_1 + q(\alpha_2\delta_2 + \beta_2\gamma_2), & \frac{2q}{\sqrt{p}}(\alpha_1\delta_2 - \beta_2\gamma_1), & \frac{\gamma_1\delta_1 + q\gamma_2\delta_2}{\sqrt{p}} \\ \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2, & 2\sqrt{p}(\alpha_2\delta_1 - \beta_2\gamma_1), & \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 + q(\alpha_2\delta_2 - \beta_2\gamma_2), & \gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2 \\ \beta_1^2 + q\beta_2^2, & 2\sqrt{p}(\beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2), & 2q(\beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1), & \delta_1^2 + q\delta_2^2 \end{vmatrix},$$

essendo $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \delta_1, \delta_2$ costanti reali legate dalla relazione complessa:

$$(\alpha_1 + i\sqrt{q}\alpha_2)(\delta_1 + i\sqrt{q}\delta_2) - (\beta_1 + i\sqrt{q}\beta_2)(\gamma_1 + i\sqrt{q}\gamma_2) = \pm 1,$$

che si scinde nelle due reali:

$$\begin{cases} \alpha_1\delta_1 - q\alpha_2\delta_2 - \beta_1\gamma_1 + q\beta_2\gamma_2 = \pm 1 \\ \alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1 = \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1. \end{cases}$$

Le sostituzioni a determinante -1 hanno la stessa forma, salvo che debbono cambiarsi i segni degli elementi della terza linea.

Ora sarebbe assai complicata la ricerca diretta dei valori che debbono darsi alle costanti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ affinchè la sostituzione (C) abbia i coefficienti interi, cioè appartenga a G . Ma se anche qui ci limitiamo alla ricerca delle omologie armoniche in G , la questione si risolverà con grande semplicità e dalla conoscenza di queste omologie armoniche potremo poi facilmente risalire nei casi più semplici a quella dell'intero gruppo.

Ricordiamo ancora che le sostituzioni del gruppo poliedrico Γ corrispondenti a G hanno la forma:

$$z' = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2\sqrt{q})z + (\beta_1 + i\beta_2\sqrt{q})}{(\gamma_1 + i\gamma_2\sqrt{q})z + (\delta_1 + i\delta_2\sqrt{q})},$$

se corrispondono a collineazioni di G a determinante $+1$ e invece l'altra:

$$z' = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2\sqrt{q})z_0 + (\beta_1 + i\beta_2\sqrt{q})}{(\gamma_1 + i\gamma_2\sqrt{q})z_0 + (\delta_1 + i\delta_2\sqrt{q})},$$

se le collineazioni di G corrispondenti hanno il determinante -1 .

§ 18. Le omologie armoniche in G (*).

Alle omologie armoniche di 1.^a categoria in G corrispondono le riflessioni proprie in Γ ; queste si ottengono tutte ponendo:

$$\delta_1 = -\alpha_1, \quad \delta_2 = \alpha_2, \quad \beta_2 = \gamma_2 = 0,$$

essendo:

$$\alpha_1^2 + q\alpha_2^2 + \beta_1\gamma_1 = 1, \quad (6)$$

e la corrispondente collineazione (C) ha quindi la forma seguente:

$$(C^*) \begin{vmatrix} 1 - \beta_1\gamma_1, & 2\sqrt{p}\alpha_1\gamma_1, & -2q\alpha_2\gamma_1, & \gamma_1^2 \\ \frac{\alpha_1\beta_1}{\sqrt{p}}, & 1 - 2\alpha_1^2, & \frac{2q}{\sqrt{p}}\alpha_1\alpha_2, & -\frac{\alpha_1\gamma_1}{\sqrt{p}} \\ -\alpha_2\beta_1, & 2\sqrt{p}\alpha_1\alpha_2, & 1 - 2q\alpha_2^2, & \alpha_2\gamma_1 \\ \beta_1^2, & -2\sqrt{p}\alpha_1\beta_1, & 2q\alpha_2\beta_1, & 1 - \beta_1\gamma_1 \end{vmatrix}.$$

La questione che dobbiamo risolvere è adunque quella dei valori da attribuirsi alle costanti $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma_1$, legate dalla (6), affinchè i sedici coefficienti dell'omologia armonica (C^*) riescano interi. È manifesto intanto che dovranno essere interi i dieci numeri seguenti:

$$\left. \begin{aligned} & \beta_1^2, \quad \gamma_1^2, \quad \beta_1\gamma_1, \quad 2\alpha_1^2, \quad 2q\alpha_2^2, \quad 2\alpha_1\alpha_2\sqrt{p}, \quad \alpha_2\beta_1, \\ & \alpha_2\gamma_1, \quad \alpha_1\beta_1\sqrt{p}, \quad \alpha_1\gamma_1\sqrt{p}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Indicando con

$$b_1^2, \quad c_1^2, \quad a_1^2, \quad a_2^2,$$

i massimi fattori quadrati contenuti rispettivamente nei numeri

$$\beta_1^2, \quad \gamma_1^2, \quad 2\alpha_1^2, \quad 2q\alpha_2^2,$$

potremo porre:

$$\beta_1 = b_1\sqrt{r}, \quad \gamma_1 = c_1\sqrt{r'}, \quad \alpha_1\sqrt{2} = a_1\sqrt{s}, \quad \alpha_2\sqrt{2}q = a_2\sqrt{u},$$

i numeri interi positivi r, r', s, u essendo privi di fattori quadrati. Poichè $\beta_1\gamma_1 = b_1c_1\sqrt{rr'}$ deve essere intero, è intanto manifestamente $r' = r$ e perchè

(*) Come nella Memoria (A) ricerchiamo fra le omologie armoniche solo quelle di 1.^a categoria, il cui centro d'omologia cioè è esterno alle quadriche, perchè a questa soltanto corrispondono riflessioni proprie in Γ . [Cfr. (A) § 1.]

i numeri (7) riescano interi, tali dovranno essere i tre numeri

$$\sqrt{2prs}, \quad \sqrt{2qru}, \quad \sqrt{pqsu}. \quad (8)$$

Supponiamo dapprima che ambedue i numeri primi p, q siano diversi da 2. Allora perchè $\sqrt{2prs}$ sia intero, dovrà uno dei numeri r, s essere pari e l'altro impari, altrimenti rimarrebbe nel detto numero l'irrazionalità $\sqrt{2}$. Siccome poi la relazione (6) si converte nell'altra:

$$sa_1^2 + ua_2^2 + 2rb_1c_1 = 2,$$

è chiaro che i tre numeri r, s, u non potranno ammettere alcun divisore comune.

§ 19. Caso di r impari, s pari.

In questo caso perchè il secondo dei numeri (8) sia intero, dovrà anche u essere pari; poniamo dunque:

$$s = 2s', \quad u = 2u',$$

e i numeri

$$\sqrt{prs'}, \quad \sqrt{qru'}, \quad (9)$$

dovranno essere interi. Ne segue che p dividerà r ovvero s' e nel primo caso sarà:

$$A) \quad r = ps',$$

nel secondo

$$B) \quad s' = pr.$$

Caso A). Perchè il secondo dei numeri (9) sia intero occorre che anche u' sia divisibile per p ; poniamo in conseguenza

$$r = ps', \quad u' = pu'',$$

e il numero

$$\sqrt{qs'u''},$$

sarà intero. Quindi, essendo s', u'' primi fra loro, avremo una delle seguenti possibilità:

$$A_1) \quad s' = q, \quad u'' = 1$$

$$A_2) \quad s' = 1, \quad u'' = q.$$

Conseguentemente avremo:

$$\text{nel caso } A_1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = a_1, \quad \alpha_2 = a_2 \sqrt{p}, \quad \beta_1 = b_1 \sqrt{p}, \quad \gamma_1 = c_1 \sqrt{p} \\ a_1^2 + p q a_2^2 + p b_1 c_1 = 1, \end{array} \right.$$

e invece:

$$\text{nel caso } A_2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = a_1 \sqrt{q}, \quad \alpha_2 = a_2 \sqrt{\frac{p}{q}}, \quad \beta_1 = b_1 \sqrt{q p}, \quad \gamma_1 = c_1 \sqrt{p q}, \\ q a_1^2 + p a_2^2 + p q b_1 c_1 = 1, \end{array} \right.$$

e in ambedue i casi si riscontrerà subito che i sedici coefficienti della (C^*) riescono appunto numeri interi.

Caso B). Una discussione del tutto simile porta a suddividere i due sottocasi:

$$\begin{aligned} B_1) & \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = a_1 \sqrt{p}, \quad \alpha_2 = a_2, \quad \beta_1 = b_1, \quad \gamma_1 = c_1 \\ p a_1^2 + q a_2^2 + b_1 c_1 = 1 \end{array} \right. \\ B_2) & \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = a_1 \sqrt{p q}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{\sqrt{q}}, \quad \beta_1 = b_1 \sqrt{q}, \quad \gamma_1 = c_1 \sqrt{q} \\ p q a_1^2 + a_2^2 + q b_1 c_1 = 1. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ed anche qui la sostituzione corrispondente (C^*) avrà ogni volta coefficienti interi.

§ 20. Caso di r pari, s impari.

Ponendo $r = 2r'$, dovranno i numeri

$$\sqrt{p r' s}, \quad \sqrt{q r u},$$

risultare interi. Il numero p dovrà quindi dividere uno ed uno solo dei due numeri r' , s e similmente q dovrà dividere uno ed uno solo dei due numeri r' , u . Siamo quindi condotti anche qui a distinguere quattro sottocasi che riassumiamo nella tabella seguente:

$$\begin{aligned} (C_1) & \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \sqrt{2} = a_1, \quad \alpha_2 \sqrt{2} = a_2 \sqrt{p}, \quad \beta_1 = b_1 \sqrt{2 p}, \quad \gamma_1 = c_1 \sqrt{2 p} \\ a_1^2 + p q a_2^2 + 4 p b_1 c_1 = 2 \end{array} \right. \\ (C_2) & \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \sqrt{2} = a_1 \sqrt{q}, \quad \alpha_2 \sqrt{2 q} = a_2 \sqrt{p}, \quad \beta_1 = b_1 \sqrt{2 p q}, \quad \gamma_1 = c_1 \sqrt{2 p q} \\ q a_1^2 + p a_2^2 + 4 p q b_1 c_1 = 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D_1) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \sqrt{2} = a_1 \sqrt{p}, \quad \alpha_2 \sqrt{2} = a_2, \quad \beta_1 = b_1 \sqrt{2}, \quad \gamma_1 = c_1 \sqrt{2} \\ pa_1^2 + a_2^2 + 4b_1 c_1 = 2 \end{array} \right. \\
(D_2) \left\{ \begin{array}{l} a_1 \sqrt{2} = a_1 \sqrt{pq}, \quad \alpha_2 \sqrt{2q} = a_2, \quad \beta_1 = b_1 \sqrt{2q}, \quad \gamma_1 = c_1 \sqrt{2q} \\ pq a_1^2 + a_2^2 + 4q b_1 c_1 = 2. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Si verificherà subito anche qui che i coefficienti della corrispondente (C^*) saranno in tutti quattro i casi numeri interi.

È importante osservare che le relazioni cui debbono soddisfare nei quattro casi a_1, a_2, b_1, c_1 sono possibili soltanto quando sia $pq \equiv 1 \pmod{4}$, cioè $p \equiv q \pmod{3}$.

§ 21. Le riflessioni in Γ .

Dopo i risultati ottenuti nei due numeri precedenti possiamo ora scrivere le espressioni delle riflessioni contenute nel gruppo poliedrico Γ isomorfo al gruppo quaternario G . Esse si distinguono in otto tipi, provenienti i primi quattro dai casi considerati al n.º 18, gli altri quattro da quelli del n.º 19. Queste ultime esisteranno soltanto quando sia

$$p \equiv q \pmod{4}.$$

Diamo senz'altro la tabella degli otto tipi di riflessioni colle equazioni delle rispettive sfere:

$$\begin{aligned}
\text{Tipo I)} \left\{ \begin{array}{l} z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{pq}) z_0 + b_1 \sqrt{p}}{c_1 \sqrt{p} z_0 - (a_1 - i a_2 \sqrt{pq})}; \quad a_1^2 + pq a_2^2 + p b_1 c_1 = 1 \\ \text{sfera di riflessione: } \left(\xi - \frac{a_1}{c_1 \sqrt{p}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{q}}{c_1} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{p c_1^2} \end{array} \right. \\
\text{Tipo II)} \left\{ \begin{array}{l} z' = \frac{(a_1 \sqrt{q} + i a_2 \sqrt{p}) z_0 + b_1 \sqrt{pq}}{c_1 \sqrt{pq} z_0 - (a_1 \sqrt{q} - i a_2 \sqrt{p})}; \quad q a_1^2 + p a_2^2 + pq b_1 c_1 = 1 \\ \text{sfera di riflessione: } \left(\xi - \frac{a_1}{c_1 \sqrt{p}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{c_1 \sqrt{q}} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{pq c_1^2} \end{array} \right. \\
\text{Tipo III)} \left\{ \begin{array}{l} z' = \frac{(a_1 \sqrt{p} + i a_2 \sqrt{q}) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 \sqrt{p} - i a_2 \sqrt{q})}; \quad p a_1^2 + q a_2^2 + b_1 c_1 = 1 \\ \text{sfera di riflessione: } \left(\xi - \frac{a_1 \sqrt{p}}{c_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{q}}{c_1} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Tipo IV)} \quad & \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{(a_1\sqrt{pq} + ia_2)z_0 + b_1\sqrt{q}}{c_1\sqrt{q}z_0 - (a_1\sqrt{pq} - ia_2)}; & pq a_1^2 + a_2^2 + q b_1 c_1 &= 1 \\ \text{sfera di riflessione: } & \left(\xi - \frac{a_1\sqrt{p}}{c_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{c_1\sqrt{q}} \right)^2 + \zeta^2 &= \frac{1}{q c_1^2} \end{aligned} \right. \\
 \text{Tipo V)} \quad & \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{\frac{a_1 + ia_2\sqrt{pq}}{\sqrt{2}} z_0 + b_1\sqrt{2p}}{c_1\sqrt{2p}z_0 - \frac{a_1 - ia_2\sqrt{pq}}{\sqrt{2}}}; & a_1^2 + pq a_2^2 + 4p b_1 c_1 &= 2 \\ \text{sfera di riflessione: } & \left(\xi - \frac{a_1}{2c_1\sqrt{p}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{q}}{2c_1} \right)^2 + \zeta^2 &= \frac{1}{2p c_1^2} \end{aligned} \right. \\
 \text{Tipo VI)} \quad & \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{\frac{a_1\sqrt{q} + ia_2\sqrt{p}}{\sqrt{2}} z_0 + b_1\sqrt{2pq}}{c_1\sqrt{2pq}z_0 - \frac{a_1\sqrt{q} - ia_2\sqrt{p}}{\sqrt{2}}}; & q a_1^2 + p a_2^2 + 4pq b_1 c_1 &= 2 \\ \text{sfera di riflessione: } & \left(\xi - \frac{a_1}{2c_1\sqrt{p}} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{2c_1\sqrt{q}} \right)^2 + \zeta^2 &= \frac{1}{2pq c_1^2} \end{aligned} \right. \\
 \text{Tipo VII)} \quad & \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{\frac{a_1\sqrt{p} + ia_2\sqrt{q}}{\sqrt{2}} z_0 + b_1\sqrt{2}}{c_1\sqrt{2}z_0 - \frac{a_1\sqrt{p} - ia_2\sqrt{q}}{\sqrt{2}}}; & p a_1^2 + q a_2^2 + 4b_1 c_1 &= 2 \\ \text{sfera di riflessione: } & \left(\xi - \frac{a_1\sqrt{p}}{2c_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{q}}{2c_1} \right)^2 + \zeta^2 &= \frac{1}{2c_1^2} \end{aligned} \right. \\
 \text{Tipo VIII)} \quad & \left\{ \begin{aligned} z' &= \frac{\frac{a_1\sqrt{pq} + ia_2}{\sqrt{2}} z_0 + b_1\sqrt{2q}}{c_1\sqrt{2q}z_0 - \frac{a_1\sqrt{pq} - ia_2}{\sqrt{2}}}; & pq a_1^2 + a_2^2 + 4q b_1 c_1 &= 2 \\ \text{sfera di riflessione: } & \left(\xi - \frac{a_1\sqrt{p}}{2c_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{2c_1\sqrt{q}} \right)^2 + \zeta^2 &= \frac{1}{2q c_1^2} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Come si è detto, nel caso $pq \equiv 3 \pmod{4}$ mancano le riflessioni degli ultimi quattro tipi ed anzi, a causa del teorema di reciprocità, anche quelle del tipo II).

È importante osservare quali piani di riflessione sono in Γ . Essi si ottengono quando $c_1 = 0$ ed appartengono solo ai tipi I) e IV); le loro equa-

zioni sono:

$$\xi = v \frac{\sqrt{p}}{2}, \quad \eta = r \frac{\sqrt{q}}{2},$$

percorrendo r i valori interi. Qui il prisma fondamentale sarà limitato dai quattro piani:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \frac{\sqrt{p}}{2}, \quad 4) \quad \eta = \frac{\sqrt{q}}{2}.$$

§ 22. Caso $p = 2$.

Se $p = 2$ e q è un numero primo impari, troviamo gli stessi tipi di riflessioni da I) a IV) del caso generale, rimanendo escluse le riflessioni da V) a VIII).

Ma qui vogliamo trattare il caso ulteriore in cui, essendo $p = 2$, q è il doppio di un numero primo impari: $q = 2d$.

Allora si trovano i sei tipi di riflessione seguenti:

$$a) \quad z' = \frac{(a_1 \sqrt{2} + i a_2 \sqrt{2d}) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 \sqrt{2} - i a_2 \sqrt{2d})}; \quad 2a_1^2 + 2da_2^2 + b_1 c_1 = 1$$

$$b) \quad z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{d}) z_0 + b_1 \sqrt{2}}{c_1 \sqrt{2} z_0 - (a_1 - i a_2 \sqrt{d})}; \quad a_1^2 + da_2^2 + 2b_1 c_1 = 1$$

$$c) \quad z' = \frac{(a_1 \sqrt{d} + i a_2) z_0 + b_1 \sqrt{2d}}{c_1 \sqrt{2d} z_0 - (a_1 \sqrt{d} - i a_2)}; \quad da_1^2 + a_2^2 + 2db_1 c_1 = 1$$

$$d) \quad z' = \frac{(a_1 \sqrt{2d} + i a_2 \sqrt{2}) z_0 + b_1 \sqrt{d}}{c_1 \sqrt{d} z_0 + (a_1 \sqrt{2d} - i a_2)}; \quad 2da_1^2 + 2a_2^2 + db_1 c_1 = 1$$

$$e) \quad z' = \frac{\frac{a_1 + i a_2 \sqrt{d}}{\sqrt{2}} z_0 + 2b_1}{2c_1 z_0 - \frac{a_1 - i a_2 \sqrt{d}}{\sqrt{2}}}; \quad a_1^2 + da_2^2 + 8b_1 c_1 = 2$$

$$f) \quad z' = \frac{\frac{a_1 \sqrt{d} + i a_2}{\sqrt{2}} z_0 + 2b_1 \sqrt{d}}{2c_1 \sqrt{d} z_0 - \frac{a_1 \sqrt{d} - i a_2}{\sqrt{2}}}; \quad da_1^2 + a_2^2 + 8db_1 c_1 = 2.$$

Le riflessioni del tipo d) esistono solo se $\left(\frac{2}{d}\right) = +1$ cioè quando $d \equiv \pm 1 \pmod{8}$, quelle degli ultimi due tipi soltanto se $d \equiv 1 \pmod{8}$.

§ 23. Definizione aritmetica del gruppo Γ' .

Andiamo ora ad occuparci della definizione aritmetica del gruppo Γ o, per dire più esattamente, di un conveniente sottogruppo Γ' avente a comune con Γ tutte le riflessioni.

Per non complicare la ricerca supponiamo p, q numeri primi, non escludendo che possa essere $p = 2$.

Se lasciamo dapprima da parte il caso $pq \equiv 1 \pmod{4}$, avremo soltanto le riflessioni dei tipi da I) a IV) (n.º 20). Ora osserviamo che combinando fra loro queste riflessioni, le sostituzioni di 1.^a e 2.^a specie che si ottengono hanno tutte una delle due forme:

$$\begin{aligned} S) & \begin{pmatrix} a_1 + ia_2\sqrt{pq}, & b_1\sqrt{p} + ib_2\sqrt{q} \\ c_1\sqrt{p} + ic_2\sqrt{q}, & d_1 + id_2\sqrt{pq} \end{pmatrix} \\ U) & \begin{pmatrix} a_1\sqrt{p} + ia_2\sqrt{q}, & b_1 + ib_2\sqrt{pq} \\ c_1 + ic_2\sqrt{pq}, & d_1\sqrt{p} + id_2\sqrt{q} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

essendo $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2$ numeri interi e il determinante della sostituzione avendo il valore ± 1 . Per convincersene si osservi che le riflessioni dei tipi I) III) appartengono in effetto rispettivamente alle $S) U)$, mentre quelle dei tipi II) IV) vi rientrano, appena se ne moltiplichino i quattro coefficienti per i . D'altra parte se consideriamo tutte le possibili $S) U)$ a determinante ± 1 , vediamo che esse formano un gruppo. Ciò si riscontra osservando che i due *moduli* (*) binari

$$\mathfrak{M}_1 = [1, i\sqrt{pq}]$$

$$\mathfrak{M}_2 = [\sqrt{p}, i\sqrt{q}],$$

godono delle proprietà seguenti:

1.^a Il prodotto di due numeri in \mathfrak{M}_1 o di due numeri in \mathfrak{M}_2 è in \mathfrak{M}_1 .

2.^a Il prodotto di un numero in \mathfrak{M}_1 per un numero in \mathfrak{M}_2 è in \mathfrak{M}_2 .

Introducendo la nozione di prodotto di due moduli (**), possiamo esprimere le proprietà enunciate colle equazioni simboliche:

$$\mathfrak{M}_1^2 = \mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{M}_2^2 = \mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2.$$

(*) Questa denominazione intesa nel senso di DEDEKIND (cfr. P XI Suppl. alle *Vorlesungen ueber Zahlentheorie di Dirichlet*).

(**) Cfr. DEDEKIND, loc. cit., § 170 della quarta edizione tedesca.

Ne segue che il prodotto di due S) o di due U) è una S), mentre il prodotto di una S) per una U) è una U), e però le S) U) formano un gruppo. Questo gruppo, che indichiamo con Γ' , è contenuto certamente in Γ , poichè la quaternaria (C) n.º 16, corrispondente ad una qualsiasi S) o U), riesce a coefficienti interi. Inoltre il sottogruppo Γ' di Γ ne contiene, per quanto si è visto, tutte le riflessioni, sicchè in ambedue i gruppi Γ , Γ' è contenuto, quale sottogruppo eccezionale, il gruppo generato dal combinare fra loro le sole riflessioni.

§ 24. Caso $pq \equiv 1 \pmod{4}$.

In questo caso, se bene esaminiamo la composizione delle riflessioni da V) a VIII) e delle sostituzioni che nascono dal combinarle fra loro e con quelle dei tipi precedenti, siamo condotti a introdurre i due nuovi moduli:

$$\mathfrak{M}_3 = \left[\sqrt{2}, \quad \frac{1 + i\sqrt{pq}}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\mathfrak{M}_4 = \left[\sqrt{2p}, \quad \frac{\sqrt{p} + i\sqrt{q}}{\sqrt{2}} \right].$$

Il prodotto di due qualunque dei moduli

$$\mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{M}_2, \quad \mathfrak{M}_3, \quad \mathfrak{M}_4,$$

è uno dei moduli stessi secondo la legge espressa dalle equazioni simboliche:

$$\mathfrak{M}_r^2 = \mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_r, \quad \mathfrak{M}_r \mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}_t,$$

indicando nell'ultima con rst una qualunque permutazione degli indici 2, 3, 4. Inoltre ciascuno dei quattro moduli contiene insieme ad ogni numero il suo coniugato. Indichiamo ora con lettere greche affette dall'indice r i numeri del modulo \mathfrak{M}_r e consideriamo tutte le sostituzioni di 1.^a e 2.^a specie a determinante ± 1 che abbiano una delle quattro forme seguenti:

$$\begin{array}{ll} S) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_1 \end{pmatrix}, & U) \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_2 \end{pmatrix} \\ T) \begin{pmatrix} \alpha_3 & \beta_4 \\ \gamma_4 & \delta_3 \end{pmatrix}, & V) \begin{pmatrix} \alpha_4 & \beta_3 \\ \gamma_3 & \delta_4 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Dalle proprietà enunciate dei moduli \mathfrak{M}_2 segue che tutte queste sostituzioni formano un gruppo, componendosi i quattro tipi fra loro al modo di un

Vierergruppe, cioè secondo la legge espressa nella tabella seguente:

S	U	T	V
U	S	V	T
T	V	S	U
V	T	U	S

Questo gruppo, che indicheremo nuovamente con Γ' , è certamente contenuto in Γ poichè non solo le quaternarie corrispondenti alle $S) U)$, ma anche quelle corrispondenti alle $T) V)$ sono a coefficienti interi (*). Di più il sottogruppo Γ' di Γ ne contiene tutte le riflessioni.

Arrestiamoci un momento al caso speciale $p=1$. Allora \mathfrak{M}_1 coincide con \mathfrak{M}_2 ed \mathfrak{M}_3 con \mathfrak{M}_4 ; il gruppo Γ non è altro che il gruppo delle sostituzioni a determinante ± 1 i cui coefficienti sono numeri interi del corpo quadratico immaginario $(1, i\sqrt{q})$, ampliato il gruppo nel caso $q \equiv 1 \pmod{4}$, appunto come ho indicato nel vol. 42 dei « *Mathematische Annalen* » (pag. 34 e seguenti).

§ 25. Esempi diversi.

Diamo ora alcuni esempi numerici per la determinazione dei poliedri fondamentali delle forme quaternarie:

$$px_2^2 + qx_3^2 - x_1x_4.$$

Tralasciamo il caso $p=1$ perchè, secondo quanto abbiamo ora detto, i miei lavori nei « *Mathematische Annalen* » e specialmente nel vol. 40 contengono già la determinazione in singoli casi dei poliedri corrispondenti.

Qui ci limiteremo a definire il poliedro che sarà ogni volta il poliedro fondamentale, come mi sono accertato coi soliti metodi.

Esempio 1.º: $p=2, q=3$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 4) \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

(*) Per constatarlo basta già il fatto che alle $S) U)$ corrispondono delle sostituzioni quaternarie aritmetiche (n.º 22), come pure alle riflessioni di uno dei tipi da V) a VIII).

si tolgano le regioni interne alle due sfere:

$$5) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$6) \quad \left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}.$$

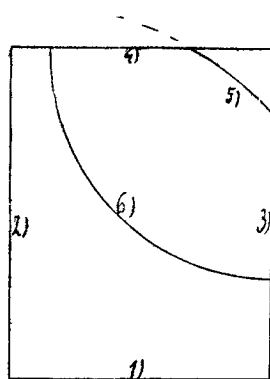


Fig. 14.a.

Il poliedro risultante (fig. 14.^a) non ammette trasformazioni in sè medesimo, quindi il gruppo riproduttivo della forma:

$$2x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_4$$

si genera con sei omologie armoniche.

Esempio 2.^o: $p=2$, $q=5$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0,$$

$$3) \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 4) \quad \eta = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

si tolgano le regioni interne alle tre sfere:

$$5) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$6) \quad \left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}$$

$$7) \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}.$$

Il poliedro risultante (fig. 15.^a) non ha trasformazioni in sè stesso e il gruppo riproduttivo della forma:

$$2x_2^2 + 5x_3^2 - x_1x_4,$$

si genera colle sette omologie armoniche corrispondenti.

Esempio 3.^o: $p=2$, $q=6$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0,$$

$$3) \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 4) \quad \eta = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

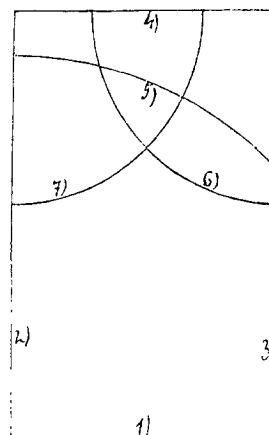


Fig. 15.a.

togliamo le regioni interne alle tre sfere:

$$5) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$6) \quad \xi^2 + \left(\eta - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}$$

$$7) \quad \left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\eta - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{6}.$$

Il poliedro risultante (fig. 16.^a) ammette una sola trasformazione non identica in sè stesso e cioè la riflessione:

$$z' = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}z_0 - 1}{z_0 - \frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}.$$

sulla sfera:

$$\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\eta - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \zeta^2 = 1,$$

che scambia la faccia 1) con 7), la 2) con 6) lasciando ferme 3) 4) 5) e permuta fra loro i due vertici singolare $V_1 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ e V_∞ . La quaternaria corrispondente riproduttiva della forma:

$$2x_2^2 + 6x_3^2 - x_1x_4,$$

ha lo schema seguente:

$$a) \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -6 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -6 & 2 \end{vmatrix},$$

e non appartiene al gruppo aritmetico. Questo gruppo è dunque generabile

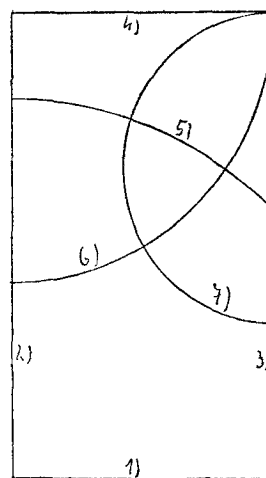


Fig. 16.^a.

colle sette omologie armoniche corrispondenti alle riflessioni da 1) a 7) (*). A differenza però di tutti i gruppi considerati, esso è contenuto quale sottogruppo eccezionale d'indice 2 in un gruppo più ampio ottenuto ampliandolo colla α).

Esempio 4.º: $p = 2$, $q = 7$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 4) \quad \eta = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

tolgansi le regioni interne alle cinque sfere:

$$5) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$6) \quad \left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}$$

$$7) \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}$$

$$8) \quad \left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{14}$$

$$9) \quad \left(\xi - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{5}{2\sqrt{7}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{56}.$$

(*) Le espressioni effettive di queste omologie elementari sono le seguenti:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, & 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, & 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ 4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -12 & 1 \end{vmatrix}, & 5) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & 6) \begin{vmatrix} 3 & 0 & -12 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -12 & 3 \end{vmatrix} \\ 7) \begin{vmatrix} 7 & 12 & -24 & 6 \\ -3 & -5 & 12 & -3 \\ 2 & 4 & -7 & 2 \\ 6 & 12 & -24 & 7 \end{vmatrix}, & & \end{array}$$

e il lettore verificherà agevolmente che la sostituzione α) trasforma la omologia 1) nella 7), la 2) nella 6), mentre trasforma in sé medesime le omologie 3) 4) 5).

Il poliedro risultante (fig. 17.^a) non ha alcuna trasformazione in sè medesimo e il gruppo riproduttivo di $f = 2x_2^2 + 7x_3^2 - x_1x_4$ si genera con nove omologie armoniche.

Esempio 5.^o: $p = 3, q = 7$.

Dal prisma racchiuso fra i quattro piani:

$$1) \quad \eta = 0, \quad 2) \quad \xi = 0, \quad 3) \quad \xi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 4) \quad \eta = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

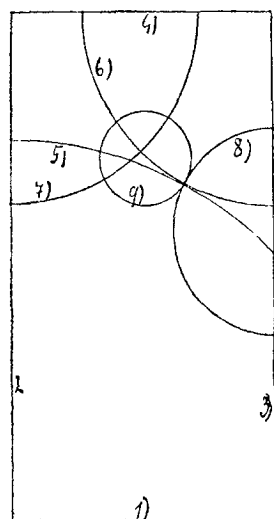


Fig. 17.^a.

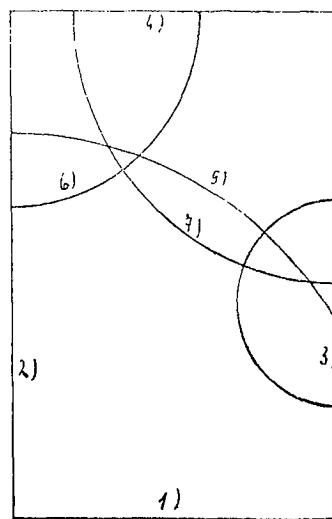


Fig. 18.^a.

togliamo le regioni interne alle quattro sfere:

$$5) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$6) \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}$$

$$7) \quad \left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}$$

$$8) \quad \left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{3}{2\sqrt{7}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{14}.$$

Il poliedro risultante (fig. 18.^a) non ammette trasformazioni in sè stesso. Il gruppo riproduttivo della forma:

$$3x_2^2 + 7x_3^2 - x_1x_4,$$

si genera con otto omologie armoniche elementari.

AGGIUNTA.

La forma: $x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_4$.

Non è privo d'interesse il considerare fra gli esempi dati al numero precedente anche il caso $p = 1$, $q = 1$, poichè il gruppo riproduttivo della forma:

$$x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_4,$$

si trova *simile* a quello della forma:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2;$$

ma le sostituzioni (a determinante 1) che trasformano l'uno nell'altro contengono nei coefficienti l'irrazionalità $\sqrt[4]{8}$ circostanza questa affatto analoga a quella riscontrata al n.º 15 per le due forme ivi considerate.

Nel caso $p = 1$, $q = 1$ la discussione al n.º 18 porta subito a stabilire che nel gruppo poliedrico Γ esistono le riflessioni seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - i a_2)} \\ a_1^2 + a_2^2 + b_1 c_1 = 1 \\ z' = \frac{\frac{a_1 + i a_2}{\sqrt{2}} z_0 + b_1 \sqrt{2}}{c_1 \sqrt{2} z_0 - \frac{a_1 - i a_2}{\sqrt{2}}} \\ a_1^2 + a_2^2 + 4 b_1 c_1 = 2. \end{array} \right.$$

Queste sono le riflessioni stesse che si presentano nel gruppo $\overline{\Gamma^{(i)}}$ formato con numeri interi di GAUSS (*) e però il poliedro fondamentale coincide, nel senso non-euclideo, con quello del n.º 2. Distinguendo con numeri accentati le faccie del poliedro attuale, omologhe alle egualmente numerate al n.º 2, avremo la

(*) Cfr. Mathem. Annalen. Bd. 10, pag. 352.

piramide racchiusa fra i tre piani:

$$1') \quad \xi - \eta = 0, \quad 2') \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad 3') \quad \eta = 0,$$

esternamente alla sfera:

$$4') \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Le espressioni delle omologie armoniche elementari corrispondenti generatrici del gruppo G' riproduttivo della forma:

$$y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_4,$$

sono:

$$\begin{array}{l} 1') \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2') \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ 3') \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 4') \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

Paragonando queste colle omologhe del n.º 2 che qui riportiamo per maggior chiarezza:

$$\begin{array}{l} 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ 3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

dobbiamo calcolare la sostituzione quaternaria che trasforma 1) in 1'), 2) in 2'), 3) in 3'), 4) in 4'). Questa sostituzione esiste certamente, a causa della similitudine dei due poliedri, ed è pienamente determinata, salvo un fattore comune ai coefficienti, che si può fissare dando alla sostituzione il determinante 1.

Per calcolarla basta tener conto dei rispettivi piani e centri d'omologia (cfr. n.º 15) che sono:

$$\begin{array}{ll}
 \text{per la 1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{piano } x_2 = 0 \\ \text{centro } (0, 1, 0, 0) \end{array} \right. & \text{per la 2)} \left\{ \begin{array}{l} \text{piano } x_1 + x_2 = 0 \\ \text{centro } (1, 1, 0, 0) \end{array} \right. \\
 \text{per la 1')} \left\{ \begin{array}{l} \text{piano } y_2 + y_3 = 0 \\ \text{centro } (0, 1, 1, 0) \end{array} \right. & \text{per la 2')} \left\{ \begin{array}{l} \text{piano } y_1 + 2y_2 = 0 \\ \text{centro } (0, 1, 0, -1) \end{array} \right. \\
 \text{per la 3)} \left\{ \begin{array}{l} \text{piano } x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \text{centro } (1, -1, 1, -1) \end{array} \right. & \text{per la 4)} \left\{ \begin{array}{l} \text{piano } x_1 - x_3 = 0 \\ \text{centro } (1, 0, -1, 0) \end{array} \right. \\
 \text{per la 3')} \left\{ \begin{array}{l} \text{piano } y_3 = 0 \\ \text{centro } (0, 0, 1, 0) \end{array} \right. & \text{per la 4')} \left\{ \begin{array}{l} \text{piano } y_1 - y_2 = 0 \\ \text{centro } (1, 0, 0, -1) \end{array} \right.
 \end{array}$$

Per la sostituzione trasformatrice cercata, prescindendo dalla condizione che il determinante sia $= 1$, troviamo lo schema:

$$\alpha) \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Il determinante di questa essendo $= 8$ basta dividere i sedici coefficienti per $\sqrt[4]{8} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ per avere la sostituzione a determinante 1 cercata.

È chiaro a priori che la α), cioè la sostituzione:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = -2(x_3 + x_4) \\ y_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ y_3 = -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ y_4 = -2(x_1 + x_4) \end{array} \right.$$

deve trasformare, a meno di un fattore $y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_4$ in $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ e in effetto troviamo:

$$y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_4 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2).$$

Pisa, agosto 1894.