

Sulla teoria delle superficie di rivoluzione.

(Di GEMINIANO PIRONDINI, a Parma.)

§ 1.

Linee tracciate sulla stessa superficie di rivoluzione. — Le superficie S, S_1 generate dalla rotazione attorno all'asse delle z delle linee L, L_1 rappresentate dalle equazioni:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = U(u); \quad x_1 = x_1(u), \quad y_1 = y_1(u), \quad z_1 = U_1(u),$$

hanno per meridiani le curve:

$$x_0 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z_0 = U; \quad x_{10} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad y_{10} = U_1;$$

quindi l'eguaglianza delle superficie S, S_1 è stabilita quando sia:

$$x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad U = U_1.$$

La prima condizione è soddisfatta da:

$$x = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cos f(u), \quad y = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sin f(u),$$

con $f(u)$ funzione arbitraria di u e la seconda serve a determinare z_1 ; perciò tutte le linee rappresentate dalle equazioni:

$$x = R \cdot \cos f(u), \quad y = R \cdot \sin f(u), \quad z = U, \tag{1}$$

qualunque sia la funzione $f(u)$ di u , ruotando attorno all'asse delle z , generano la stessa superficie di rivoluzione, cioè quella generata dalla curva:

$$x_1 = R \cdot \cos u, \quad y_1 = R \cdot \sin u, \quad z_1 = U. \tag{2}$$

Le linee (1) abbiano, rispetto alla superficie di rivoluzione sulla quale sono tracciate, una determinata proprietà geometrica espressa dall'equazione:

$$\theta(f, R, U, f', R', U', \dots) = 0, \tag{3}$$

che lega fra loro le funzioni f , R , U e le loro derivate dei varii ordini; supponendo di ricavare coll'integrazione:

$$f = \varphi(R, U, R', U', \dots),$$

avremo:

$$x = R \cos \varphi(R, U, R', U', \dots), \quad y = R \sin \varphi(R, U, R', U', \dots), \quad z = U. \quad (4)$$

Si supponga di determinare la funzione arbitraria U in modo da soddisfare la condizione:

$$\varphi(R, U, R', U', \dots) = u, \quad (5)$$

e sia $U = \psi(R, R', \dots)$ il valore che si ricava per la U integrando la (5); le (2) divengono allora:

$$x_1 = R \cos u, \quad y_1 = R \sin u, \quad z_1 = \psi(R, R', \dots). \quad (6)$$

Abbiamo così il teorema generale « le linee le quali, per rispetto alla superficie generata dalla loro rotazione attorno all'asse delle z , hanno una determinata proprietà geometrica espressa dall'equazione differenziale (3) sono rappresentate dalle equazioni (4) ovvero dalle (6), nelle quali $\varphi(R, U, R', U', \dots)$ è il valore della funzione f che si ottiene integrando la (3) e $\psi(R, R', \dots)$ è il valore della funzione U che si ottiene integrando la (5) ».

Senza insistere soverchiamente sull'uso di queste formole, osserveremo che le (4) tornano opportune quando sia già nota *a priori* la superficie di rivoluzione che contiene la linea; che se invece la superficie non si conosce *a priori* allora generalmente è più conveniente l'uso delle (6).

Conviene osservare in fine che in moltissimi casi, dovendosi considerare sopra una determinata superficie di rivoluzione il sistema di linee aventi una data proprietà geometrica, è conveniente assumere come generatrice primitiva anzi che la linea (2), la linea (6) che appartiene al sistema stesso; a questo scopo basta sostituire nelle equazioni (4) al posto della funzione U la precedente ψ . Però si deve osservare a questo riguardo che nella (3) entrano, in generale, varie costanti arbitrarie a , b , c ,... introdotte per esprimere analiticamente la proprietà geometrica della linea; tali costanti entrano pure nell'integrale di (3) e quindi nella (5); se quindi, assumendo per generatrice primitiva la (6), vogliamo che le (4) rappresentino qualunque altra linea appartenente a quella determinata famiglia cui appartiene la (6), si deve supporre di aver sostituito nella (3) alle costanti arbitrarie a , b , c ,... le altre costanti a_1 , b_1 , c_1 ,...

Avremo dunque « le linee le quali, rispetto alla superficie generata dalla loro rotazione attorno all'asse delle z , hanno una determinata proprietà geometrica espressa dall'equazione differenziale (3), possono venire rappresentate dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= R \cdot \cos \varphi_1(R, \psi, R', \psi', \dots), & y_2 &= R \cdot \sin \varphi_1(R, \psi, R', \psi', \dots), \\ z_2 &= \psi(R, R', \dots) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

nelle quali ψ è la funzione che entra nel teorema precedente e φ_1 è ciò che diviene la funzione φ del teorema precedente, cambiando le costanti arbitrarie a, b, c, \dots che entrano nella (3) prima della sua integrazione (e dalle quali dipende il variare delle linee del sistema) in altre costanti arbitrarie a_1, b_1, c_1, \dots »

Le (7) possono servire più convenientemente che le (4) per risolvere la questione di determinare tutte le linee di quella certa famiglia che si considera, tosto che se ne conosce una; basterà, a questo scopo, far variare in tutti i modi possibili le costanti a_1, b_1, c_1, \dots , lasciando fisse le a, b, c, \dots

§ 2.

Applichiamo le considerazioni generali precedenti ad alcuni casi particolari.

A) La condizione che la linea (1) sia geodetica della superficie di rivoluzione equivale all'altra che la sua normale principale:

$$\frac{X-x}{\frac{d^2 x}{ds^2}} = \frac{Y-y}{\frac{d^2 y}{ds^2}} = \frac{Z-z}{\frac{d^2 z}{ds^2}},$$

nel punto generico (x, y, z) incontri l'asse delle z ; tale condizione è soddisfatta quando sia:

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = a,$$

con a costante. La (3) diviene quindi nel nostro caso:

$$f' - \frac{a}{R} \sqrt{\frac{R'^2 + U'^2}{R^2 - a^2}} = 0.$$

B) Si supponga che la linea (1) sia lossodromia; se si indicano con X, Y, Z le coordinate d'un punto qualunque della superficie generata dalla

rotazione di tale linea attorno all'asse delle z , si ha:

$$X = x \cos v - y \sin v; \quad Y = x \sin v + y \cos v; \quad Z = z,$$

dalle quali:

$$E = \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2 f'^2 + R'^2 + U'^2;$$

$$F = \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} \right) = x y' - x' y = R^2 f'; \quad G = \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 = x^2 + y^2 = R^2.$$

Notando quindi che, se i è l'angolo sotto il quale L sega i meridiani, si ha:

$$\sin i = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{R f'}{\sqrt{R^2 f'^2 + R'^2 + U'^2}},$$

nel nostro caso la (3) diviene:

$$f' - \tan i \cdot \frac{\sqrt{R'^2 + U'^2}}{R} = 0,$$

con i costante.

C) La linea (1) sia un'elica tracciata sopra un cilindro avente le generatrici parallele all'asse delle z ; avremo:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \frac{U'}{\sqrt{R^2 f'^2 + R'^2 + U'^2}}.$$

Se quindi poniamo la condizione che sia $\frac{dz}{ds} = \cos i$, con i costante, si avrà:

$$f' - \frac{\sqrt{U'^2 \tan^2 i - R'^2}}{R} = 0,$$

che è l'equazione (3) corrispondente al caso di cui trattiamo.

D) Esprimiamo la condizione che la linea (1) sia una traiettoria ortogonale delle eliche dell'elicoide da essa generato muovendosi di moto elicoidale attorno all'asse delle z ; in tal caso la linea si dice *geodetica principale* dell'elicoide e per essa, qualunque sia la variabile indipendente u , deve essere soddisfatta la condizione (*):

$$\frac{dx}{du} y - \frac{dy}{du} x + p \frac{dz}{du} = 0.$$

(*) *Sulle superficie elicoidali*. Annali di Matematica, 1888.

nella quale p è il parametro del moto elicoidale. Applicando le (1) la precedente diviene:

$$R^2 f' - p U' = 0,$$

che è la relazione a cui ora si riduce la (3).

E) Sia la linea (1) la curva di contatto L della superficie generata dalla sua rotazione attorno all'asse delle z con un cilindro; la L può allora considerarsi come una linea d'ombra della superficie per rispetto a raggi luminosi paralleli.

Chiamando A, B, C gli angoli che la normale alla superficie in un punto qualunque fa cogli assi coordinati, si ha:

$$\begin{aligned} \cos A : \cos B : \cos C = & \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} \right) : \left(\frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial u} \right) : \\ & : \left(\frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right), \end{aligned}$$

cioè:

$$\cos A : \cos B : \cos C = (x \cos v - y \sin v) z' : (x \sin v + y \cos v) z' : -(x x' + y y').$$

La condizione esprimente che L è una linea d'ombra rispetto a raggi luminosi paralleli alla direzione $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ è equivalente a quella che le normali alla superficie lungo L siano perpendicolari alla direzione dei raggi luminosi; tale condizione è dunque:

$$\Sigma \cos A \cdot \cos \alpha = 0.$$

Per più semplicità supporremo di considerare la linea L nella posizione iniziale, corrispondente a $v = 0$; supporremo per di più che il piano coordinato $y = 0$ sia quello che passa per l'asse di rotazione ed è parallelo alla direzione dei raggi luminosi (piano meridiano principale); avremo allora:

$$\cos A : \cos B : \cos C = x z' : y z' : -(x x' + y y');$$

$$\cos \alpha = \sin \theta, \quad \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = \cos \theta,$$

e la condizione precedente diviene:

$$x z' = \cot \theta \cdot (x x' + y y').$$

Dunque la (3) assume la forma:

$$U' \cos f(u) - \cot \theta \cdot R' = 0.$$

F) La linea rappresentata dalla (1) sia la curva di contatto della superficie generata dalla sua rotazione attorno all'asse delle z con un cono; la linea L può allora considerarsi come una linea d'ombra della superficie per rispetto a raggi luminosi uscenti dal vertice di quel cono. Se tale vertice si trova sull'asse delle x (nel qual caso il piano coordinato $y = 0$ si dice piano meridiano principale) alla distanza a dall'origine, i coseni degli angoli α, β, γ che il raggio luminoso che va al punto (x, y, z) della linea d'ombra fa cogli assi coordinati soddisfano alla condizione:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = x - a : y : z.$$

Ricordando quindi le espressioni dei coseni direttivi degli angoli A, B, C trovate nel caso E), avremo:

$$(x^2 + y^2 - ax)z' = z(xx' + yy'), \quad \text{cioè: } \{R - a \cos f(u)\}U' = UR',$$

che è l'equazione a cui ora si riduce la (3).

Sulle varie formole trovate nei casi $A), B), C), D), E), F)$ facciamo le operazioni e le trasformazioni indicate nel caso generale; si ottengono allora i risultati seguenti:

A) *Formole relative alle geodetiche:*

$$x = R \cdot \cos \left(a \int \sqrt{\frac{R'^2 + U'^2}{R^2 - a^2}} \cdot du \right); \quad y = R \cdot \sin \left(a \int \sqrt{\frac{R'^2 + U'^2}{R^2 - a^2}} du \right); \quad z = U \quad (8)$$

$$x_1 = R \cdot \cos u; \quad y_1 = R \cdot \sin u; \quad z_1 = \frac{1}{a} \int \sqrt{R^4 - a^2(R^2 + R'^2)} \cdot du \quad (8_1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= R \cdot \cos \left(\frac{a_1}{a} \int \sqrt{\frac{R^2 - a^2}{R^2 - a_1^2}} \cdot du \right); \quad y_2 = R \cdot \sin \left(\frac{a_1}{a} \int \sqrt{\frac{R^2 - a^2}{R^2 - a_1^2}} du \right); \\ z_2 &= \frac{1}{a} \int \sqrt{R^4 - a^2(R^2 + R'^2)} \cdot du. \end{aligned} \right\} \quad (8_2)$$

B) *Formole relative alle lossodromie:*

$$x = R \cdot \cos \left(\operatorname{tg} i \int \frac{\sqrt{R'^2 + U'^2}}{R} du \right); \quad y = R \cdot \sin \left(\operatorname{tg} i \int \frac{\sqrt{R'^2 + U'^2}}{R} du \right); \quad z = U \quad (9)$$

$$x_1 = R \cdot \cos u; \quad y_1 = R \cdot \sin u; \quad z_1 = \int \sqrt{\cot^2 i \cdot R^2 - R'^2} \cdot du \quad (9_1)$$

$$x_2 = R \cdot \cos \left(\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} u \right); \quad y_2 = R \cdot \sin \left(\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} u \right); \quad z_2 = \int \sqrt{\cot^2 i \cdot R^2 - R'^2} \cdot du. \quad (9_2)$$

C) Formole relative alle eliche:

$$x = R \cdot \cos \int \frac{\sqrt{U'^2 \operatorname{tg}^2 i - R'^2}}{R} du; \quad y = R \cdot \sin \int \frac{\sqrt{U'^2 \operatorname{tg}^2 i - R'^2}}{R} du; \quad z = U \quad (10)$$

$$x_1 = R \cdot \cos u \quad y_1 = R \cdot \sin u; \quad z_1 = \cot i \int \sqrt{R^2 + R'^2} \cdot du \quad (10_1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= R \cdot \cos \int \frac{\sqrt{(R^2 + R'^2) \frac{\operatorname{tg}^2 i_1}{\operatorname{tg}^2 i} - R'^2}}{R} du; \\ y_2 &= R \cdot \sin \int \frac{\sqrt{(R^2 + R'^2) \frac{\operatorname{tg}^2 i_1}{\operatorname{tg}^2 i} - R'^2}}{R} du; \quad z_2 = \cot i \int \sqrt{R^2 + R'^2} \cdot du. \end{aligned} \right\} \quad (10_2)$$

D) Formole relative alle geodetiche principali d'elicoidi:

$$x = R \cdot \cos \left(p \int \frac{U'}{R^2} du \right); \quad y = R \cdot \sin \left(p \int \frac{U'}{R^2} du \right); \quad z = U \quad (11)$$

$$x_1 = R \cdot \cos u; \quad y_1 = R \cdot \sin u; \quad z_1 = \frac{1}{p} \int R^2 du \quad (11_1)$$

$$x_2 = R \cdot \cos \left(\frac{p_1}{p} u \right); \quad y_2 = R \cdot \sin \left(\frac{p_1}{p} u \right); \quad z_2 = \frac{1}{p} \int R^2 du. \quad (11_2)$$

E) Formole relative alle linee d'ombra, essendo i raggi luminosi paralleli:

$$x = \frac{R R'}{U'} \cot \theta; \quad y = \frac{R \sqrt{U'^2 - R'^2 \cot^2 \theta}}{U'}; \quad z = U \quad (12)$$

$$x_1 = R \cos u; \quad y_1 = R \sin u \quad z_1 = \cot \theta \int \frac{R'}{\cos u} \cdot du \quad (12_1)$$

$$x_2 = \frac{\cot \theta_1}{\cot \theta} \cdot R \cos u; \quad y_2 = \sqrt{1 - \frac{\cot^2 \theta_1}{\cot^2 \theta} \cdot \cos^2 u}; \quad z_2 = \cot \theta \int \frac{R'}{\cos u} \cdot du, \quad (12_2)$$

F) Formole relative alle linee d'ombra, essendo i raggi luminosi concorrenti:

$$x = \frac{R(RU' - R'U)}{aU'}; \quad y = \frac{R \sqrt{a^2 U'^2 - (RU' - R'U)^2}}{aU'}; \quad z = U \quad (13)$$

$$x_1 = R \cos u; \quad y_1 = R \sin u; \quad z_1 = h \cdot e^{\int \frac{R'}{R - a \cos u} \cdot du} \quad (13_1)$$

$$x_2 = \frac{a}{a_1} R \cos u; \quad y_2 = R \sqrt{1 - \frac{a^2}{a_1^2} \cos^2 u}; \quad z_2 = h \cdot e^{\int \frac{R'}{R - a \cos u} \cdot du} \quad (13_2)$$

§ 3.

Applicazioni delle formole precedenti. — a) Se, col mezzo delle (8), (8₁), (8₂) calcoliamo E, F, G le cui espressioni sono state date al caso B) e chiamiamo i l'angolo sotto il quale le linee stesse (8), (8₁), (8₂) segano i meridiani delle superficie di rotazione, si trova: $R \sin i = a$ per le linee (8), (8₁) e $R \sin i = a_1$ per le linee (8₂). Queste relazioni esprimono il noto teorema di CLAIRAUT relativo alle geodetiche delle superficie di rivoluzione; si ha così il significato geometrico della costante a nelle (8), (8₁) e quello della costante a_1 nella (8₂).

b) Determiniamo quella superficie di rivoluzione nella quale vi sono due geodetiche tali, che il rapporto delle distanze dei loro punti da un piano fisso passante per l'asse è costante.

Se le geodetiche domandate sono le linee (8₁), (8₂) e se il piano fisso in discorso è il coordinato $x = 0$, si deve avere $x_2 = \frac{x_1}{k}$, con k costante; sarà dunque:

$$\frac{a_1}{a} \int \sqrt{\frac{R^2 - a^2}{R^2 - a_1^2}} \cdot du = \arccos \left(\frac{\cos u}{k} \right),$$

dalla quale si ricava:

$$R = a a_1 \sqrt{\frac{1 - k^2}{a^2 \sin^2 u + a_1^2 \cos^2 u - a_1^2 k^2}}.$$

Le geodetiche domandate sono quindi rappresentate dalle (8₁), (8₂) e il meridiano della superficie di rivoluzione è rappresentato nel piano $y = 0$ dalle equazioni:

$$x_0 = R, \quad z_0 = \frac{1}{a} \int \sqrt{R^4 - a^2(R^2 + R'^2)} du,$$

dove R ha il valore precedentemente trovato.

c) Una geodetica di una superficie di rivoluzione sia una geodetica principale di un elicoide dello stesso asse; eguagliando fra loro gli argomenti delle funzioni circolari che entrano nelle (8) e nelle (11), si ha un'equazione dalla quale si ricava:

$$\frac{a R R'}{\sqrt{(p^2 - a^2) R^2 - a^2 p^2}} = U'.$$

Moltiplicando per du e integrando, si ottiene:

$$\frac{R^2}{\left(\frac{ap}{\sqrt{p^2 - a^2}}\right)^2} - \frac{(U+m)^2}{\left(\frac{a^2 p}{p^2 - a^2}\right)^2} = 1,$$

equazione di un'iperbole avente l'asse immaginario sull'asse delle z ; in causa del valore trovato per U' , la seconda delle (11) ci dà:

$$y = -\frac{ap}{\sqrt{p^2 - a^2}},$$

la quale mostra che la geodetica trovata si trova in un piano parallelo al coordinato $y = 0$.

Perciò « la sola superficie di rivoluzione in cui una geodetica è altresì geodetica principale di un elicoide avente lo stesso asse è l'iperboloide a una falda e la geodetica che ha tale proprietà è una qualunque delle sue generatrici rettilinee ».

d) Se nelle (9₂) poniamo $\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} u = v$, si ha:

$$x_2 = R\left(\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} v\right) \cdot \cos v; \quad y_2 = R\left(\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} v\right) \cdot \operatorname{sen} v; \quad (14)$$

e quindi, se la proiezione equatoriale di una lossodromia è rappresentata in coordinate polari dall'equazione: $R = \varphi(u)$, la proiezione equatoriale di qualsivoglia altra lossodromia della stessa superficie è rappresentata dall'altra equazione: $R = \varphi\left(\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} v\right)$.

Per es.: se abbiamo $\varphi(u) = e^{mu}$ ovvero $\varphi(u) = au$, sarà rispettivamente:

$$\varphi\left(\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} v\right) = e^{\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} v}, \quad \varphi\left(\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} v\right) = \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} a \cdot v,$$

le quali relazioni dimostrano « se una lossodromia di una superficie di rivoluzione ha per proiezione equatoriale una spirale logaritmica o una spirale d'Archimede, tutte le altre lossodromie della superficie hanno la stessa proprietà ».

Poniamo la condizione che le proiezioni equatoriali di due lossodromie di una stessa superficie di rivoluzione siano due linee omotetiche rispetto all'origine degli assi; cambiando nelle (14) v in u e confrontando poi le equa-

zioni ottenute colle due prime (9₁), la condizione che abbiamo posta ci dà:

$$R\left(\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} u\right) = n R(u), \quad (14)^{\text{bis}}$$

essendo n il rapporto di similitudine. Siccome la funzione $R(u)$, cambiando u in $\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} u$ non fa che acquistare un fattore costante, deve essere:

$$R(u) = h \cdot u^k, \quad (15)$$

con h e k costanti. Assumendo per $R(u)$ questa forma, si vede che si può soddisfare alla (14)^{bis} lasciando la costante h arbitraria e prendendo k come segue:

$$k = \frac{\log n}{\log \cdot \operatorname{tg} i - \log \cdot \operatorname{tg} i_1}.$$

Osservando che dalla terza (9₁) si ricava $z = h \int u^{k-1} \cdot \sqrt{u^2 \cot^2 i - k^2} \cdot du$, si ha « la linea rappresentata dalle equazioni:

$$x = h \cdot u^k \cdot \cos u; \quad y = h \cdot u^k \cdot \sin u; \quad z = h \int u^{k-1} \sqrt{u^2 \cot^2 i - k^2} \cdot du,$$

e l'altra rappresentata dalle equazioni:

$$x_1 = h \cdot u^k \cdot \cos\left(\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} u\right); \quad y_1 = h \cdot u^k \cdot \sin\left(\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} u\right);$$

$$z_1 = h \int u^{k-1} \sqrt{u^2 \cot^2 i - k^2} \cdot du,$$

sono le sole che abbiano per proiezione sul piano $z = 0$ due curve simili e che, ruotando attorno all'asse delle z , generino la medesima superficie di rivoluzione di cui esse sono due lossodromie ».

La superficie di rivoluzione sulla quale si trovano le due lossodromie notevoli determinate ha per meridiano la curva:

$$x_0 = h u^k, \quad z_0 = h \int u^{k-1} \sqrt{u^2 \cdot \cot^2 i - k^2} \cdot du,$$

la quale, per $k = 1$, ovvero $k = 2$, ovvero $k = -1$, diviene rispettivamente la curva logaritmica:

$$z_0 = \frac{x_0 \sqrt{x_0^2 \cot^2 i - h^2}}{2h} - \frac{h \operatorname{tg} i}{2} \log \cdot \left[\frac{\sqrt{x_0^2 \cot^2 i - h^2} + x_0 \cot i}{h} \right],$$

o la curva di 3.^o ordine:

$$z_0^2 = \frac{\operatorname{tg}^4 i}{9h} (x_0 \cot^2 i - 4h)^2,$$

o la trattrice:

$$z_0 = h \cot i \cdot \log \left[\frac{h \cot i + \sqrt{h^2 \cot^2 i - x_0^2}}{x_0} \right] - \sqrt{h^2 \cot^2 i - x_0^2}.$$

Si vede quindi che « fra le superficie di rivoluzione determinate si trova anche la superficie di LIOUVILLE; per essa fra le inclinazioni i e i_1 e il rapporto di similitudine n ha luogo la relazione $n = \frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i}$ ».

e) Nella superficie di rivoluzione che ha per meridiano la linea:

$$x_0 = a \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{z_0}{a} \operatorname{tg} i \right),$$

consideriamo le eliche le cui tangenti sono inclinate all'asse delle z dell'angolo costante i . Siccome dalla precedente si ha:

$$z_0 = a \cot i \cdot \operatorname{arcsen} \left(\frac{x_0}{a} \right),$$

e siccome $z_0 = U$, $x_0 = R$, si può prendere: $R = u$, $U = a \cot i \cdot \operatorname{arc} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{u}{a} \right)$ ed allora, applicando le (10), si deduce:

$$x = \frac{u \sqrt{a^2 - u^2}}{a}, \quad y = \frac{u^2}{a}, \quad z = a \cot i \cdot \operatorname{arc} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{u}{a} \right).$$

Eliminando u fra le due prime precedenti, si ha: $x^2 + y^2 = ay$, equazione di un cerchio passante per l'origine e il cui centro si trova sull'asse delle y .

Dunque « sulla superficie di rivoluzione che ha per meridiano la curva $x_0 = a \operatorname{sen} \left(\frac{z_0}{a} \operatorname{tg} i \right)$ le eliche, le cui tangenti sono inclinate all'asse di rotazione dell'angolo costante i , sono eliche circolari e i cilindri sui quali esse sono descritte contengono l'asse ».

Consideriamo su tale superficie un'altra elica appartenente a un cilindro colle generatrici parallele all'asse di rotazione; la proiezione equatoriale dell'elica circolare è rappresentata in coordinate polari dall'equazione $R = a \operatorname{sen} u$; se quindi indichiamo con i_1 l'inclinazione delle tangenti della nuova elica sull'asse delle z , si avrà dalle (10₂):

$$x = a \operatorname{sen} u \cdot \cos \int \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 i_1}{\operatorname{tg}^2 i} - \cos^2 u}}{\operatorname{sen} u} du,$$

$$y = a \operatorname{sen} u \cdot \operatorname{sen} \int \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 i_1}{\operatorname{tg}^2 i} - \cos^2 u}}{\operatorname{sen} u} du, \quad z = a \cdot \cot i \cdot u.$$

Sia ora un'iperboloide di rivoluzione a una falda le cui generatrici sono inclinate all'asse dell'angolo i ; una di tali rette si può considerare come una elica, per la quale si ha: $R = \frac{b}{\operatorname{sen} u}$ con b costante; allora le (10₂) ci danno per qualsivoglia altra elica della stessa superficie:

$$x_1 = \frac{b}{\operatorname{sen} u} \cdot \cos \int \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 i_1}{\operatorname{tg}^2 i} - \cos^2 u}}{\operatorname{sen} u} du,$$

$$y_1 = \frac{b}{\operatorname{sen} u} \cdot \operatorname{sen} \int \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 i_1}{\operatorname{tg}^2 i} - \cos^2 u}}{\operatorname{sen} u} du, \quad z_1 = -b \cot i \cdot \cot u,$$

le quali dimostrano che la superficie ha per linea meridiana l'iperbole:

$$\frac{x_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{(b \cdot \cot i)^2} = 1.$$

Confrontando queste equazioni colle precedenti, si deduce:

$$\frac{x}{a \operatorname{sen} u} = \frac{x_1}{b} \operatorname{sen} u, \quad \frac{y}{a \operatorname{sen} u} = \frac{y_1}{b} \operatorname{sen} u;$$

se allora teniamo conto delle formole che ci danno z e z_1 e osserviamo che:

$$\operatorname{sen} u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} = \frac{b}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}},$$

si ricava:

$$x = ab \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}; \quad y = ab \cdot \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}; \quad z = -a \cot i \cdot \operatorname{arc} \cdot \cot \left(\frac{z_1}{b} \operatorname{tg} i \right) \quad (a)$$

$$x_1 = ab \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad y_1 = ab \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad z_1 = -b \cdot \cot i \cdot \cot \left(\frac{z}{a} \operatorname{tg} i \right). \quad (b)$$

Si ha dunque « considerando l'iperboloide di rivoluzione a una falda S_1 di cui la linea meridiana è l'iperbole $\frac{x_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{(b \cot i)^2} = 1$ e la superficie di rivoluzione S generata dalla linea meridiana $x_0 = a \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{z_0}{a} \operatorname{tg} i \right)$, le formole (a), (b) trasformano rispettivamente S in S_1 ed S_1 in S . Proprietà di questa trasformazione sono le seguenti:

- 1.° I meridiani delle due superficie si trasformano gli uni negli altri.
- 2.° Le proiezioni equatoriali di due linee corrispondenti sono inverse rispetto all'origine degli assi.

3.° Qualunque elica della superficie primitiva appartenente a un cilindro colle generatrici parallele all'asse di rotazione viene ridotta in una linea della stessa specie sulla superficie trasformata; e per di più le inclinazioni delle due eliche sulle generatrici dei rispettivi cilindri sono le medesime.

4.° Le generatrici rettilinee dell'iperboloide corrispondono sulla superficie S ad eliche circolari ».

f) Osservando che le due prime (11₂) hanno la stessa forma delle due prime (9₂) si giunge anche per le geodetiche principali d'elicoide alla proprietà « se la proiezione equatoriale di una geodetica principale d'elicoide tracciata sopra una data superficie di rivoluzione è rappresentata in coordinate polari dall'equazione $R = \varphi(u)$, la proiezione equatoriale di qualsivoglia altra geodetica principale d'elicoide tracciata sulla stessa superficie è rappresentata dall'altra equazione: $R = \varphi\left(\frac{p_1}{p} v\right)$ ».

E quindi si ricava come conseguenza « se una sola di tali linee ha per proiezione equatoriale una spirale logaritmica o di Archimede tutte le altre linee della stessa specie tracciate sulla medesima superficie hanno la stessa proprietà ».

Vediamo se una linea può avere contemporaneamente le due proprietà di essere una lossodromia della superficie da essa generata ruotando attorno a una retta e una geodetica principale dell'elicoide da essa generato muovendosi di moto elicoidale intorno alla stessa retta. Basterà ricavare R dall'equazione che si ottiene eguagliando fra loro le due espressioni di z , date dalla terza (9₁) e dalla terza (11₁), cioè dall'equazione:

$$R^4 = p^2 \cot^2 i \cdot R^2 - p^2 R'^2. \quad (16)$$

Questa si può scrivere:

$$p \cdot \frac{dR}{R \sqrt{p^2 \cot^2 i - R^2}} = du,$$

e quindi coll'integrazione dà:

$$-\log \cdot \frac{p \cot i + \sqrt{p^2 \cot^2 i - R^2}}{R} = u \cot i - \log a,$$

con a costante. Si deduce da questa:

$$R = \frac{2ap \cdot \cot i}{e^{\cot i \cdot u} + a^2 e^{-\cot i \cdot u}},$$

la quale riduce la terza delle (11₁) all'altra:

$$z = -2a^2 p \cot i \cdot \frac{e^{-\cot i \cdot u}}{e^{\cot i \cdot u} + a^2 e^{-\cot i \cdot u}}.$$

Eliminando u fra quest'equazione e quella che dà R , si ottiene:

$$R^2 + z^2 + 2p \cot i \cdot z = 0,$$

la quale rappresenta un cerchio di raggio $p \cot i$ che passa per l'origine delle coordinate ed ha il centro sull'asse delle z .

Dunque « *fra le lossodromie delle superficie di rivoluzione quelle che sono anche geodetiche principali dell'elicoide da esse generato muovendosi di moto elicoidale attorno all'asse di rotazione sono descritte sopra una sfera; fra il raggio r di tale sfera, il parametro p del moto elicoidale e l'angolo costante i sotto il quale le linee segano i meridiani ha luogo la relazione $r = p \cot i$ ».*

g) Chiamiamo S la superficie di rivoluzione generata dalla linea L rappresentata dalle equazioni:

$$x = R \cdot \cos\left(\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} u\right), \quad y = R \cdot \sin\left(\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} u\right), \quad z = \int \sqrt{R^2 \cot^2 i - R^2} \cdot du, \quad (9_2)$$

e S_1 quella generata dalla linea L_1 rappresentata dalle equazioni:

$$x_1 = R \cdot \cos\left(\frac{p_1}{p} u\right), \quad y_1 = R \cdot \sin\left(\frac{p_1}{p} u\right), \quad z_1 = \frac{1}{p} \int R^2 du. \quad (11_2)$$

Supponendo data la funzione $R(u)$ ed i, p fissi, le due superficie S e S_1 sono completamente determinate; dando alle costanti i_1 e p_1 tutti i valori possibili, si hanno nelle (9₂) le equazioni di tutte le lossodromie tracciate su di S e nelle (11₂) le equazioni di tutte le geodetiche principali d'elicoide tracciate sopra S_1 . Osservando allora che, per l'indeterminazione delle costanti i_1 e p_1 , si può sempre fare in modo, anche quando ne sia fissata una, che le due prime equazioni (9₂) e le due prime (11₂) divengano le medesime, si ha il teorema « *se si considerano le superficie S, S_1 generate dalla rotazione attorno all'asse delle z delle linee rappresentate dalle equazioni (9₂), (11₂), nelle quali si abbia $\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} = \frac{p_1}{p}$, e i cilindri aventi le generatrici parallele all'asse di rotazione, si ha che ogni cilindro che intersechi S in una lossodromia o S_1 in una geodetica principale d'elicoide, interseca rispettivamente S_1 in una geodetica principale d'elicoide o S in una lossodromia ».*

Fra le terze equazioni (9₂), (11₂) si può eliminare R ; infatti si ha:

$$R^2 = pz'_1, \quad R'^2 = \frac{pz''_1}{4z'_1},$$

ed allora:

$$z = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{p(4 \cot^2 i \cdot z'^2_1 - z''^2_1)}{z'_1}} du. \quad (\alpha)$$

Perciò « se si prende una geodetica principale L_1 di un elicoide avente per asse l'asse delle z , rappresentata dalle equazioni (11₂) e a partire dal piano $z = 0$ si prendono sulle ordinate parallele all'asse dei segmenti z dati dall'equazione (α), il luogo L degli estremi è una linea che, ruotando attorno all'asse delle z , genera una superficie di rivoluzione sulla quale essa è losodromia; tale linea sega i meridiani sotto l'angolo i_1 dato dalla relazione $\operatorname{tg} i_1 = \frac{p_1}{p} \operatorname{tg} i$ ».

Questo teorema può servire a trovare S quando si conosca S_1 ; si supponga ad es. che S_1 sia un cono, siccome in questo caso il meridiano è una retta che incontra l'asse delle z , si potrà nelle (11) prendere:

$$U = v, \quad R = av,$$

essendo a una costante e v una variabile. Se p_1 è il parametro del moto elicoidale, le (11) dànno:

$$x = av \cdot \cos\left(-\frac{p_1}{a^2 v}\right), \quad y = av \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{p_1}{a^2 v}\right), \quad z = v.$$

Per mettere queste equazioni sotto la forma delle (11₂), si ponga:

$$\frac{p_1}{a^2 v} = \frac{p_1}{p} u,$$

ed allora le precedenti divengono:

$$x_1 = \frac{p}{au} \cos\left(\frac{p_1}{p} u\right), \quad y_1 = -\frac{p}{au} \operatorname{sen}\left(\frac{p_1}{p} u\right), \quad z_1 = \frac{p}{a^2 u},$$

le quali dimostrano intanto che « le geodetiche principali d'elicoidi tracciate sopra un cono di rivoluzione si proiettano sul piano dell'equatore in tante spirali iperboliche ».

Applicando la (α) si ottiene in questo caso:

$$z = -\frac{p}{a} \left\{ \frac{\sqrt{1 - u^2 \cot^2 i}}{u} + \cot i \cdot \operatorname{arc} \cdot \operatorname{sen}(u \cot i) \right\},$$

e se fra quest'equazione e l'altra $R = \frac{p}{au}$ si elimina u , si ha:

$$z = -\frac{p}{a} \left\{ \frac{\sqrt{a^2 R^2 - p^2 \cot^2 i}}{u} + \cot i \cdot \arcsen \left(\frac{p \cot i}{a R} \right) \right\},$$

che rappresenta la linea meridiana della superficie S .

Proponiamoci di vedere come si deve prendere la funzione $R(u)$ acciocchè, oltre aver luogo la proprietà enunciata nel teorema precedente per le superficie S , S_i , si abbia *inversamente* che i cilindri seganti S in una geodetica principale d'elicoide intersechino S_i in una lossodromia.

Dalle (9₂) si ricava che le coordinate dei punti del meridiano di S sono:

$$R, \quad \int \sqrt{R^2 \cot^2 i - R'^2} \cdot du,$$

e perciò, applicando le (11), si trova che le geodetiche principali d'elicoide tracciate su S sono rappresentate dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \cos \left(\pi \int \frac{\sqrt{R^2 \cot^2 i - R'^2}}{R^2} du \right), & y &= R \cdot \sin \left(\pi \int \frac{\sqrt{R^2 \cot^2 i - R'^2}}{R^2} du \right), \\ z &= \int \sqrt{R^2 \cot^2 i - R'^2} \cdot du, \end{aligned}$$

essendo π il parametro del moto elicoidale.

Dalle (11₂) si ricava che le coordinate dei punti del meridiano di S sono:

$$R, \quad \frac{1}{p} \int R^2 du,$$

e perciò, applicando le (9), si trova che le lossodromie tracciate su S_i sono rappresentate dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \cos \left(\frac{\operatorname{tg} i}{p} \int \frac{\sqrt{p^2 R'^2 + R^4}}{R} du \right), & y &= R \cdot \sin \left(\frac{\operatorname{tg} i}{p} \int \frac{\sqrt{p^2 R'^2 + R^4}}{R} du \right), \\ z &= \frac{1}{p} \int R^2 du, \end{aligned}$$

essendo i l'inclinazione delle lossodromie sui meridiani.

La condizione posta è soddisfatta quando riescano eguali gli argomenti delle funzioni circolari che entrano nelle due terne d'equazioni trovate; tale eguagliamento conduce all'equazione:

$$p \int \sqrt{\frac{\pi^2 \cot^2 i - R^2}{p^2 \cot^2 i \cdot \pi^2 \cot^2 i - R^4}} \cdot \frac{dR}{R} = u + \text{cost.} \quad (17)$$

Osservando che in questa equazione una delle costanti π , $\cot i$ è arbitraria, poichè esse compariscono moltiplicate fra loro si ha: « se si considerano le superficie di rivoluzione S , S_1 generate dalla rotazione attorno all'asse delle z delle linee rappresentate dalle equazioni (9_2) , (11_2) nelle quali $\frac{\text{tg } i_1}{\text{tg } i} = \frac{p_1}{p}$ ed R è dato in funzione di u dalla relazione (17) , e i cilindri che hanno le generatrici parallele all'asse di rotazione, si ha che ogni cilindro che seghi S in una lossodromia o in una geodetica principale d'elicoide sega S_1 rispettivamente in una geodetica principale d'elicoide o in una lossodromia. Le superficie trovate sono le sole che abbiano la proprietà enunciata ».

§ 4.

Applicazioni delle formole relative alle linee d'ombra. — a) Se, considerando la linea L_1 rappresentata dalle (12_1) formiamo l'altra linea Λ_1 definita dalle equazioni:

$$\xi_1 = x_1, \quad \eta_1 = y_1, \quad \zeta_1 = m z_1,$$

con m costante, la nuova linea Λ_1 si può considerare come una linea d'ombra relativa a raggi paralleli della superficie di rivoluzione generata dalla sua rotazione attorno all'asse delle z .

Chiamando θ_1 l'inclinazione su quest'asse del nuovo sistema di raggi luminosi, si avrà:

$$\cot \theta_1 = m \cdot \cot \theta;$$

se per di più si osserva che nella terza (13_1) , la costante h è arbitraria, si ha « se si prende una linea d'ombra di una superficie di rivoluzione e si variano le ordinate parallele all'asse di rotazione in un rapporto costante qualunque m , si ottiene sempre una linea d'ombra di una nuova superficie di rivoluzione ».

b) La superficie che si suppone illuminata da raggi paralleli sia quella di LIOUVILLE; indicando con m la lunghezza costante delle tangenti della tratte meridiana, si ha:

$$z_0 = \sqrt{m^2 - x_0^2} - m \log \cdot \frac{m + \sqrt{m^2 - x_0^2}}{x_0},$$

e a causa dell'arbitrarietà del significato geometrico della variabile u che entra nelle (12) , potremo prendere:

$$R = u, \quad U = \sqrt{m^2 - u^2} - m \log \cdot \frac{m + \sqrt{m^2 - u^2}}{u}.$$

Siccome di qui si ricava: $U' = \frac{\sqrt{m^2 - u^2}}{u}$, le (12) dànno:

$$x = \frac{u^2 \cot \theta}{\sqrt{m^2 - u^2}}, \quad y = \sqrt{u^2 - x^2} = \frac{u}{\sin \theta} \sqrt{\frac{m^2 \sin^2 \theta - u^2}{m^2 - u^2}},$$

$$z = \sqrt{m^2 - u^2} - m \log \cdot \frac{m + \sqrt{m^2 - u^2}}{u}.$$

Se dalle due prime eliminiamo u , si giunge all'equazione di 4.º grado:

$$(x^2 + y^2)^2 \cot^2 \theta + x^2(x^2 + y^2) = m^2 x^2,$$

e perciò « nella superficie di LIOUVILLE le proiezioni equatoriali delle linee d'ombra relative a raggi luminosi paralleli sono curve del 4.º ordine passanti per l'origine degli assi e simmetriche rispetto a questo punto ».

c) La linea d'ombra di una superficie di rivoluzione, a causa della simmetria della superficie, si compone ordinariamente del sistema di due linee disposte simmetricamente rispetto al piano meridiano principale; in alcuni casi queste due linee si riducono a una sola.

Determiniamo la superficie di rivoluzione in cui una linea d'ombra, relativa a raggi paralleli, si compone di due linee tracciate sopra due cilindri circolari aventi le generatrici parallele all'asse. Indicando con $\frac{r}{2}$ il raggio della sezione retta dei cilindri contenenti le eliche, avremo: $R = r \cdot \sin(m + u)$, con m costante; sarà quindi:

$$\cot \theta \int \frac{R'}{\cos u} du = \cot \theta (r \cos m \cdot u + r \sin m \cdot \log \cos u),$$

e le (12₁) dànno:

$$x_1 = r \cdot \sin(m + u) \cdot \cos u; \quad y_1 = r \cdot \sin(m + u) \cdot \sin u;$$

$$z_1 = r \cot \theta (\cos m \cdot u + \sin m \cdot \log \cos u).$$

Se dunque indichiamo con x_0, z_0 le coordinate della curva meridiana, si ha:

$$x_0 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r \cdot \sin(m + u); \quad z_0 = z = r \cot \theta (\cos m \cdot u + \sin m \cdot \log \cos u). \quad (18)$$

Se si fa uso delle (12₂), abbiamo:

$$x_2 = r \cdot \sin(m + u) \cdot \frac{\cot \theta_1}{\cot \theta} \cos u; \quad y_2 = r \sin(m + u) \sqrt{1 - \frac{\cot^2 \theta_1}{\cot^2 \theta} \cos^2 u};$$

$$z_2 = r \cot \theta \cdot (\cos m \cdot u + \sin m \cdot \log \cos u),$$

che rappresentano qualunque altra linea d'ombra della stessa superficie. Ponendo $\frac{\cot \theta_1}{\cot \theta} \cos u = \cos v$, d'onde $\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta} \cos v = \cos u$ si ottiene:

$$R = r \operatorname{sen} \left[m + \operatorname{arc} \cdot \cos \left(\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta} \cos v \right) \right],$$

che è l'equazione polare della proiezione equatoriale di una linea d'ombra qualunque.

Chiamando ξ , η le coordinate cartesiane dei punti di questa proiezione, l'ultima equazione diviene:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 + r^2 \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \theta_1}{\operatorname{tg}^2 \theta} - \cos^2 m \right) \xi^2 - r^2 \cos^2 m \cdot \eta^2 = 2r \cdot \operatorname{sen} m \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta} \cdot \xi (\xi^2 + \eta^2). \quad (19)$$

Dunque « la superficie di rivoluzione in cui vi è una linea d'ombra composta di due curve tracciate sopra due cilindri circolari è quella che ha per meridiano la curva rappresentata dalle (18); qualunque altra linea d'ombra della stessa superficie si proietta sul piano dell'equatore nella curva del 4.º ordine (19) ».

Si supponga che i due cilindri contenenti le due curve che col loro insieme formano la linea d'ombra della superficie, abbiano i loro assi posti in un piano passante per l'asse di rotazione; si avrà allora $m = 0$ e quindi in questo caso il meridiano della superficie è la curva:

$$x_0 = r \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{z_0}{a} \operatorname{tang} \theta \right),$$

e qualunque altra linea d'ombra si proietta sul piano dell'equatore nella linea del 4.º ordine:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = r^2 (\xi^2 + \eta^2) - r^2 \frac{\operatorname{tg}^2 \theta_1}{\operatorname{tg}^2 \theta} \xi^2,$$

che è simmetrica rispetto all'origine.

Per quanto è stato dimostrato al § 3, caso e) si può aggiungere che la linea d'ombra è ora un'elica circolare appartenente a un cilindro colle generatrici parallele all'asse.

Se poi la linea d'ombra è tracciata sopra un unico cilindro circolare, allora il cerchio sezione retta ha il centro sull'asse delle x e conseguentemente $m = \frac{\pi}{2}$; la superficie ha allora per meridiano la curva logaritmica:

$$z_0 = r \cdot \cot \theta \cdot \log \left(\frac{x_0}{r} \right),$$

e qualunque altra linea d'ombra ha per proiezione il cerchio:

$$\xi^2 + \eta^2 = r \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta} \xi,$$

che ha il centro sull'asse delle x .

d) Nel problema precedente si è trovato una particolare superficie che ammette per linea d'ombra un'elica; più generalmente ora vogliamo determinare quelle superficie di rivoluzione in cui ciascuna delle due parti che compongono una sua linea d'ombra è un'elica di un cilindro colle generatrici parallele all'asse di rotazione. Eguagliando le due espressioni di z , date dalla terza (10,) e dalla terza (12,), si ha l'equazione:

$$\frac{R'}{R} = \cot i \cdot \frac{\cos u}{\sqrt{\cot^2 \theta - \cot^2 i \cdot \cos^2 u}},$$

la quale, moltiplicata per du e integrata, offre:

$$R = a(\cot i \sin u + \sqrt{\cot^2 \theta - \cot^2 i \cdot \cos^2 u}),$$

con a costante arbitraria. Questa è l'equazione in coordinate polari della proiezione equatoriale della linea d'ombra; passando alle coordinate cartesiane, si ottiene:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2a \cdot \cot i \cdot (\xi^2 + \eta^2)\eta = a^2(\cot^2 \theta - \cot^2 i)(\xi^2 + \eta^2),$$

e dividendo per $(\xi^2 + \eta^2)$:

$$\xi^2 + \eta^2 - 2a \cdot \cot i \cdot \eta = a^2(\cot^2 \theta - \cot^2 i),$$

equazione di un circolo di raggio $a \cot \theta$ avente il centro sull'asse delle y alla distanza $a \cot i$ dall'origine.

Dunque « se, relativamente a raggi luminosi paralleli, una superficie di rivoluzione ha per linea d'ombra il complesso di due eliche tracciate sopra cilindri colle generatrici parallele all'asse di rotazione, ciascuna di tali linee è un'elica circolare ».

Determinando la curva meridiana della superficie col solito metodo, si trova la linea:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg} \theta z_0 &= a \cdot \operatorname{arc} \cdot \cos \left[\frac{x_0^2 + a^2(\cot^2 i - \cot^2 \theta)}{2a \cot i \cdot x_0} \right] - \\ &- a \cdot \operatorname{arc} \cdot \sin \left[\frac{\sqrt{4a^2 \cot^2 i \cdot x_0^2 - \{x_0^2 + a^2(\cot^2 i - \cot^2 \theta)\}}}{2a \cot i \cdot x_0} \right], \end{aligned}$$

Si osservi che le due eliche che col loro insieme formano la linea d'ombra incontrano l'asse di rotazione sempre e soltanto se $\theta = i$.

Se, facendo uso delle (12₂) e operando come nel problema precedente, determiniamo l'equazione in coordinate polari della proiezione equatoriale di qualsivoglia altra linea d'ombra della superficie, si ottiene:

$$R = a \left(\cot i \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \theta_1}{\operatorname{tg}^2 \theta} \cdot \cos^2 v} + \sqrt{\cot^2 \theta - \cot^2 i \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \theta_1}{\operatorname{tg}^2 \theta} \cdot \cos^2 v} \right),$$

la quale, trasformata in coordinate cartesiane ξ , η e resa razionale, diviene:

$$[\xi^2 + \eta^2 + a^2(\cot^2 i - \cot^2 \theta)]^2 = 4a^2 \cot^2 i \cdot \cot^2 \theta [(\operatorname{tg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta_1) \xi^2 + \operatorname{tg}^2 \theta \cdot \eta^2],$$

che rappresenta una curva del 4.^o ordine.

Ricordando quindi il teorema immediatamente precedente, si può aggiungere « sopra una superficie di rivoluzione, illuminata da raggi paralleli, non può trovarsi più di una linea d'ombra di cui ciascuna parte sia un'elica di un cilindro colle generatrici parallele all'asse ».

e) Troviamo le superficie di rivoluzione in cui una linea d'ombra, relativa a raggi luminosi paralleli, è l'insieme di due geodetiche della superficie. Eguagliando i due valori di z_1 dati dalla terza (12₁) e dalla terza (8₁) si ha l'equazione:

$$a \frac{R'}{R \sqrt{R^2 - a^2}} = \frac{\cos u}{\sqrt{\cot^2 \theta + \cos^2 u}},$$

la quale, moltiplicata per du e integrata, dà:

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{a}{R} \right) = k - \operatorname{arc} \operatorname{sen} (\operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} u),$$

da cui:

$$R = \frac{a}{\operatorname{sen} k \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \operatorname{sen}^2 u} - \cos k \cdot \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} u},$$

con k costante arbitraria. Tale è l'equazione in coordinate polari della proiezione equatoriale della linea d'ombra: passando alle coordinate cartesiane ξ , η si ottiene:

$$\operatorname{sen}^2 k \cdot \xi^2 + (\cos^2 \theta - \cos^2 k) \eta^2 = 2a \cos k \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \eta + a^2,$$

equazione di una conica.

Avuto l'espressione di R in funzione di u le (12₁) ci danno la linea d'ombra richiesta e sarebbe facile dedurre l'equazione della linea meridiana della superficie. Cercando, collo stesso metodo esposto altra volta, l'equazione della proiezione equatoriale di un'altra linea d'ombra qualunque della superficie di rivoluzione, si trova una linea del 4.^o ordine.

E perciò « sopra una superficie di rivoluzione, illuminata da raggi paralleli, non può trovarsi che una sola linea d'ombra ciascuna parte della quale sia geodetica della superficie e ciascuna di queste linee ha per proiezione equatoriale una conica ».

La linea d'ombra trovata, essendo geodetica sulla superficie di rivoluzione, è pure geodetica sulla superficie cilindrica tangente alla superficie lungo tale linea; la linea d'ombra è dunque un'elica le cui normali principali incontrano l'asse delle z .

Abbiamo dunque il teorema « se le normali principali di un'elica incontrano una retta fissa r non parallela alle generatrici del cilindro che la contiene, la proiezione normale dell'elica sopra un piano perpendicolare ad r è una conica ».

Onde la linea d'ombra si riduca a una sola geodetica, occorre che la proiezione equatoriale sia simmetrica rispetto all'asse delle x , il che avviene quando $a \cos k \sin \theta = 0$; ma non può essere $a = 0$, in causa del significato geometrico trovato per la costante a nel § 3: d'altronde $\sin \theta = 0$ corrisponde all'ipotesi dei raggi luminosi paralleli all'asse, nel qual caso la linea d'ombra è costituita da paralleli geodetici. Rimane quindi la sola soluzione $k = \frac{\pi}{2}$; allora si ha:

$$R = \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cdot \cos^2 u}};$$

$$z = - \frac{2a \cos \theta}{(\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cdot \cos^2 u} - \sin \theta \cdot \cos u)^2 + \cos^2 \theta},$$

e la linea meridiana è rappresentata dall'equazione:

$$x_0^2 + z_0^2 + \frac{2az_0}{\cos \theta} = 0,$$

che è quella di un cerchio col centro sull'asse delle z ; in questo caso la superficie di rivoluzione è una sfera. La presenza di tale superficie fra quelle che hanno la detta proprietà era da prevedersi.

È da notarsi infine che soddisfano alla condizione proposta tutte le superficie di rivoluzione quando siano illuminate da raggi perpendicolari all'asse; ma siccome in questo caso la linea d'ombra si riduce a un meridiano, questo caso non può essere contenuto nelle nostre formole.

f) Il sig. DE-LA-GOURNERIE ha dimostrato che le sole superficie di rivoluzione che, rispetto a raggi luminosi paralleli, ammettono una linea d'ombra piana sono quelle di 2.^o ordine.

Applicando le nostre formole si possono determinare, più generalmente, le superficie di rivoluzione che, rispetto a raggi paralleli, ammettono per linea d'ombra il sistema di due curve piane.

Potendosi supporre, senza togliere nulla alla generalità, che il piano di una delle due linee passi per l'origine, le coordinate de' suoi punti verificano l'equazione:

$$z_1 = ax_1 + by_1,$$

con a e b costanti. Avendo allora presenti le (12.), si trova dopo alcuni calcoli:

$$\log R + \text{cost.} = \int \frac{(a \operatorname{sen} u - b \cos u) \cos u}{(a \cos u + b \operatorname{sen} u) \cos u - \cot \theta} \cdot du.$$

Determinato R in funzione di u , il problema si può considerare risolto.

g) Determiniamo le superficie di rivoluzione che ammettono una linea d'ombra piana quando sono illuminate da raggi che emanano da un punto fisso situato a distanza finita fuori dall'asse di rotazione.

Per la simmetria della superficie, il piano della linea d'ombra deve essere perpendicolare al piano del meridiano principale, cioè al piano coordinato $y = 0$; dobbiamo dunque avere: $z = k + \cot i \cdot x$ e prendendo le coordinate dei punti della linea sotto la forma (1), sarà:

$$\cos f(u) = \frac{(U - k) \operatorname{tg} i}{R}.$$

Confrontando questa relazione coll'altra:

$$\cos f(u) = \frac{RU' - R'U}{aU'},$$

che si ricava dalle (13), abbiamo:

$$RR' - R^2 \frac{U'}{U} = a \cdot \operatorname{tg} i \cdot \frac{U'(U - k)}{U},$$

equazione che si rende lineare col porre $R^2 = 2t$; ed allora, integrandola, ci dà:

$$R^2 + mU^2 - 2a \cdot \operatorname{tg} i \cdot U + ak \cdot \operatorname{tg} i = 0,$$

con m costante arbitraria. Quest'equazione, rappresentante il meridiano della superficie di rivoluzione domandata, è quella di una conica di cui un asse coincide coll'asse delle z ; abbiamo dunque il teorema « *le sole superficie di rivoluzione le quali, rispetto a raggi luminosi concorrenti, ammettono una linea d'ombra piana, sono quelle di 2.º ordine* ».

Questo teorema è una generalizzazione di quello ricordato del sig. DE-LA-GOURNERIE.

h) Determiniamo le superficie di rivoluzione nelle quali una linea di ombra relativa a raggi concorrenti, si compone di due curve ciascuna delle quali è tracciata sopra un cilindro circolare colle generatrici parallele all'asse di rotazione. Avendosi in questo caso:

$$R = r \cdot \sin(m + u), \quad (20)$$

con r , m costanti, risulta:

$$\begin{aligned} \int \frac{R'}{R - a \cos u} du &= \int \frac{r \cos m \cdot \cos u - r \sin m \cdot \sin u}{r \cos m \cdot \sin u + (r \sin m - a) \cos u} \cdot du = \\ &= \log \{ r \cos m \cdot \sin u + (r \sin m - a) \cos u \} - a \int \frac{\sin u \cdot du}{r \cos m \cdot \sin u + (r \cos m - a) \cos u}. \end{aligned}$$

Notando che l'integrale del 2.º membro si riduce alle funzioni algebriche ponendo: $\cot u = v$, dopo di che la quadratura si può completamente effettuare, si ottiene facendo uso della terza delle (13.):

$$z = h e^{\gamma \left(\frac{\pi}{2} - u \right)} \cdot (\sin u)^{\beta} \cdot \{ (r \sin m - a) \cos u + r \cos m \cdot \sin u \}^{\alpha}, \quad (21)$$

dove α , β , γ sono costanti definite dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \frac{ar^2 \cdot \cos^2 m}{(r \sin m - a)(a^2 + r^2 - 2ar \cdot \sin m)}; & \beta &= -\frac{a}{r \sin m - a}; \\ \gamma &= -\frac{ar \cdot \cos m}{a^2 + r^2 - 2ar \cdot \sin m}. \end{aligned}$$

Si conclude quindi « le superficie domandate sono quelle che hanno per meridiano la curva rappresentata dalle equazioni $x_0 = R$, $z_0 = z$, dove R e z sono dati dalle (20), (21) ».

Operando come si è fatto nell'applicazione c) di questo paragrafo si trova che le altre linee d'ombra della superficie determinata si proiettano sul piano dell'equatore in curve del 4.º ordine.

Se la linea d'ombra si riduce a una sola curva tracciata sopra un cilindro circolare, allora, dovendo la proiezione equatoriale della linea essere simmetrica rispetto all'asse delle x , si avrà $m = \frac{\pi}{2}$ e perciò:

$$R = r \cdot \cos u, \quad z = h \cdot (\cos u)^{\frac{r}{r-a}}$$

Chiamando quindi x_0, z_0 le coordinate dei punti della linea meridiana posta nel piano $y = 0$ abbiamo:

$$z_0 = h \left(\frac{x_0}{r} \right)^{\frac{r}{r-a}},$$

con h costante arbitraria, indicando con m la costante $\frac{h}{\frac{r}{r-a}}$, risulta che « le superficie domandate sono quelle che hanno per linea meridiana la curva:

$$z_0 = m \cdot x_0^{\frac{r}{r-a}}.$$

Per quanto è stato dimostrato al caso c) di questo paragrafo tutte le altre linee d'ombra delle superficie ora determinate hanno per proiezione equatoriale dei cerchi i cui centri si trovano sull'asse delle x ; la linea precedente si riduce a una parabola, e la superficie a un paraboloide di rivoluzione, quando $a = \frac{r}{2}$, cioè quando l'asse del cilindro circolare contenente la linea d'ombra che si considera passa per il punto luminoso. La medesima linea si riduce a un'iperbole equilatera avente per assintoti gli assi delle x e delle z quando $a = 2r$, cioè quando la distanza del punto luminoso dall'asse di rotazione è doppia del diametro del cerchio nel quale si proietta la linea d'ombra che si considera.

§ 5.

Corrispondenza fra le linee d'ombra. — Siano S_p, S_c due superficie di rivoluzione aventi l'asse in comune ed illuminate la prima da raggi paralleli e la seconda da raggi concorrenti; teniamo ferme le condizioni messe al § 2 circa la posizione dei punti luminosi. Variamo in tutti i modi possibili l'inclinazione dei raggi che illuminano S_p sull'asse e la distanza del punto che illumina S_c dall'asse; siano $L_p(x_p, y_p, z_p), L_c(x_c, y_c, z_c)$ due qualunque delle infinite linee d'ombra ottenute sulla S_p e sulla S_c ; avremo per le (12₂), (13₂):

$$\begin{aligned} x_p &= R_p \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta_1} \cos u, & y_p &= R_p \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta_1} \cos^2 u}, & z_p &= \cot \theta \int \frac{R'_p}{\cos u} du; \\ x_c &= R_c \frac{a}{a_1} \cos u, & y_c &= R_c \sqrt{1 - \frac{a^2}{a_1^2} \cos^2 u}, & z_c &= h \cdot e^{\int \frac{R'_c}{R_c - a \cdot \cos u} \cdot du}. \end{aligned}$$

Si può sempre rendere $x_p = x_c$, $y_p = y_c$ prendendo $\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta_1} = \frac{a}{a_1}$, $R_p = R_c = R$; allora, per vedere quale relazione passa fra z_p e z_c , basta eliminare $\cos u$ fra le ultime delle precedenti equazioni e si ottiene:

$$\frac{R'}{\operatorname{tg} \theta \cdot z'_p} = \frac{R z'_c - R' z_c}{a z'_c};$$

quest'equazione, integrata successivamente rapporto a z_c e a z_p dà:

$$z_c = m e^{\int \frac{dR \cdot dz_p}{R dz_p - a \cdot \cot \theta \cdot dR}}, \quad z_p = n + a \cdot \cot \theta \cdot \int \frac{dR dz_c}{R dz_c - z_c dR},$$

con m, n costanti arbitrarie. In queste equazioni la variabile indipendente non è fissata.

Se indichiamo con ξ_p, ζ_p le coordinate dei punti della linea meridiana di S_p e con ξ_c, ζ_c quelle dei punti della linea meridiana di S_c , abbiamo:

$$\xi_p = \xi_c = R; \quad \zeta_p = z_p; \quad \zeta_c = z_c,$$

e perciò se il meridiano di S_p è rappresentato dall'equazione:

$$\zeta_p = \varphi(\xi_p), \quad (22)$$

la prima delle precedenti dà:

$$\zeta_c = m \cdot e^{\int \frac{\varphi'(\xi_c)}{\varphi'(\xi_c) \cdot \xi_c - a \cot \theta} \cdot d\xi_c}, \quad (23)$$

che è l'equazione del meridiano di S_c . E se la curva meridiana di S_c è rappresentata dall'equazione:

$$\zeta_c = \psi(\xi_c), \quad (24)$$

la seconda delle precedenti dà:

$$\zeta_p = n + a \cot \theta \cdot \int \frac{\psi'(\xi_p)}{\psi'(\xi_p) \cdot \xi_p - \psi(\xi_p)} \cdot d\xi_p, \quad (25)$$

la quale è l'equazione della linea meridiana di S_p .

Abbiamo così il teorema « se due superficie di rivoluzione S_p, S_c sono tali che, illuminando la prima con raggi paralleli e la seconda con raggi concorrenti, si trovi una linea d'ombra dell'una e una dell'altra che abbiano per proiezioni equatoriali una stessa curva, per qualsivoglia altra linea di ombra di una delle due superficie si può trovare una nuova linea d'ombra dell'altra in modo, che le due nuove linee abbiano la stessa proiezione equatoriale. Se θ è l'inclinazione dei raggi luminosi sull'asse di S_p ed a la di-

stanza del punto luminoso dall'asse di S_c , per tutte le coppie di linee d'ombra corrispondenti si ha $a \cot \theta = \text{costante}$; se il meridiano di S_p o quello di S_c è rappresentato dalla (22) o dalla (24), il meridiano di S_c o quello di S_p è rispettivamente rappresentato dalla (23) o dalla (25) ».

Esempio. — Se S_p è un paraboloide, la linea meridiana è una parabola il cui asse coincide coll'asse di rotazione; abbiamo quindi:

$$\zeta_p = \varphi(\xi_p) = \frac{1}{k} \xi_p^2,$$

e la (23) ci dà:

$$\zeta_c = m \sqrt{\xi_c^2 - a k \cot \theta},$$

dalla quale si ricava:

$$m^2 \xi_c^2 - \zeta_c^2 = a k m^2 \cot \theta,$$

equazione di un'iperbole avente l'asse reale sull'asse delle x quando $a k \cot \theta > 0$ e sull'asse delle z quando $a k \cot \theta < 0$.

Perciò « se la superficie S_p è un paraboloide di rivoluzione, la superficie S_c è un'iperboloide di rivoluzione a una falda o a due falde secondo che, la quantità $a k \cot \theta$ è positiva o negativa ».

Il meridiano di S_c sia la curva logaritmica $\zeta_c = k e^{\frac{1}{\alpha} \xi_c}$, avente per asintoto l'asse delle x ; siccome in questo caso:

$$\psi(\xi_c) = k e^{\frac{1}{\alpha} \xi_c},$$

la (25) dà:

$$\zeta_p = n + a \cot \theta \cdot \log \left(\frac{1}{\alpha} \xi_p - 1 \right),$$

dalla quale risulta:

$$\xi_p = \alpha + h e^{\frac{\cot \theta}{a} \cdot \zeta_p}.$$

Quindi « se la superficie S_c ha per meridiano una curva logaritmica il cui asintoto è perpendicolare all'asse di rotazione, la superficie S_p ha per meridiano una curva logaritmica il cui asintoto è parallelo all'asse di rotazione ».

Queste due curve logaritmiche sono eguali fra loro quando $\frac{\cot \theta}{a} = \frac{1}{\alpha}$.

Vediamo se le due superficie S_p , S_c possono essere eguali; eguagliando fra loro le espressioni delle ζ_p , ζ_c date dalle (22), (23) si ottiene l'equazione

differenziale:

$$\varphi' - \frac{1}{\xi} \varphi = \frac{a \cot \theta}{\xi},$$

la quale, integrata, dà:

$$\zeta = \varphi = c\xi - a \cot \theta,$$

con c costante. Questa è l'equazione di una retta; allo stesso risultato si giunge eguagliando fra loro i valori di ζ_p , ζ_c dati dalle (24), (25).

Dunque « le superficie S_p , S_c non possono essere eguali se non quando sono cilindri o coni di rivoluzione ».

Le superficie S_p , S_c hanno, rispetto alle linee d'ombra, la proprietà esposta quando la prima si illumini con raggi paralleli e la seconda con raggi concorrenti; vediamo se esse hanno pure la stessa proprietà quando S_p sia illuminata da raggi concorrenti e S_c con raggi paralleli. Chiamiamo S_{ic} la superficie S_p quando si illumini con raggi concorrenti e sia S_{ip} la superficie che, secondo il concetto precedente, corrisponde alla S_{ic} ; bisogna esprimere che S_{ip} coincide con S_c .

Le superficie S_p , S_{ic} , S_c , S_{ip} (di cui le due prime coincidono) hanno per meridiani le linee rappresentate dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \zeta_p = \varphi(\xi_p); \quad \zeta_{ic} = \varphi(\xi_{ic}); \quad \zeta_c = m e^{\int \frac{\varphi'(\xi_c)}{\varphi'(\xi_c) \cdot \xi_c - a \cot \theta} \cdot d\xi_c}; \\ \zeta_{ip} = n + b \cot \varepsilon \int \frac{\varphi'(\xi_{ip})}{\varphi'(\xi_{ip}) \xi_{ip} - \varphi(\xi_{ip})} \cdot d\xi_{ip}, \end{aligned}$$

essendo b , ε due costanti aventi rispettivamente lo stesso significato delle a , θ .

Prendendo le variabili indipendenti ξ_c , ξ_{ip} sempre eguali fra loro, si potrà porre $\xi_c = \xi_{ip} = \xi$ ed allora l'eguaglianza delle due superficie S_{ip} , S_c è stabilita quando sia $\zeta_c = \zeta_{ip}$; questa condizione porta all'equazione seguente:

$$m e^{\int \frac{\varphi'}{\varphi' \cdot \xi - a \cot \theta} \cdot d\xi} = n + b \cot \varepsilon \int \frac{\varphi'}{\varphi' \cdot \xi - \varphi} \cdot d\xi,$$

la quale colla derivazione dà:

$$m e^{\int \frac{\varphi'}{\varphi' \cdot \xi - a \cot \theta} \cdot d\xi} = b \cot \varepsilon \cdot \frac{\varphi' \xi - a \cot \theta}{\varphi' \xi - \varphi}.$$

E derivando questa logaritmicamente, si giunge all'equazione:

$$\varphi''(a \cot \theta - \varphi) = 0,$$

la quale si sdoppia nelle due:

$$\varphi = a \cot \theta, \quad \varphi'' = 0.$$

La prima di queste porta alla superficie che ha per meridiano una retta perpendicolare all'asse, cioè al piano il quale, nella questione che ci occupa, non ha alcuna importanza. La seconda, integrata, dà:

$$\zeta = \varphi = a\xi + b,$$

con a e b costanti; e perciò « le sole superficie di rivoluzione le quali abbiano la proprietà detta sono i cilindri e i coni ».

§ 6.

Intersezione di una superficie di rivoluzione con un cilindro. — La superficie di rivoluzione sia quella generata dalla linea:

$$x = R \cdot \cos u, \quad y = R \cdot \sin u, \quad z = U, \quad (26)$$

e il cilindro abbia le generatrici parallele al piano coordinato $y = 0$ e inclinate dell'angolo θ sull'asse delle z ; considero la sezione retta di questo cilindro il cui piano passa per l'asse delle y ed è inclinato dell'angolo θ sul piano coordinato $z = 0$; se assumo un nuovo sistema di assi rettangolari, prendendo per nuovo asse delle x l'intersezione del piano della sezione retta considerata col piano coordinato $y = 0$, per nuovo asse delle y quello di prima e per nuovo asse delle z una parallela alle generatrici del cilindro, e chiamiamo x_0, y_0, z_0 le coordinate di un punto qualunque della sezione retta, si ha:

$$x_0 = f(v) \cdot \cos v, \quad y_0 = f(v) \cdot \sin v, \quad z_0 = 0,$$

essendo:

$$r = f(v), \quad (27)$$

l'equazione polare di quella curva. Se sulle generatrici del cilindro, a partire dal piano $z_0 = 0$, si prendono dei segmenti $\chi(v)$ le coordinate x_1, y_1, z_1 degli estremi sono:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f(v) \cos v \cdot \cos \theta - \chi(v) \cdot \sin \theta; & y_1 &= f(v) \cdot \sin \theta; \\ z_1 &= f(v) \cdot \cos v \cdot \sin \theta + \chi(v) \cdot \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Bisogna esprimere che la linea (28) si trova sulla superficie di rotazione generata dalla (26); le equazioni esprimenti tale condizione sono:

$$\left. \begin{aligned} \{f(v) \cos v \cdot \cos \theta - \chi(v) \sin \theta\}^2 + f^2(v) \cdot \sin^2 v &= R^2; \\ f(v) \cos v \cdot \sin \theta + \chi(v) \cdot \cos \theta &= U. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Supposto che θ non sia $\frac{\pi}{2}$, si può sostituire alle (29) le altre due:

$$\left. \begin{aligned} & \{f(v) \cdot \cos v - U \operatorname{sen} \theta\}^2 + f^2(v) \operatorname{sen}^2 v \cdot \cos^2 \theta = R^2 \cos^2 \theta; \\ & \chi(v) = \frac{U - f(v) \cos v \cdot \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Dalla prima delle (30) si supponga di ricavare: $v = \varphi(R, U)$; allora si avrà:

$$f(v) = f[\varphi(R, U)] = M; \quad \chi(v) = \frac{U - M \cos \varphi(R, U) \cdot \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = N, \quad (31)$$

e le (28) divengono:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= M \cos \varphi(R, U) \cdot \cos \theta - N \cdot \operatorname{sen} \theta; & y_1 &= M \cdot \operatorname{sen} \varphi(R, U); \\ z_1 &= M \cos \varphi(R, U) \cdot \operatorname{sen} \theta + N \cdot \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Abbiamo dunque il teorema « se la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse delle z della linea (26) viene segata da un cilindro le cui generatrici sono parallele al piano $y = 0$ e inclinate all'asse di rotazione dell'angolo θ , e la cui sezione retta in coordinate polari è rappresentata dall'equazione (27) (quando l'asse polare sia parallelo all'intersezione del piano di una sezione retta del cilindro col coordinato $y = 0$) la linea d'intersezione è rappresentata dalle (32), nelle quali M, N sono dati dalle (31) e $\varphi(R, U)$ è la funzione che si ottiene risolvendo rapporto a v la prima delle equazioni (30) ».

Caso particolare. — Se il cilindro segante ha le generatrici parallele all'asse di rotazione, $\theta = 0$ e la prima delle (30) diviene:

$$f(v) = R;$$

quest'equazione, non contenendo U , dà:

$$v = \varphi(R).$$

Le (31) divengono:

$$M = f(v) = R, \quad N = U,$$

e le (32):

$$x_1 = R \cos [\varphi(R)], \quad y_1 = R \operatorname{sen} [\varphi(R)], \quad z_1 = U. \quad (32')$$

a) Se il cilindro segante ha per sezione retta la spirale logaritmica:

$$r = f(v) = a e^{\cot \theta \cdot v},$$

l'equazione da risolversi rapporto a v diviene:

$$R = a e^{\cot \theta \cdot v},$$

da cui:

$$v = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \log \left(\frac{R}{a} \right).$$

Perciò le (32') divengono:

$$x_1 = R \cdot \cos \left[\operatorname{tg} \varepsilon \cdot \log \left(\frac{R}{a} \right) \right], \quad y_1 = R \cdot \sin \left[\operatorname{tg} \varepsilon \cdot \log \left(\frac{R}{a} \right) \right], \quad z_1 = U,$$

e se questa linea è geodetica principale d'elicoide, si ha in forza delle (11):

$$p \int \frac{U'}{R^2} du = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \log \frac{R}{a},$$

dalla quale si deduce:

$$U = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2p} R^2,$$

La linea meridiana della superficie di rivoluzione è dunque rappresentata nel piano $y = 0$ dalle equazioni:

$$x_0 = R, \quad z_0 = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2p} R^2,$$

dalle quali, eliminando R si ricava:

$$z_0 = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2p} x_0^2,$$

equazione di una parabola di cui l'asse coincide coll'asse delle z ; la superficie in discorso è quindi un paraboloide di rivoluzione.

A complemento quindi di un teorema dimostrato al § 3, caso f), si può aggiungere « la sola superficie di rivoluzione in cui una geodetica principale d'elicoide, e quindi tutte, hanno per proiezione equatoriale delle spirali logaritmiche col polo sull'asse è il paraboloide di rivoluzione ».

Se poi la linea in discorso è una lossodromia sulla superficie di rivoluzione, le (9) ci danno:

$$\operatorname{tg} i \int \frac{\sqrt{R^2 + U^2}}{R} du = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \log \frac{R}{a},$$

dalla quale si ricava:

$$U = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon - \operatorname{tg}^2 i}}{\operatorname{tg} i} \cdot R + \operatorname{cost.}$$

Il meridiano della superficie è dunque rappresentato nel piano coordinato $y = 0$ dall'equazione:

$$z_0 = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon - \operatorname{tg}^2 i}}{\operatorname{tg} i} x_0 + \operatorname{cost.},$$

e perciò esso è una retta. A complemento quindi di un teorema dimostrato al § 3 caso *d*) si può aggiungere « la sola superficie di rivoluzione in cui una lossodromia, e quindi tutte, hanno per proiezioni equatoriali delle spirali logaritmiche col polo sull'asse è il cono di rotazione ».

b) Se il cilindro segante ha per sezione retta la spirale d'ARCHIMEDE $r = av$, con un calcolo analogo al precedente si trova che le (32') divengono:

$$x_1 = R \cdot \cos\left(\frac{R}{a}\right), \quad y_1 = R \cdot \sin\left(\frac{R}{a}\right), \quad z_1 = U,$$

e se tale linea è una geodetica principale d'elicoide, si ha per le (11):

$$p \int \frac{U'}{R^2} du = \frac{R}{a},$$

dalla quale (lasciando una costante arbitraria additiva):

$$U = \frac{1}{3ap} R^3.$$

La linea meridiana è quindi rappresentata dalle equazioni:

$$x_0 = R, \quad z_0 = \frac{1}{3ap} R^3,$$

dalle quali, eliminando R , si ha:

$$z_0 = \frac{1}{3ap} x_0^3.$$

Quindi, a complemento di un teorema del § 3 caso *f*) possiamo dire « la superficie di rivoluzione che ha per meridiano la parabola del terzo ordine $z_0 = \frac{1}{3ap} x_0^3$ è la sola che abbia la proprietà che tutte le geodetiche principali d'elicoidi tracciate su di essa si proiettino equatorialmente in spirali d'Archimede col polo sull'asse ».

§ 7.

Sezioni piane di una superficie di rivoluzione. — Una linea qualunque L_1 tracciata sulla superficie generata dalla rotazione attorno all'asse delle z della curva:

$$x = R \cos u, \quad y = R \sin u, \quad z = U,$$

è rappresentata dalle equazioni:

$$x_1 = R \cos f(u), \quad y_1 = R \sin f(u), \quad z_1 = U.$$

Se quindi L_1 è posta in un piano perpendicolare al coordinato $y = 0$, inclinato dell'angolo i all'asse delle z e che incontra quest'asse alla distanza k dall'origine, deve essere:

$$z_1 = k + \cot i \cdot x_1.$$

Sarà dunque:

$$\cos f(u) = \frac{(U - k) \operatorname{tg} i}{R},$$

e quindi:

$$x_1 = (U - k) \operatorname{tg} i, \quad y_1 = \sqrt{R^2 - (U - k)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 i}, \quad z_1 = U.$$

Se cambiamo il sistema di assi di riferimento, prendendo per asse delle ξ l'intersezione del piano secante col coordinato $y = 0$ e per asse delle η la perpendicolare all'asse delle ξ posta nel piano della linea, abbiamo le equazioni:

$$\xi = \frac{U - k}{\cos i}, \quad \eta = \sqrt{R^2 - (U - k)^2 \operatorname{tg}^2 i}, \quad \zeta = 0.$$

Siccome da queste si ricava:

$$R = \sqrt{\xi^2 \operatorname{sen}^2 i + \eta^2}, \quad U = k + \xi \cos i,$$

potremo enunciare il teorema « si tagli una superficie di rivoluzione con un piano perpendicolare al coordinato $y = 0$, inclinato dell'angolo i all'asse di rotazione e distante di k dall'origine degli assi e si riferisca la sezione L al sistema di assi $\Omega(\xi, \eta)$ in cui Ω è l'intersezione del piano secante coll'asse di rotazione, $\Omega\xi$ è l'intersezione del piano secante col piano coordinato $y = 0$ e $\Omega\eta$ è la perpendicolare alla $\Omega\xi$ posta nel piano secante.

Se il meridiano della superficie è rappresentato dall'equazione:

$$f(x_0, z_0) = 0,$$

la sezione L è rappresentata dall'altra:

$$f[\sqrt{\xi^2 \operatorname{sen}^2 i + \eta^2}, (k + \xi \cos i)] = 0;$$

e se la sezione L è rappresentata dall'equazione:

$$\varphi(\xi, \eta) = 0,$$

la linea meridiana è rappresentata dall'altra:

$$\varphi\left(\frac{z_0 - k}{\cos i}, \sqrt{x_0^2 - (z_0 - k)^2 \operatorname{tg}^2 i}\right) = 0.$$

Esempio. — Si consideri la superficie di rivoluzione che ha per meridiano la conica a centro:

$$ax_0^2 + bz_0^2 + c = 0.$$

L'equazione:

$$a(\xi^2 \operatorname{sen}^2 i + \eta^2) + b(k + \xi \cdot \cos i)^2 + c = 0,$$

che contiene le due indeterminate k, i , rappresenta tutte le possibili coniche tracciate sulla data superficie; se combiniamo l'equazione precedente una volta colla sua derivata rapporto ad i e una volta colla sua derivata rapporto a k , si ottengono rispettivamente le equazioni:

$$\xi^2 + \eta^2 = -\left(\frac{b k^2}{a - b} + \frac{c}{a}\right), \quad \operatorname{sen}^2 i \cdot \xi^2 + \eta^2 = -\frac{c}{a},$$

la prima delle quali rappresenta un cerchio e la seconda un'ellisse.

Se poi si considera il paraboloide che ha per meridiano la linea: $z_0 = \frac{1}{p} x_0^2$, tutte le coniche situate su di esso sono rappresentate dall'equazione:

$$k + \cos i \cdot \xi = \frac{1}{p} (\xi^2 \operatorname{sen}^2 i + \eta^2),$$

la quale, combinata colla sua derivata rapporto ad i dà:

$$\xi^2 + \eta^2 = p k - \frac{p^2}{4},$$

che rappresenta un cerchio.

Dunque « I. Se si taglia una quadrica di rivoluzione non sviluppabile con una serie di piani passanti per una retta che incontra perpendicolarmente l'asse di rotazione in un punto differente dal centro e si fanno ruotare i piani seganti attorno a questa retta in modo che vengano a coincidere con uno di essi, le sezioni piane ottenute involuppano su questo piano un cerchio.

II. Se si taglia una superficie di 2.^o ordine di rivoluzione a centro con una serie di piani paralleli obliqui all'asse e si proiettano le sezioni ottenute sul piano di una di esse con delle parallele all'asse, queste proiezioni involuppano sul detto piano un'ellisse ».

Si può osservare che il cerchio involupato dalle coniche nel 1.^o caso è sempre reale nell'ellissoide schiacciato e nell'iperboloide a una falda; nell'ellissoide allungato, nell'iperboloide a due falde e nel paraboloide è reale solamente quando:

$$k < \sqrt{\frac{c_1(a-b)}{ab}}, \quad k > \sqrt{\frac{c(a+b_1)}{ab_1}}, \quad k > \frac{p}{4},$$

essendo $b_1 = -b$, $c_1 = -c$.

L'ellisse involupata dalle coniche nel 2.^o caso è reale solamente nell'ellissoide e nell'iperboloide a una falda.

§ 8.

Intersezione di due superficie di rivoluzione. — Le superficie di cui si considera l'intersezione siano S, S_1 e le loro linee meridiane, considerate nei piani coordinati $\eta = 0, \eta_1 = 0$ siano rappresentate dalle equazioni:

$$\xi = R(u), \quad \zeta = U(u); \quad \xi_1 = R_1(u_1), \quad \zeta_1 = U_1(u_1),$$

nelle quali u e u_1 sono due parametri indipendenti qualunque. Collochiamo le superficie S, S_1 in modo che gli assi coordinati $O\xi, O_1\xi_1$ coincidano e che i loro assi di rotazione siano paralleli alla distanza k fra loro; chiamando allora L la linea d'intersezione, $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1)$ le coordinate di un suo punto qualunque riferito rispettivamente al sistema $O(\xi, \eta, \zeta)$ o all'altro $O_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ si deve avere:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \cos f(u), & y &= R \cdot \sin f(u), & z &= U(u); \\ x_1 &= R_1 \cdot \cos f_1(u_1), & y_1 &= R_1 \cdot \sin f_1(u_1), & z_1 &= U_1(u_1), \end{aligned}$$

essendo $f(u)$ e $f_1(u_1)$ due funzioni convenienti di u e di u_1 . E siccome: $x = x_1 + k, y = y_1, z = z_1$, sarà:

$$R \cos f(u) = R_1 \cos f_1(u_1) + k; \quad R \sin f(u) = R_1 \sin f_1(u_1); \quad U(u) = U_1(u_1).$$

Dall'ultima equazione si supponga di ricavare: $u_1 = \varphi(u)$ e si ponga:

$$R_1(u_1) = R_1[\varphi(u)] = r(u);$$

le due precedenti divengono allora:

$$r \cos f_1(u_1) = R \cos f(u) - k, \quad r \sin f_1(u_1) = R \sin f(u),$$

dalle quali, col quadrare e sommare, si deduce:

$$\cos f(u) = \frac{R^2 - r^2 + k^2}{2kR}.$$

Sostituendo questo valore di $\cos f(u)$ nelle equazioni che ci danno x, y, z , abbiamo « l'intersezione delle superficie di rivoluzione generate dalle linee meridiane:

$$\xi = R(u), \quad \eta = 0, \quad \zeta = U(u); \quad \xi_1 = R_1(u_1), \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = U_1(u_1),$$

quando i loro assi siano paralleli alla distanza k fra loro, è rappresentata dalle equazioni:

$$x = \frac{R^2 - r^2 + k^2}{2k}, \quad y = \frac{\sqrt{4k^2R^2 - (R^2 - r^2 + k^2)^2}}{2k}, \quad z = U,$$

essendo $r(u)$ ciò che diviene la funzione $R_1(u_1)$ sostituendo a u_1 la funzione $\varphi(u)$ che si ottiene risolvendo rapporto a u_1 l'equazione $U_1(u_1) = U(u)$.

Esempio. — Le superficie che si considerano siano quelle generate dalle curve logaritmiche:

$$\xi = m \cdot e^{a\xi}, \quad \xi_1 = m_1 \cdot e^{a_1 \xi_1},$$

che ruotano attorno al loro assintoto. Si potrà mettere:

$$R(u) = m e^{au}, \quad U(u) = u; \quad R_1(u_1) = m_1 e^{a_1 u_1}, \quad U(u_1) = u_1,$$

e allora l'equazione $U(u) = U_1(u_1)$ ci dà $u_1 = u$, con che $r(u)$ diviene:

$$r(u) = m_1 e^{a_1 u}.$$

Si ha allora per le coordinate dei punti della linea domandata:

$$x = \frac{m^2 e^{2au} - m_1^2 e^{2a_1 u} + k^2}{2k},$$

$$y = \frac{1}{2k} \sqrt{4m^2 k^2 e^{2au} - (m^2 e^{2au} - m_1^2 e^{2a_1 u} + k^2)^2}, \quad z = u.$$

Se dalle due prime eliminiamo u , si ha che la proiezione equatoriale dell'intersezione è rappresentata dall'equazione:

$$m_1^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{m^2} \right)^{\frac{a_1}{a}} = x^2 + y^2 - 2kx + k^2;$$

questa curva è algebrica tutte le volte che $\frac{a_1}{a}$ è commensurabile.

Se si suppone $a_1 = a$, l'ultima equazione diviene:

$$x^2 + y^2 = \frac{k m^2}{m^2 - m_1^2} (2x - k),$$

che è quella di un cerchio di raggio $\frac{k m m_1}{m^2 - m_1^2}$ avente il centro sull'asse delle x alla distanza $\frac{k m^2}{m^2 - m_1^2}$ dall'origine.

§ 9.

Le linee conjugate sopra una superficie di rivoluzione. — Sia L una linea qualunque che facciamo ruotare attorno all'asse delle z ; sulla superficie generata S sia L_1 una qualunque delle traiettorie ortogonali delle L ; le due linee L e L_1 si diranno conjugate fra loro. Se la linea che si considera come

generatrice L_0 è rappresentata dalle equazioni:

$$x_0 = R \cdot \cos u, \quad y_0 = R \cdot \sin u, \quad z_0 = U,$$

le due linee conjugate L e L_1 sono rappresentate da equazioni della forma:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \cos f(u), & y &= R \cdot \sin f(u), & z &= U; \\ x_1 &= R \cdot \cos f_1(u), & y_1 &= R \cdot \sin f_1(u), & z_1 &= U. \end{aligned}$$

Chiamando quindi i e i_1 l'inclinazione delle linee L e L_1 sui paralleli, sarà:

$$\cos i = \frac{Rf'}{\sqrt{R^2 f'^2 + R'^2 + U'^2}}, \quad \cos i_1 = \frac{Rf'_1}{\sqrt{R^2 f_1'^2 + R'^2 + U'^2}}.$$

La condizione imposta alle linee L e L_1 è espressa dall'equazione $i + i_1 = \frac{\pi}{2}$, ciò che dà:

$$R^2 f' f'_1 = R'^2 + U'^2;$$

risolvendo quest'equazione rapporto a f_1 e integrando, si ottiene:

$$f_1 = \int \frac{R'^2 + U'^2}{R^2 f'} \cdot du.$$

Dunque « sulla superficie generata dalla rotazione attorno all'asse delle z della linea L_0 :

$$x_0 = R \cdot \cos u, \quad y_0 = R \cdot \sin u, \quad z_0 = U,$$

una linea qualunque:

$$x = R \cdot \cos f(u), \quad y = R \cdot \sin f(u), \quad z = U, \quad (33)$$

ha per conjugata l'altra:

$$x_1 = R \cdot \cos \left(\int \frac{R'^2 + U'^2}{R^2 f'} du \right), \quad y_1 = R \cdot \sin \left(\int \frac{R'^2 + U'^2}{R^2 f'} du \right), \quad z_1 = U. \quad (34)$$

Se alla linea L di questo teorema, rappresentata dalle (33) si sostituisce la linea L_0 , abbiamo: « le linee L , L_1 rappresentate dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cdot \cos u, & y &= R \cdot \sin u, & z &= U; \\ x_1 &= R \cdot \cos \left(\int \frac{R'^2 + U'^2}{R^2} du \right), & y_1 &= R \cdot \sin \left(\int \frac{R'^2 + U'^2}{R^2} du \right), & z_1 &= U, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ruotando attorno all'asse delle z , generano la stessa superficie di rivoluzione sulla quale esse, nelle varie loro posizioni, costituiscono due sistemi di traiettorie ortogonali. »

Se L è lossodromia sulla superficie, le coordinate de' suoi punti sono date dalle (9₁), laonde col confronto si ottiene:

$$x_1 = R \cdot \cos(\cot^2 i \cdot u), \quad y_1 = R \cdot \sin(\cot^2 i \cdot u), \quad z_1 = \int \sqrt{\cot^2 i \cdot R^2 - R'^2} \cdot du,$$

le quali hanno la stessa forma delle (9₂).

Dunque « le traiettorie ortogonali di un sistema di lossodromie di una superficie di rivoluzione, identiche fra loro, formano un nuovo sistema di lossodromie pure identiche fra loro. »

Prendendo come linee coordinate sulla superficie generata dalla linea (9₁) la linea stessa nelle sue varie posizioni e i paralleli, il quadrato dell'elemento lineare dS^2 della superficie assume la forma:

$$dS^2 = R^2 \left(\frac{du^2}{\sin^2 i} + 2 du dv + dv^2 \right),$$

essendo $u = \text{cost.}$ i paralleli e $v = \text{cost.}$ la lossodromia nelle varie posizioni. Sostituendo alle $u = \text{cost.}$ le traiettorie ortogonali $t = \text{cost.}$ delle $v = \text{cost.}$ e ponendo quindi: $u = f(v, t)$, l'equazione precedente diviene:

$$dS^2 = R^2 \left\{ \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2}{\sin^2 i} dt^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial t} \left(1 + \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\sin^2 i} \right) dt \cdot dv + \left(1 + 2 \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2}{\sin^2 i} \right) dv^2 \right\}.$$

La condizione d'ortogonalità delle linee v, t dà:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\sin^2 i,$$

d'onde integrando:

$$f(v, t) = \varphi(t) - v \cdot \sin^2 i,$$

essendo $\varphi(t)$ una funzione arbitraria di t . Senza cambiare il sistema delle $t = \text{cost.}$ si può sostituire $\varphi(t)$ con t e allora risulta:

$$dS^2 = R^2 \left(\frac{dt^2}{\sin^2 i} + \cos^2 i \cdot dv^2 \right);$$

si vede quindi che « sopra una superficie di rivoluzione qualunque il doppio sistema di lossodromie ortogonali è isoterma ».

Questa proprietà è verificata ad es. nel doppio sistema dei meridiani e dei paralleli.

Se mettiamo la condizione che le due linee conjugate L, L_1 siano eguali fra loro, le (35) danno:

$$\frac{R'^2 + U'^2}{R^2} = 1, \quad \text{d'onde: } U' = \sqrt{R^2 - R'^2}.$$

Le linee (35) vengono allora rappresentate dalle equazioni:

$$x = R \cos u, \quad y = R \sin u, \quad z = \int \sqrt{R^2 - R'^2} \cdot du,$$

le quali si ricavano dalle (9₁) facendovi $i = \frac{\pi}{4}$. Dunque « le linee conjugate eguali fra loro sono lossodromie seganti i meridiani sotto un angolo $\frac{\pi}{4}$ ».

Si supponga che entrambe le linee conjugate L e L_1 siano geodetiche principali d'elicoidi; le (11₁), (11) confrontate rispettivamente colle prime e colle seconde (35) danno:

$$U = \frac{1}{p} \int R^2 du, \quad p_1 \int \frac{U'}{R^2} du = \int \frac{R'^2 + U'^2}{R^2} du,$$

essendo p_1 il parametro del moto elicoidale di L_1 . Da queste relazioni, eliminando U , si ha l'equazione:

$$R^4 = p p_1 R^2 - p^2 R'^2,$$

la quale ha la stessa forma della (16) del § 3.

Ricordando quindi il risultato allora ottenuto, abbiamo « la sola superficie di rivoluzione nella quale due linee conjugate sono contemporaneamente geodetiche principali d'elicoidi i cui assi coincidono coll'asse di rotazione della superficie, è la sfera ».

§ 10.

Linee geodeticamente parallele. — Sopra una superficie qualunque sono linee geodeticamente parallele e traiettorie ortogonali di uno stesso sistema di geodetiche. Se la linea (33) è geodetica, avremo (§ 2):

$$f = a \int \sqrt{\frac{R'^2 + U'^2}{R^2 - a^2}} \cdot \frac{du}{R},$$

e le linee (34) divengono:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cdot \cos \left(\frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{(R^2 - a^2)(R'^2 + U'^2)}}{R} \cdot du \right), \\ y &= R \cdot \sin \left(\frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{(R^2 - a^2)(R'^2 + U'^2)}}{R} \cdot du \right), \end{aligned} \right\} \quad z = U. \quad (35)^{\text{bis}}$$

Siccome per le linee conjugate alle (35)^{bis} sussiste la relazione $R \cdot \sin i = a$, come si è dimostrato al § 3, si potrà dire: « sulla superficie generata dalla

rotazione attorno all'asse delle z della linea (35)^{bis} tale linea è una sviluppante geodetica del parallelo di raggio a ».

La linea (35)^{bis} sia un'elica; confrontando le (35)^{bis} colle equazioni (10) del § 2 abbiamo un'equazione dalla quale si deduce:

$$U' = \frac{\cos i \cdot R R'}{\sqrt{a^2 - R^2 \cos^2 i}}.$$

Moltiplicando per du e integrando, si ha:

$$U \cdot \cos i + h = -\sqrt{a^2 - R^2 \cos^2 i},$$

con h costante arbitraria; siccome questa relazione si può scrivere:

$$\cos^2 i (U^2 + R^2) + 2h \cdot \cos i \cdot U = a^2 - h^2,$$

si vede che la curva meridiana è un cerchio avente il centro sull'asse di rotazione.

Dunque « la sfera è la sola superficie di rivoluzione in cui una sviluppante geodetica di un parallelo è nel tempo stesso un'elica di un cilindro avente le generatrici parallele all'asse di rotazione ».

§ 11.

Deformazione per flessione delle superficie di rivoluzione. — Sia L una linea arbitraria, x, y, z le coordinate di un suo punto qualunque e s il suo arco; le coordinate X, Y, Z di un punto qualunque della superficie S generata dalla rotazione di L attorno all'asse delle z sono espresse dalle equazioni:

$$X = x \cos v - y \sin v, \quad Y = x \sin v + y \cos v, \quad Z = z,$$

nelle quali è manifesto il significato geometrico dell'angolo v . Se, col mezzo di queste equazioni, si calcola il quadrato dS^2 dell'elemento lineare della superficie, si trova:

$$dS^2 = ds^2 + 2(xy' - x'y)dsdv + (x^2 + y^2)dv^2.$$

Si deformi ora per flessione la superficie S in una nuova superficie di rivoluzione S_1 e sia L_1 la linea a cui si riduce L ; chiamando allora x_1, y_1, z_1 le coordinate di un punto qualunque di L_1 ed s_1 il suo arco, si trova per il quadrato dS_1^2 dell'elemento lineare della nuova superficie:

$$dS_1^2 = ds_1^2 + 2(x_1 y_1' - x_1' y_1)ds_1 dv_1 + (x_1^2 + y_1^2)dv_1^2.$$

Osservando che la condizione $ds = ds_1$ può ritenersi senz'altro soddisfatta, bastando contare l'arco s di L e l'arco s_1 di L_1 da due punti corrispondenti delle due linee corrispondenti, l'identità delle due espressioni dS^2 , dS_1^2 è stabilita quando sia:

$$(x_1 y'_1 - x'_1 y_1) dv_1 = (xy' - x'y) dv; \quad (x_1^2 + y_1^2) dv_1^2 = (x^2 + y^2) dv^2.$$

Dalla prima ricavandosi:

$$\frac{x_1 y'_1 - x'_1 y_1}{xy' - x'y} = \frac{dv}{dv_1},$$

ed essendo il primo membro funzione di s e il secondo di v , si avrà:

$$x_1 y'_1 - x'_1 y_1 = \frac{1}{k} (xy' - x'y), \quad v_1 = kv, \quad (36)$$

dove k è una costante arbitraria (modulo di deformazione). In forza della seconda delle (36) l'ultima condizione da soddisfare diviene:

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{k^2} (x^2 + y^2). \quad (37)$$

E perciò le condizioni d'applicabilità sono le (36), (37); si soddisfa nel modo più generale alla (37) prendendo:

$$x_1 = \frac{1}{k} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos \theta, \quad y_1 = \frac{1}{k} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin \theta, \quad (38)$$

essendo θ una funzione qualunque di s . Questa funzione di s vuole determinata in modo, da verificare la 1.^a delle (36); col mezzo delle (38) calcolando il 1.^o membro di (36) e mettendo la condizione che sia eguale al 2.^o membro, si ottiene:

$$\theta' = k \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2},$$

dalla quale, moltiplicando per ds e integrando, si ricava:

$$\theta = k \int \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2} \cdot ds.$$

Osservando che deve essere soddisfatta la condizione:

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2 = 1,$$

colla quale, essendo già note le x_1 , y_1 , si può ricavare altresì $\frac{dz_1}{ds}$ e poi z_1 ,

si ha « le superficie generate dalla rotazione attorno all'asse delle z delle due linee L e L_1 rappresentate dalle equazioni:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = \int \sqrt{1 - (x'^2 + y'^2)} ds;$$

$$x_1 = \frac{1}{k} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos \left(k \int \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2} ds \right),$$

$$y_1 = \frac{1}{k} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin \left(k \int \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2} ds \right),$$

$$z_1 = \int \sqrt{1 - \frac{(xx' + yy')^2 + k^2(xy' - x'y)^2}{k^2(x^2 + y^2)}} \cdot ds,$$

sono applicabili l'una all'altra e le due linee in discorso sono corrispondenti ».

Se poniamo:

$$x = R \cos u, \quad y = R \sin u, \quad z = U,$$

essendo R e U due funzioni di u , si ha:

$$x^2 + y^2 = R^2; \quad xx' + yy' = R R' \frac{du}{ds}; \quad xy' - x'y = R^2 \frac{du}{ds};$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{R'^2 + R'^2 + U'^2}};$$

sostituendo allora questi valori nelle equazioni che danno x_1, y_1, z_1 si può aggiungere al teorema precedente « se la linea data L si ritiene rappresentata dalle equazioni:

$$x = R \cdot \cos u, \quad y = R \cdot \sin u, \quad z = U, \quad (39)$$

la sua deformata L_1 è allora rappresentata dalle altre:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{k} \cdot R \cos(ku), & y_1 &= \frac{1}{k} \cdot R \sin(ku), \\ z_1 &= \int \sqrt{U'^2 + \frac{k^2 - 1}{k^2} \cdot R'^2} \cdot du \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Le equazioni trovate sono, in moltissimi problemi concernenti la deformazione delle superficie di rivoluzione, preferibili a quelle che si sogliono dare ordinariamente e che si riferiscono alla curva meridiana, anzi che a una generatrice a doppia curvatura qualunque.

Applicazioni. — Se tanto L quanto L_1 sono eliche di cilindri colle generatrici parallele all'asse delle superficie, abbiamo:

$$\cos i = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \frac{U'}{\sqrt{R^2 + R'^2 + U'^2}},$$

$$\cos i_1 = \frac{dz_1}{ds} = \frac{dz_1}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \frac{\sqrt{U'^2 + \frac{k^2 - 1}{k^2} R'^2}}{\sqrt{R^2 + U'^2 + R'^2}},$$

essendo i e i_1 le inclinazioni costanti delle due linee sulle generatrici dei rispettivi cilindri.

Eliminando fra queste due espressioni la U' , si ottiene un'equazione dalla quale si deduce:

$$\frac{R'}{R} = a,$$

dove a è la costante definita dall'equazione:

$$a = k \sqrt{\frac{\sin(i_1 + i) \cdot \sin(i_1 - i)}{\sin^2 i - k^2 \sin^2 i_1}}.$$

Moltiplicando ambo i membri della precedente per du ed integrando, si ha: $R = b e^{au}$, con b costante; la linea L è quindi un'elica cilindro-conica, ovvero, come caso particolare, un'elica circolare.

Abbiamo dunque « *se, deformando una superficie di rivoluzione in modo che essa rimanga di rivoluzione, un'elica descritta su di essa e appartenente a un cilindro colle generatrici parallele all'asse di rotazione si trasforma in una linea di equal natura, la superficie data è necessariamente un cono ovvero un cilindro di rivoluzione* ».

Se supponiamo che la sola linea L_1 sia un'elica d'un cilindro colle generatrici parallele all'asse delle z e segante queste generatrici sotto l'angolo costante i , si ha per il calcolo che precede:

$$U' = \frac{1}{k \sin i} \sqrt{k^2 \cos^2 i \cdot R^2 + (1 - k^2 \sin^2 i) \cdot R'^2}.$$

E perciò « *la sola superficie di rotazione la quale, per mezzo di deformazioni che ne lasciano inalterata la natura, riduce una linea descritta su di essa a un'elica di un cilindro colle generatrici parallele all'asse, è quella generata dalla rotazione attorno all'asse delle z della linea:*

$$x = R \cdot \cos u, \quad y = R \cdot \sin u,$$

$$z = \frac{1}{k \sin i} \cdot \int \sqrt{k^2 \cos^2 i \cdot R^2 + (1 - k^2 \sin^2 i) R'^2} \cdot du.$$

La linea che può subire la trasformazione predetta è la generatrice ora trovata e la deformazione della superficie ha luogo in una sola maniera ».

La linea L_1 sia assintotica sulla superficie da essa generata ruotando attorno all'asse delle z ; le binormali di L_1 incontrano allora questa retta. Ora la binormale di L_1 nel punto generico (x_1, y_1, z_1) è rappresentata dalle equazioni:

$$\frac{X - x_1}{\frac{dy_1}{ds} \frac{d^2 z_1}{ds^2} - \frac{dz_1}{ds} \frac{d^2 y_1}{ds^2}} = \frac{Y - y_1}{\frac{dz_1}{ds} \frac{d^2 x_1}{ds^2} - \frac{dx_1}{ds} \frac{d^2 z_1}{ds^2}} = \frac{Z - z_1}{\frac{dx_1}{ds} \frac{d^2 y_1}{ds^2} - \frac{dy_1}{ds} \frac{d^2 x_1}{ds^2}},$$

essendo (X, Y, Z) le coordinate correnti e s l'arco della linea.

Questa retta incontra l'asse delle z quando sia:

$$\frac{dz_1}{ds} \left(x_1 \frac{d^2 x_1}{ds^2} + y_1 \frac{d^2 y_1}{ds^2} \right) = \frac{d^2 z_1}{ds^2} \left(x_1 \frac{dx_1}{ds} + y_1 \frac{dy_1}{ds} \right);$$

calcolando le derivate prime e seconde delle coordinate rapporto all'arco dalle (40), si ottiene dopo qualche riduzione:

$$(R'' - k^2 R) \sqrt{U'^2 + \frac{k^2 - 1}{k^2} R'^2} = R' \left(\sqrt{U'^2 + \frac{k^2 - 1}{k^2} R'^2} \right)'$$

Quest'equazione si può scrivere:

$$\frac{\left(\sqrt{U'^2 + \frac{k^2 - 1}{k^2} R'^2} \right)'}{\sqrt{U'^2 + \frac{k^2 - 1}{k^2} R'^2}} = \frac{R''}{R'} - k^2 \frac{R}{R'},$$

e allora, moltiplicata per du e integrata, dà:

$$\log \sqrt{U'^2 + \frac{k^2 - 1}{k^2} R'^2} = \log a + \log R' - k^2 \int \frac{R du}{R'},$$

con a costante. Da questa relazione si deduce:

$$U' = R' \sqrt{a^2 \cdot e^{-2k^2 \int \frac{R du}{R'}} - \frac{k^2 - 1}{k^2}},$$

la quale, colla moltiplicazione per du e con un'integrazione, dà U cioè z .

Dunque « la sola superficie di rotazione la quale, per mezzo di deformazioni che ne lascino inalterata la natura, riduce una linea descritta su di essa ad essere assintotica sulla superficie deformata, è quella generata dalla

rotazione attorno all'asse delle z della linea:

$$x = R \cdot \cos u, \quad y = R \cdot \sin u, \quad z = \int R' \sqrt{a^2 \cdot e^{-2k^2} \int \frac{R' du}{R'} - \frac{k^2 - 1}{k^2}} \cdot du.$$

La linea che può subire tale trasformazione è la generatrice ora trovata e la deformazione della superficie non può farsi che in un sol modo (*).

Vediamo se una linea d'ombra di una superficie di rivoluzione illuminata da raggi paralleli o concorrenti può mantenersi linea d'ombra della superficie che si ottiene dalla data deformandola per flessione. Si rammenti che quando le equazioni di una linea si pongono sotto la forma:

$$x = R \cdot \cos f(u), \quad y = R \cdot \sin f(u), \quad z = U,$$

al § 2 si è trovato che la condizione esprimente che essa è linea d'ombra relativa a raggi paralleli è:

$$\cos f(u) = \frac{R'}{z'} \cot \theta;$$

quest'equazione, applicata alla linea rappresentata dalle (40), dà:

$$\frac{1}{k} \cos(ku) = \frac{\cot \theta \cdot R'}{\sqrt{U'^2 + \frac{k^2 - 1}{k^2} R^2}},$$

dalla quale si deduce:

$$U' = \frac{\sqrt{k^2 \cot^2 \theta - \frac{k^2 - 1}{k^2} \cos^2(ku)}}{\cos(ku)} \cdot R'.$$

Si conclude di qui che la linea L è rappresentata dalle equazioni:

$$x = R \cdot \cos u, \quad y = R \cdot \sin u, \quad z = \int \frac{\sqrt{k^2 \cot^2 \theta - \frac{k^2 - 1}{k^2} \cos^2(ku)}}{\cos(ku)} \cdot R \, du. \quad (41)$$

Allo stesso § 2 si è pure dimostrato che onde una linea sia d'ombra relati-

(*) La proprietà ultima enunciata è vera per qualunque superficie; infatti un'assintotica L ha per curvatura assoluta la curvatura geodetica e per torsione la radice quadrata della curvatura totale della superficie, cangiata di segno (teorema di ENNEPER); se quindi, dopo una certa deformazione della superficie, l'assintotica L si trasformasse nell'assintotica L_1 , questa linea L_1 dovrebbe avere la stessa curvatura e la stessa torsione di L . Le due linee L e L_1 dovrebbero quindi essere identiche, il che non può avvenire che per le generatrici rettilinee delle superficie rigate.

vamente a raggi luminosi concorrenti, deve essere soddisfatta la condizione:

$$\cos f(u) = \frac{Rz' - R'z}{az'},$$

la quale, applicata alla linea (40), dà:

$$U' = \sqrt{\frac{h^2}{\left[R - \frac{a}{k} \cos(ku)\right]^2}} \cdot e^{\int \frac{R' du}{R - \frac{a}{k} \cos(ku)} - \frac{k^2 - 1}{k^2} \cdot R' du},$$

con h costante arbitraria. Si conclude di qui che la linea L è rappresentata dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos u, & y &= R \sin u, \\ z &= \int \sqrt{\frac{h^2}{\left[R - \frac{a}{k} \cos(ku)\right]^2}} \cdot e^{\int \frac{R' du}{R - \frac{a}{k} \cos(ku)} - \frac{k^2 - 1}{k^2} \cdot R' du}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Abbiamo così il teorema « le linee le quali, dopo una deformazione di parametro k della superficie generata dalla loro rotazione attorno all'asse delle z divengono linee d'ombra della superficie deformata, rispetto a raggi paralleli o concorrenti, sono rappresentate dalle (41), (42), nelle quali θ indica l'inclinazione dei raggi luminosi sull'asse e a la distanza del punto luminoso dall'asse di rotazione ».

Se nelle (41), (42) facciamo $k = 1$, esse si riducono, come è naturale, rispettivamente alle (12), (13).

Se la linea rappresentata dalla (41) è, nella sua forma attuale, linea d'ombra relativa a raggi luminosi paralleli, si deve avere:

$$z = \cot \varepsilon \int \frac{R'}{\cos u} \cdot du.$$

Eguagliando allora questo valore di z a quello dato dalla terza (41), si ottiene l'equazione:

$$\frac{\cot \varepsilon}{\cos u} = \frac{\sqrt{k^2 \cot^2 \theta - \frac{k^2 - 1}{k^2} \cos^2(ku)}}{\cos(ku)},$$

la quale non può essere soddisfatta identicamente, ma solo per valori particolari di u .

Se la linea rappresentata dalla (42) è linea d'ombra relativa a raggi paralleli, si deve avere:

$$\cot \theta \int \frac{R'}{\cos u} du = \int \sqrt{\frac{h^2}{\left[R - \frac{a}{k} \cos(ku)\right]^2}} \cdot e^{2 \int \frac{R' du}{R - \frac{a}{k} \cos(ku)} - \frac{k^2 - 1}{k^2}} \cdot R' du,$$

dalla quale si deduce:

$$\frac{\int \frac{R'}{R - \frac{a}{k} \cos(ku)} \cdot du}{h \cdot e^{\frac{2 \int \frac{R' du}{R - \frac{a}{k} \cos(ku)} - \frac{k^2 - 1}{k^2}}} = \sqrt{\frac{\cot^2 \theta}{\cos^2 u} + \frac{k^2 - 1}{k^2}}.$$

Derivando questa espressione logaritmicamente, si ottiene dopo alcuni calcoli:

$$R = a \cdot \left\{ \frac{1}{k} \cos(ku) - \frac{\operatorname{sen}(ku)}{\frac{d}{du} \cdot \log \sqrt{\frac{\cot^2 \theta}{\cos^2 u} + \frac{k^2 - 1}{k^2}}} \right\}. \quad (43)$$

Se la linea rappresentata dalle (41) è una linea d'ombra relativa a raggi luminosi concorrenti, si deve avere:

$$\int \frac{\sqrt{k^2 \cot^2 \theta - \frac{k^2 - 1}{k^2} \cos^2(ku)}}{\cos(ku)} \cdot R' du = h \cdot e^{\int \frac{R'}{R - a \cos u} du},$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{h e^{\int \frac{R' du}{R - a \cos u}}}{R - a \cos u} = \sqrt{\frac{k^2 \cot^2 \theta}{\cos^2(ku)} - \frac{k^2 - 1}{k^2}}.$$

Derivando quest'espressione logaritmicamente, si deduce:

$$R = a \cdot \left\{ \cos u - \frac{\operatorname{sen} u}{\frac{d}{du} \cdot \log \sqrt{\frac{k^2 \cot^2 \theta}{\cos^2(ku)} - \frac{k^2 - 1}{k^2}}} \right\}. \quad (44)$$

Se finalmente la linea (42), sulla superficie generata dalla sua rotazione attorno all'asse delle z , è linea d'ombra relativa a raggi luminosi concorrenti in un punto posto alla distanza b dall'asse, si ha:

$$h_1 e^{\int \frac{R du}{R - b \cos u}} = \int \sqrt{\frac{h^2}{\left[R - \frac{a}{k} \cos(ku)\right]^2}} \cdot e^{2 \int \frac{R' du}{R - \frac{a}{k} \cos(ku)} - \frac{k^2 - 1}{k^2}} \cdot R' du.$$

Elevando a quadrato ambo i membri dell'equazione che si ottiene da questa colla differenziazione, e derivando poi logaritmicamente l'equazione che risulta, si ha:

$$h^2 \left\{ R [a \operatorname{sen}(ku) - b \operatorname{sen} u] - ab \left[\cos u \operatorname{sen}(ku) - \frac{1}{k} \operatorname{sen} u \cos(ku) \right] \right\} \cdot \\ e^{\int \frac{R' du}{R - \frac{a}{k} \cos(ku)}} = -b \frac{k^2 - 1}{k^2} \cdot \operatorname{sen} u \cdot \left[R - \frac{a}{k} \cos(ku) \right]^3.$$

Derivando questa logaritmicamente, si ottiene l'equazione differenziale del 1.° ordine:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{R' [a \operatorname{sen}(ku) - b \operatorname{sen} u] + R [ak \cos(ku) - b \cos u] - ab \left(k - \frac{1}{k} \right) \cos u \cdot \cos(ku)}{R [a \operatorname{sen}(ku) - b \operatorname{sen} u] - ab \left[\cos u \cdot \operatorname{sen}(ku) - \frac{1}{k} \operatorname{sen} u \cdot \cos(ku) \right]} = \\ & = \cot u + \frac{3a \cdot \operatorname{sen}(ku) + R'}{R - \frac{a}{k} \cos(ku)}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Dunque « Se una superficie di rivoluzione S si deforma per flessione in un'altra superficie di rivoluzione S_1 e una linea d'ombra L di S si trasforma in una linea d'ombra L_1 di S_1 :

1.° Le due curve L e L_1 non possono essere entrambe linee d'ombra relativamente a raggi luminosi paralleli.

2.° La linea L che nella deformazione della superficie conserva la proprietà caratteristica suddetta, è rappresentata dalle (42) in cui R ha l'espressione (43), ovvero dalle (41) dove R ha l'espressione (44), ovvero dalle (42), dove R è definito dall'equazione differenziale (45) rispettivamente, secondo che la superficie primitiva S è illuminata da raggi paralleli e la deformata S_1 da raggi concorrenti, ovvero S da raggi concorrenti e S_1 da raggi paralleli, ovvero entrambe le superficie S , S_1 sono illuminate da raggi concorrenti ».

Parma, aprile 1890.