den Beweis. Denn da für alle übrigen Fälle Anziehung und Tragkraft dem Quadrat des erregten Magnetismus proportional sind, so mufs diese Proportionalität auch in diesem stattfinden, d. h. Anziehung und Tragkraft müssen stets dem kürzeren Theile der Magnete, mögen diese ganz beliebige Länge haben, proportional, und wenn diese kürzeren Theile gleich sind, auch gleich seyn.

Die bei Bewicklung nur des einen Stabes sich zeigende Abweichung in dem eben erwähnten Falle kann also nur von der Anhäufung der Spirale herrühren und nähert sich, je mehr die Spiralwindungen auf einen Punkt zusammen kommen, d. h. je kürzer der Magnet wird, so lange asymptotisch einem Maximum, bis in demselben Sättigung hervortritt.

Berlin den 10. März 1858.

III. *Zur mathematischen Theorie elektrischer Ströme; von Ernst Schering.*

Die mathematische Theorie elektrischer Ströme ist in diesen Annalen schon häufiger erörtert und namentlich sind die von Weber und Neumann darüber erschienenen Untersuchungen im Auszuge mitgetheilt worden. Die unter obigem Titel gedruckte Abhandlung, welche von der philosophischen Facultät in Göttingen im Jahre 1857 den Preis erhalten, steht mit den erwähnten Untersuchungen im engsten Zusammenhang, wie aus folgender kurzer Uebersicht der Resultate ersehen werden wird.

§. 1.

Es ist in diesen Annalen Bd. 31, S. 483 von Lenz über die von Faraday entdeckte Volta-Induction zuerst folgende

Erfahrungsregel aufgestellt worden: in einem metallischen Leiter, der sich in der Nähe eines galvanischen Stromes oder eines Magneten bewegt, entsteht ein Strom, der eine solche Richtung hat, dafs er in dem Drahte, wenn dieser in Ruhe wäre, vermöge der Einwirkung des anderen galvanischen Stromes oder des Magneten eine gerade entgegengesetzte Bewegung hervorbringen würde, wofern man denselben nur in der Richtung der ertheilten Bewegung und der entgegengesetzten beweglich voraussetzt.

§. 2.

Dieser Erfahrungsregel hat Neumann noch als Ergänzung den Satz beigefügt:

dafs die Intensität der momentanen Induction proportional ist der Geschwindigkeit, mit welcher der Leiter bewegt wird.

§. 3.

Sodann hat Neumann, auf diese beiden Sätze gestützt, in den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1845 folgendes allgemeine Inductions-Gesetz aufgestellt:

Die in einem Elemente des bewegten Drahtes (als Leiter) inducirte elektromotorische Kraft ist gleich einer Constanten ε multiplicirt mit der Geschwindigkeit des Elements und mit der nach der negativen Richtung der Bewegung zerlegten (durch Ampère's Formel gegebenen elektrodynamischen) Wirkung des inducirenden Stromes auf das Element, dieses durchströmt gedacht von einem positiven Strome mit der Intensität $= 1$.

§. 4.

Dieses Neumann'sche Gesetz genügt nun zur vollständigen Bestimmung jeder durch *Ortsveränderung* des Leiters oder des inducirenden Stromes hervorgebrachten Induction, da solche nur von den *relativen* Ortsänderungen der Elemente des Leiters und des Stromes abhängt; umfafst aber noch nicht die Bestimmung der durch eine *Stromänderung* hervorgebrachten Induction:

Aus diesem Gesetze ergiebt sich für die auf den inducirten Leiter ausgeübte *elektromotorische Kraft* folgender analytische Ausdruck:

$$\varepsilon i dt \frac{ds\,ds'}{rr}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - 2r\frac{ddr}{ds\,ds'}\right)\left(\frac{dr}{dw}\frac{dw}{dt} + \frac{dr}{dw'}\frac{dw'}{dt}\right),$$

worin s und s' die Curven bezeichnen, welche der inducirende Strom und der Leiter bilden, ds und ds' ihre Elemente, und r die Länge der von einem Punkt des ds nach einem Punkte des ds' in positiver Richtung gezogenen Geraden. Es ist i die mit der magnetischen Krafteinheit gemessene Intensität des inducirenden Stromes und zwar positiv oder negativ genommen, je nachdem die Richtung der Bewegung der positiven Elektricität des Stromes mit der Richtung, in welcher ds positiv vorausgesetzt war, übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist. Bei den Ortsveränderungen des Stromes durchlaufen die einzelnen Punkte der Curve s Bahnen von verschiedener Länge. Die mit der Zeit t veränderliche Gröfse w soll von jeder Bahnlänge auf eine besondere Weise abhängig gedacht werden und zwar so, dafs w zu einer und derselben Zeit für alle Punkte des Stromes einen gleichen Werth hat. In entsprechender Beziehung wie w zu s steht w' zu s'. Es sind also $\frac{dw}{dt}$ und $\frac{dw'}{dt}$ constant für alle Punkte der Curven s und s'; im Allgemeinen unterscheiden sie sich von den Geschwindigkeiten, mit welchen sich diese Punkte bei den Ortsveränderungen des Stromträgers und des Leitungsdrahtes bewegen. Sie können diesen Geschwindigkeiten nur dann gleich seyn, wenn die Curven s und s' parallel zu sich selbst fortgeschoben werden.

§. 5.

Zur Bestimmung der durch eine *Stromänderung* hervorgebrachten Induction hat aber Neumann folgendes Gesetz aufgestellt: erhält in einem Stromelement $i ds$ die Stromstärke i während der Zeit dt einen Zuwachs $\frac{di}{dt}dt$, so wird dadurch in dem Element ds' eines geschlossenen Leiterumgangs s' eine elektromotorische Kraft erregt, die den Werth

$$-\varepsilon\, dt \frac{ds\, ds'}{r} \cos(ds \,.\, ds') \frac{di}{dt}$$

hat, wenn man mit $\cos(ds, ds')$ den Cosinus desjenigen Winkels bezeichnet, welchen die Richtungen der Elemente ds und ds' mit einander bilden.

§. 6.

Aus der Vereinigung der beiden unter 4 und 5 angeführten Gesetze hat endlich Neumann sein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme abgeleitet, welches er in den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1847 folgendermafsen ausspricht:

wird ein geschlossenes, unverzweigtes, leitendes Bogensystem $A_{,}$ durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente, aber ohne Aufhebung der leitenden Verbindung derselben, in ein anderes $A_{,,}$ von neuer Form und Lage übergeführt, und geschieht diese Veränderung von $A_{,}$ in $A_{,,}$ unter dem Einflufs eines elektrischen Stromsystems $B_{,}$, welches gleichzeitig durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente eine Veränderung in Lage, Form und Intensität von $B_{,}$ in $B_{,,}$ erfährt, so ist die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche in dem leitenden Bogensystem durch diese Veränderungen inducirt worden sind, gleich dem mit der Inductions-Constante ε multiplicirten Unterschied der Potentialwerthe des Stromes $B_{,,}$ in Bezug auf $A_{,,}$ und des Stromes $B_{,}$ in Bezug $A_{,}$, wenn $A_{,,}$ und $A_{,}$ von der Stromeinheit durchströmt gedacht werden.

Es ist der Potentialwerth eines in der Bahn s befindlichen Stromes von der Intensität i in Bezug auf einen in s' laufenden Strom von der Intensität i' das über beide Curven s und s' ausgedehnte Doppelintegral

$$-\int \frac{1}{r} \cos(ds \,.\, ds')\, i\, ds\; i'\, ds'.$$

§. 7.

Nun war aber von Weber in seinen elektrodynamischen Maafsbestimmungen folgendes Grundgesetz der elektrischen

Wirkungen aufgestellt worden, worin auch die elektrischen Inductionsgsgesetze mit enthalten seyn müssen, nämlich das Gesetz, wonach zwei elektrische Massen e und e', die jede in einem Punkte vereinigt sind, auf einander eine abstofsende Kraft ausüben, deren Maafs

$$\frac{ee'}{rr}\left(1-\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{2}{cc}r\frac{ddr}{dt^2}\right)$$

ist, wenn man mit r den Abstand der beiden Massen von einander und mit c die Geschwindigkeit

$$439450\,.\,10^6\,.\,\frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}\text{ bezeichnet.}$$

Das Maafs der elektrischen Massen (e und e') ist diejenige elektrische Masse, welche auf eine gleich grofse in der Entfernung von Einem Millimeter ruhende elektrische Masse die Einheit der Kraft ausübt, d. i. diejenige Kraft, vermöge welcher ein die elektrische Masse fest einschliefsender Körper von der ponderabeln Masseneinheit (Milligramm) in Einer Sekunde die Einheit der Geschwindigkeit erhält.

In bekannten Zeichen kann hiernach die Einheit der Kraft durch

$$\text{Milligramm}\,.\,\frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}^2}$$

dargestellt werden, und also ist, wenn E die Einheit der elektrischen Masse bezeichnet

$$EE=\frac{\text{Milligramm}\,.\,\text{Millimeter}^3}{\text{Sekunde}^2}.$$

Nach mechanischen Begriffen wird hieraus die Einheit der Stromintensität abgeleitet

$$=\frac{E}{\text{Millimeter}}\,.\,\frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}=\sqrt{\frac{\text{Milligramm}\,.\,\text{Millimeter}^3}{\text{Sekunde}^4}}$$

wodurch augedrückt wird, dafs die Stromeinheit stattfinde, wenn in jedem Millimeter des Leiters die Einheit der elektrischen Masse (E) enthalten ist und mit der Einheit der Geschwindigkeit $\left(=\frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}\right)$ bewegt wird.

Bezeichnet i die auf bekannte Weise aus den magnetischen Wirkungen gefundene Intensität eines Stromes, so ist

$$i = 2\sqrt{2} \, . \, \frac{e}{c} \, \frac{ds}{dt},$$

wenn $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit der Elektricitäten des Stromes und e die in jeder Längeneinheit des Leiters enthaltene Zahl von Einheiten der elektrischen Masse, und c oder $\frac{c}{2\sqrt{2}}$ eine gegebene constante Geschwindigkeit bedeutet, nämlich

$c = 439450 \, . \, 10^6 \, . \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}$, also $\frac{c}{2\sqrt{2}} = 155370 \, . \, 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}$

Diesem Ausdrucke der Stromintensität liegt aber eine andere Einheit als die oben angegebene zu Grunde, nämlich die sogenannte magnetische Einheit der Stromintensitäten. Die letztere Einheit unterscheidet sich aber von der ersteren (nach mechanischen Begriffen festgestellten) dadurch, dafs die *Geschwindigkeit*, mit welcher die Elektricität im Leiter strömt, statt nach absolutem Maafse, in Theilen einer in der Natur als constant gegebenen Geschwindigkeit (welche nach absolutem Maafse $= 155370 \, . \, 10^6 \, . \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}$ gefunden worden) ausgedrückt wird. Die letztere Einheit ist daher **155370 . 10⁶** Mal gröfser als die erstere.

§. 8.

Um nun das unter 6 angeführte allgemeine Princip aus dem unter 7 angeführten Grundgesetze zu beweisen, hat Neumann letzteres auf die in der Bahn ds sich bewegenden Elektricitäten $+ eds$ und $- eds$, die den galvanischen Strom mit der Intensität $i = 2\sqrt{2} \frac{e}{c} \frac{ds}{dt}$ und der Intensitätsänderung $\frac{di}{dt} = 2\sqrt{2} \frac{e}{c} \frac{dds}{dt^2}$ bilden, und auf die in der Leitung ds' befindlichen ruhenden oder bewegten Elektricitäten $+ e'ds'$ und $- e'ds'$ angewendet und daraus für die elektromotorische Kraft, welche die positive Elektricität $+ e'$ und die negative $- e'$ von einander zu scheiden und zwar erstere in der Richtung des Elements ds die andere in der gerade entgegengesetzten zu bewegen strebt, folgenden analytischen Ausdruck abgeleitet:

$$8\frac{ee'}{cc}dt\frac{ds\,ds'}{rr}\left\{\begin{aligned}&\left(2r\frac{ddr}{ds\,dw}-\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dw}\right)\frac{dw}{dt}\frac{dr}{ds'}\frac{ds}{dt}\\&+\left(2r\frac{ddr}{ds\,dw'}-\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dw'}\right)\frac{dw'}{dt}\frac{dr}{ds'}\frac{ds}{dt}\\&+\left(\;r\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{dds}{dt^2}\right.\,.\end{aligned}\right.$$

Für die Fälle, in welchen die einzelnen Theile des inducirenden Stromes entweder nur eine Aenderung der Intensität i oder des Ortes seines Trägers s oder die Theile des Leiters s' eine Orts- und Gestaltsänderung erleiden, ist von jenem allgemeinen Ausdruck für die Elementarinduction das dreifache Integral nach ds, ds' und dt auf ein zweifaches ds und ds' zurückgeführt und also für diese Fälle das allgemeine Princip aus dem Grundgesetz bewiesen. Doch fehlte es noch an einem allgemeinen Beweise, welcher die hierunter nicht begriffenen Fälle mit umfafste.

§. 9.

Der vollständige Beweis des Neumann'schen Princips (6) aus dem Weber'schen Grundgesetze (7) bildete den Gegenstand einer im Jahre 1856 von der Göttinger philosophischen Facultät gestellten Preisaufgabe, welche durch die unter obigem Titel erschienene Abhandlung gelöst worden ist. Diese Lösung besteht aber im Wesentlichen darin, dafs der aus dem Grundgesetze für die elementare elektromotorische Kraft abgeleitete Ausdruck (8) nach Weglassen des Factors $dt\,ds\,ds'$ und nach Einführung der Gröfsen

$$\frac{8ee'}{cc}\left(\frac{dr}{dw}\frac{dw}{dt}\frac{ds}{dt}+\frac{dr}{dw'}\frac{dw'}{dt}\frac{ds}{dt}\right)=u$$

$$8\frac{ee'}{cc}\frac{1}{r}\frac{d(r\,dr)}{ds\,ds'}=-8\frac{ee'}{cc}\frac{1}{r}\cos(ds\,.\,ds')=p$$

$$8\frac{ee'}{cc}r\frac{dds}{dt^2}=q$$

in die Form

$$\frac{d}{dt}\left(p\frac{ds}{dt}\right)-\frac{dd}{ds\,ds'}(q+u)-\frac{d}{ds}\left(p\frac{ds^2}{dt^2}-\frac{u}{r}\frac{dr}{ds'}\right)$$
$$-\frac{d}{ds'}\left(p\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{u}{r}\frac{dr}{ds}\right)$$

gebracht wird [1]). Diese besitzt gegen die obige den Vorzug, daſs derjenige Theil von welchem das Potential abhängt als Derivirte nach der Zeit auftritt, und alle übrigen Theile als Derivirte nach den Curvenelementen erscheinen, so daſs für jedes Glied wenigstens eine Integration allgemein ausgeführt werden kann.

Den Integralwerth der während der Zeit von $t_{\prime}$ bis $t_{\prime\prime}$ von dem ganzen Strome is auf den geschlossenen Leiter s' ausgeübten elektromotorischen Kraft erhält man aus dieser Formel durch Multiplication mit $ds\,ds'\,dt$ und darnach ausgeführter dreifacher Integration. Nur das erste Glied, die Derivirte nach der Zeit, ergiebt einen im Allgemeinen von Null verschiedenen Werth, da die übrigen Glieder Derivirte nach den Curvenelementen sind, deren Integrale ausgedehnt über die ganzen geschlossenen Curven verschwinden. Bezeichnet man mit $P_{\prime}$ den Werth des Integrals

$$-\int \frac{1}{r} \cos (ds\,.\,ds')\, i\, ds\, ds'$$

für die zur Zeit $t_{\prime}$ stattfindende gegenseitige Lage der Curven s und s' und die gleichzeitige Intensität i, und mit $P_{\prime\prime}$ den entsprechenden Werth für die Zeit $t_{\prime\prime}$ und setzt

$$\varepsilon = 2\sqrt{2}\,\frac{e'}{c},$$

so ergiebt sich der genannte Integralwerth der elektromotorischen Kraft gleich

$$\varepsilon P_{\prime} - \varepsilon P_{\prime\prime}.$$

Dieser Ausdruck enthält das oben unter 6 angeführte Neu-

1) Der aus dem Neumann'schen Inductionsgesetze abgeleitete Ausdruck (4) für die durch Ortsveränderungen hervorgebrachte elementare Induction wird nach einer ähnlichen Umformung zu:

$$\frac{d}{dt}\left(p\frac{ds}{dt}\right) - \frac{ddu}{ds\,ds'} - \frac{d}{ds}\left(p\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{u}{r}\frac{dr}{ds}\right) - \frac{d}{ds'}\left(p\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} + \frac{u}{r}\frac{dr}{ds}\right),$$

wenn man die Constanten i, ε auf die oben angegebene Weise durch $\frac{ds}{dt}$, e, e', c ersetzt.

mann'sche Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme.

§. 10.

Aus diesem Lehrsatze leuchtet die Wichtigkeit ein, welche die darin auftretende von Neumann zuerst in die Elektrodynamik eingeführte *Potentialfunction* besitzt. Sie gewährt der Analysis, die diesen Zweig der mathematischen Physik zum Gegenstand hat, eine gröfsere Durchsichtigkeit, als ohne die Benutzung dieser Function erreichbar ist. Um die Wichtigkeit dieser *Potentialfunction* noch mehr ins Licht zu stellen, ist nun ferner in vorliegender Abhandlung noch gezeigt worden, wie sich dieselbe *Potentialfunction* benutzen lasse, um auch die übrigen von Ampère schon früher aufgestellten, so wie die hieraus wieder von Neumann abgeleiteten elektrodynamischen Gesetze unmittelbar aus dem Weber'schen Grundgesetze (7) zu beweisen.

§. 11.

Zunächst ist der von Ampère aufgestellte Ausdruck für die von zwei Stromelementen $i ds$ und $i' ds'$ mit constanten oder veränderlichen Intensitäten auf ihre Träger gegenseitig ausgeübten Abstofsungskraft:

$$-\frac{ii'}{rr} ds\, ds' (2\cos\varepsilon - 3\cos\theta\cos\theta')$$

hergeleitet. Als Maafs der Intensität liegt hierbei die von den magnetischen Wirkungen entnommene Krafteinheit zu Grunde. Es bedeutet ε den von den Richtungen der Elemente ds und $ds_{\prime}$ eingeschlossenen Winkel, θ und θ' diejenigen Winkel, welche die von einem Punkte in ds nach einem Punkte in ds' in positiver Richtung genommene Gerade r mit den Stromelementen ds und ds' bildet.

§. 12.

Für eben dieselbe Kraft ist dann der Ausdruck

$$-i ds\, i' ds' \left(r \frac{dd\frac{1}{r}}{ds\, ds'} - \frac{1}{rr} \frac{d(r\, dr)}{ds\, ds'} \right)$$

aufgestellt, der sich besonders zur Grundlage der weiteren Untersuchungen eignet. Nennt man x' die eine der rechtwinkeligen Coordinaten eines in ds' befindlichen Punktes, so erhält man durch Multiplication jenes Ausdrucks in $\frac{dr}{dx}$ für die zur x' Axe parallele Componente der Kraft mit welcher das Stromelement $i\,ds$ auf $i'ds'$ wirkt, die Formel

$$-i\,ds\,i'ds'\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\,\frac{r\,dr}{dx'}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{d}{ds'}\left(\frac{1}{r}\,\frac{d(r\,dr)}{ds\,dx'}\right)+\frac{d}{dx'}\left(\frac{1}{r}\,\frac{d(r\,dr)}{ds\,ds'}\right)\right].$$

Diese Formel giebt aber auch das Maafs des Drehungsmoments derselben Kraft in Bezug auf irgend eine Axe als Drehungsaxe, wenn man x' den Winkel bedeuten läfst, welcher der Drehungsaxe zugehört.

§. 13.

Ampère giebt in seinem *Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques* [1]) als Maafs der zur x Axe parallelen Componente der von dem Gesammtstrom is auf $i'ds'$ ausgeübten elektrodynamischen Kraft

$$-\,i\,i'ds'\left(\cos\mu\int\frac{x\,dy-y\,dx}{r^3}-\cos\nu\int\frac{z\,dx-x\,dz}{r^3}\right),$$

wobei vorausgesetzt ist, dafs sich ein Punkt von ds' im Anfangspunkte der Coordinaten befindet. Es bezeichnen μ und ν die Winkel, welche $d's$ mit der y und z Axe bildet, x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes in ds, die Elemente dx, dy, dz die Projectionen von ds auf die entsprechenden Axen. Durch Integration nach ds wird dieser besonders für numerische Berechnungen geeignete Ausdruck aus dem vorhergehenden (12) erhalten.

§. 14.

Jener Ausdruck (12) für die Componente dient auch zum Beweise von Neumann's Satz [2]), dafs die gesammte

1) *Mémoires de l'Academie des sciences de l'Institut de France Année* 1823, *p.* 214.
2) Anmerkung zur Abhandlung über ein allgemeines Princip. Abhandl. der Berl. Akademie 1847.

zwischen is und $i's'$ wirkende elektrodynamische Kraft als Maafs der Componente in irgend einer Richtung die nach dieser Richtung genommene Derivirte des negativen Werthes des Potentials

$$-\int \frac{1}{r} \cos(ds.ds')\, i\,ds.i'ds'$$

hat. Auf ähnliche Art ergiebt sich das Drehungsmoment dieser Kraft gleich der negativen Derivirten des Potentials nach dem Winkel, welcher der Rotationsaxe des Drehungsmomentes entspricht.

§. 15.

Um die Lehrsätze, die die Wechselwirkungen zwischen Magneten und galvanischen Strömen betreffen, zu beweisen, sind in der Abhandlung einige geometrische Hülfssätze gebraucht, von welchen hier nur die angeführt werden sollen, die zur Erläuterung der Lehrsätze selbst beitragen.

Es bezeichnen λ und λ' zwei stetig gekrümmte Flächen, die resp. von den beiden in sich geschlossenen Curven s und s' ganz begränzt werden und die keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Es seyen $d\lambda$, $d\lambda'$ Elemente der Flächen, ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' rechtwinkelige Coordinaten zweier Punkte, die resp. in der Nähe von den Elementen $d\lambda$ und $d\lambda'$ liegen. Von diesen Flächentheilchen werden nach einer bestimmten Seite Normalen errichtet und deren unendlich kleinen Abschnitte, die den Flächen zunächst liegen, gleich dN und dN' gesetzt. Diese Seite der Fläche, nach welcher die Normalen gerichtet sind, heifse die positive Seite; sie läfst sich auf folgende Art bestimmen. Denkt man sich z. B. die Fläche λ auf das von dem Aequatorkreise begränzte Stück Ebene in der Weise ausgebreitet, dafs die Elemente ds der Curve s, die ganz in die Kreislinie fällt, positiv von West nach Ost gerichtet sind, so ist die nach Norden zugewandte Seite der Fläche die positive, die nach Süden die negative. Bezeichnet ϱ den Abstand des Punktes $(\xi', \eta,' \zeta')$ von (ξ, λ, ζ), so gelten für ϱ die Differentialgleichungen

$$\frac{dd\frac{1}{\varrho}}{d\xi^2}+\frac{dd\frac{1}{\varrho}}{d\eta^2}+\frac{dd\frac{1}{\varrho}}{d\zeta^2}=0$$

$$\frac{d\frac{1}{\varrho}}{d\xi}=-\frac{d\frac{1}{\varrho}}{d\xi'}$$

$$\frac{d\frac{1}{\varrho}}{d\eta}=-\frac{d\frac{1}{\varrho}}{d\eta}$$

$$\frac{d\frac{1}{\varrho}}{d\zeta}=-\frac{d\frac{1}{\varrho}}{d\zeta'}$$

und deshalb ist

$$\int\frac{dd\frac{1}{\varrho}}{dN\,dN'}d\lambda\,d\lambda'=-\int\frac{1}{r}\cos(ds\,ds')\,ds\,ds',$$

worin das doppelte Flächenintegral über die ganzen λ und λ' und das doppelte Curvenintegral über die ganzen geschlossenen Curven s und s' auszudehnen sind.

Nach dem anderen Hülfssatze ergiebt sich für den körperlichen Winkel, der von den aus einem Punkte o an die Punkte einer Curve s gezogenen Geraden gebildet wird, das Maafs, welches als das von dem genannten Kegel aus der Kugel mit dem Radius 1 und dem Punkte o als Mittelpunkt abgetrennten Flächenstück definirt ist, gleich

$$\frac{d\frac{1}{\varrho}}{dN}.$$

§. 16.

Die beiden hier noch zu erwähnenden Lehrsätze hat schon Ampère aufgestellt; der eine betrifft ein Solenoid. Mit diesem Namen belegt Ampère ein System von unendlich kleinen geschlossenen Curven s, die gleich grofse ebene Flächen L begränzen, und die so angeordnet sind, dafs es eine stetige Linie g giebt, welche mit jeder Fläche L einen Punkt gemeinschaftlich hat, an dieser Stelle mit der positiven Normale N dieser Fläche gleich gerichtet ist und durch je zwei benachbarte Flächen L in gleich lange aber unendlich kurze Abschnitte G getheilt wird. Dasjenige Ende des Solenoids, bei dem die Linie g anfängt, also die negative Seite der ersten Fläche L nach aufsen gekehrt ist, heifst das negative Ende, das andere, bei dem g aufhört und die letzte Fläche L ihre positive Seite nach aufsen kehrt, das positive Ende. Ein elektrodynamisches Solenoid ist ein Solenoid, dessen einzelne Curven von galvanischen Strömen mit gleichen Intensitäten i durchlaufen werden und zwar in derselben Richtung, in welcher die Curvenelemente ds positiv angenommen waren.

Der eine Lehrsatz lautet: die von dem Strome $i's'$ auf das mit dem negativen Ende sich ins Unendliche erstreckende elektrodynamische Solenoid ausgeübte Kraft ist gleich derjenigen, mit welcher derselbe Strom $i's'$ auf ein an der Stelle des positiven Endes des Solenoids befindliches nordmagnetisches Theilchen $\mu = \frac{iL}{G}$ wirken würde. Nach Gaufs »Allgemeiner Theorie des Erdmagnetismus Art. 37 und 38« ist das Potential dieser Kräfte das Product von $\mu i'$ in den körperlichen Winkel, dessen Spitze in einem Punkte des magnetischen Theilchens liegt, und der von den aus diesem Punkte an die Punkte der Curve s' gezogenen Geraden gebildet wird.

Der andere Lehrsatz sagt aus, dafs die Wechselwirkung zwischen zwei galvanischen Strömen is und $i's'$ gleich ist der Wechselwirkung zwischen den beiden von den Curven ss' begränzten und auf solche Weise mit magnetischem Fluidum belegten Flächen λ und λ', dafs sich auf den positiven Seiten oder Flächen eine dünne Schicht nordmagnetisches Fluidum und auf der negativen eine Schicht südmagnetisches Fluidum befindet, welche beide zusammen den Elementen $d\lambda$ und $d\lambda'$ resp. die magnetischen Momente $\mu d\lambda = i d\lambda$ und $\mu' d\lambda' = i' d\lambda'$ ertheilen. Der Beweis stützt sich auf die durch den ersten Hülfssatz (15) gegebene Gleichung.

$$-\int \frac{1}{r} \cos(ds, ds')\, i\, ds\, i' ds' = \int \frac{dd\frac{1}{\varrho}}{dN\, dN'} \mu\, d\lambda\, \mu' d\lambda',$$

deren erstes Glied das Potential des einen Stromes is in Bezug auf den anderen $i's'$ und dessen zweites Glied das Potential der beiden magnetischen Flächen $\mu\lambda$ und $\mu'\lambda'$ in Bezug auf einander bedeutet. Aus demselben Hülfssatz folgt auch, dafs das Potential von einem Magnet in Bezug auf einem galvanischen Strom is, von welchem unter anderen auch die Fläche λ begränzt wird, gleich

$$\int \frac{dV}{dN} i\, d\lambda$$

ist, wenn V das Potential des Magnets in Bezug auf einen in $d\lambda$ befindlichen Punkt bedeutet.

IV. *Ueber Bewegung und Beschaffenheit der Atome; von R. Hoppe.*

Da die Aufgabe, die bestimmte Bewegung darzustellen, auf welcher die Wärme beruht, im Grofsen und Ganzen noch nicht gelöst worden ist, so sind wir auf den langsameren Weg allmählicher Annäherung angewiesen, die offenbar von sehr verschiedenen Seiten aus begonnen werden kann. Eine Hauptschwierigkeit liegt gegenwärtig darin, dafs das Bereich der möglichen Hypothesen sehr grofs, was wir hingegen an Motiven zur Entscheidung haben, äufserst gering ist. Der Uebergang von der physikalischen zur mechanischen Betrachtung der Wärme geschah nämlich durch das Princip der lebendigen Kräfte, das bekanntlich von der Art der Bewegung unabhängige Resultate liefert, so dafs man in deren Uebereinstimmung mit der Erfahrung noch keine Bestätigung der speciellen Annahmen sehen darf.

Um dieser Schwierigkeit willen scheint mir eine vorausgehende Orientirung im Bereich der Annahmen zur För-