THÉORÈME SUR LES SÉRIES ENTIÈRES

PAR

JACQUES HADAMARD

à BORDEAUX.

1. Soient deux séries de Maclaurin

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m + \ldots \tag{1}$$

$$\varphi(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m + \ldots, \tag{2}$$

convergentes dans des cercles ayant pour centre l'origine et pour rayons respectifs k et l.

La série

$$\psi(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_m b_m x^m + \ldots \tag{3}$$

dont chaque coefficient est égal au produit des coefficients correspondants des séries (1) et (2), a son rayon de convergence au moins égal à kl. Nous allons démontrer, plus généralement, que *la fonction* $\psi(x)$ *n'a* (et cela *dans tout le plan*) *d'autres points singuliers que ceux que l'on obtient en multipliant les affixes des différents points siuguliers de* $f(z)$ *par celles des différents points singuliers de* $\varphi(t)$.

2. Une expression analytique bien connue de $\psi(x)$ est la suivante

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta})\varphi(te^{-i\theta})\,d\theta, \tag{4}$$

z et t étant deux nombres fixes quelconques de modules respectivement inférieurs à k et l et satisfaisant à la relation

$$zt = x. \tag{5}$$

A l'intégrale (4), nous allons en substituer une autre donnant aussi la valeur de $\psi(x)$ et comprenant la première comme cas particulier.

Pour cela, x ayant une valeur déterminée quelconque, nous ferons encore correspondre à chaque valeur de z une valeur de t par l'équation (5); mais, au lieu de laisser z fixe, nous supposerons qu'il tourne autour de l'origine en décrivant un certain contour C; alors, le point correspondant t tournera également autour de l'origine, mais en sens inverse, en décrivant le contour Γ qui correspond à C; on aura d'ailleurs évidemment

$$\frac{dz}{z}+\frac{dt}{t}=0. \tag{6}$$

De plus, à une valeur de z extérieure à C, correspond une valeur de t intérieure à Γ, et inversement.

Nous supposerons:

1° que la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du contour C et sur ce contour;

2° que la fonction $\varphi(t)$ est holomorphe à l'intérieur du contour Γ et sur ce contour.

3. Cela posé, formons l'intégrale

$$I=\int f(z)\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z} \tag{7}$$

prise le long du contour C, dans le sens direct, laquelle équivaut, en vertu de la relation (6), à l'intégrale

$$\int f\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t},$$

prise (dans le sens direct) le long de Γ, puisque le sens direct sur l'un des contours correspond au sens rétrograde sur l'autre.

L'intégrale I ne dépend pas du choix du contour C, tant que celui-ci vérifie les deux conditions spécifiées tout à l'heure: autrement dit, si l'on remplace le contour C par un contour C' satisfaisant aux mêmes conditions, l'intégrale n'est pas changée. Cela résulte immédiatement de ce que la fonction $\frac{1}{z}f(z)\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ est holomorphe entre C et C'.

D'ailleurs I *est, pour un choix déterminé du contour* C, *une fonction holomorphe de* x.

Donc I est une fonction holomorphe de x tant que cette quantité et les contours C, Γ varient de manière que les conditions du n° précédent ne cessent pas d'être vérifiées.

Si enfin le module de x est inférieur à kl, on peut supposer les contours C, Γ respectivement intérieurs aux cercles de convergence des séries (1), (2) et, par conséquent, utiliser les développements de f et de φ: il vient alors immédiatement

$$I = 2i\pi\psi(x).$$

En un mot, *l'intégrale* $\frac{I}{2i\pi}$ *fournit la continuation analytique de la série* (3).

4. Il reste à examiner pour quelles valeurs de x nous pourrons construire les contours C, Γ possédant les propriétés demandées.

Soient S, Σ deux aires comprenant l'origine, que nous supposerons, pour fixer les idées, simplement connexes et dans lesquelles les fonctions f, φ sont respectivement holomorphes. Donnons-nous encore, pour un instant, la valeur de x: le lieu des points z, tels que les points t correspondants soient situés sur le contour de Σ, est une certaine courbe fermée c_x et un point t sera à l'intérieur ou à l'extérieur de Σ, suivant qu'il correspond à un point z extérieur ou intérieur à c_x.

Toutes les courbes c_x correspondant aux diverses valeurs de x seront d'ailleurs semblables entre elles.

Nous appellerons *produit* des aires S et Σ, et nous désignerons par la notation $S\Sigma$, l'aire lieu des points x tels que la courbe c_x soit comprise tout entière à l'intérieur de S: aire qui est limitée par la courbe lieu des points x tels, que c_x touche intérieurement le contour de S.

5. Ce produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs; car la définition précédente peut évidemment se remplacer par celle-ci:

L'aire $S\Sigma$ *est formée par les points dont les affixes ne peuvent pas être obtenues en multipliant l'affixe d'un point extérieur à* S *par celle d'un point extérieur à* Σ.

6. A quelle condition cette aire $S\Sigma$ sera-t-elle connexe? Considérons toutes les courbes c_x qui passent par un point déterminé α, et supposons qu'il existe un arc $\alpha\alpha_1$ intérieur à toutes ces courbes (ou pouvant avoir des points communs avec quelques unes d'entre elles) et partant du point α pour aboutir à un point α_1 plus rapproché de l'origine que le premier. Alors, si l'on pose $x_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha} x$, on voit que la courbe c_{x_1} sera intérieure à c_x, quel que soit x; et même on pourra aller de x à x_1 par un arc (à savoir l'arc semblable à $\alpha\alpha_1$) tel que, pour tout point y de cet arc, la courbe c_y soit intérieur à c_x.

Si donc le point x est intérieur à l'aire $S\Sigma$, il en est de même de tous les points de l'arc xx_1, et aussi de l'arc x_1x_2 joignant le point x_1 au point d'affixe $x_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha} x_1$; et ainsi de suite. En un mot, on peut, sans sortir de l'aire $S\Sigma$, passer de tout point x intérieur à cette aire à des points infiniment voisins de l'origine.

Donc l'aire $S\Sigma$ est connexe.

Il est clair, d'ailleurs, qu'on obtiendra une autre condition également suffisante, mais non nécessaire, en substituant, dans ce que nous venons de dire, l'aire S à l'aire Σ et inversement.

7. L'aire $S\Sigma$ est celle dans laquelle nous pourrons faire varier x sans que la définition et les propriétés fondamentales de l'intégrale I cessent de subsister.

Si, en effet, x est intérieur à cette aire $S\Sigma$, on pourra prendre pour le contour C l'un quelconque de ceux qui contiennent c_x à leur intérieur, tout en étant eux mêmes intérieurs à S.

Au contraire, si x est extérieur à l'aire $S\Sigma$, le contour de Σ correspond à une courbe c_x qui sort de l'aire S et il en sera, a fortiori, de même de tout contour Γ intérieur à Σ.

8. Soient décrits, avec l'origine comme centre, un cercle de rayon $K > k$ dans le plan de la variable z, un cercle de rayon $L > l$ dans le plan de la variable t. Supposons que, dans ces cercles, les fonctions $f(z)$, $\varphi(t)$ aient chacune un certain nombre de points singuliers que nous supposerons isolés, pour simplifier: soient

$$a_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

les points singuliers de $f(z)$,

$$b_\nu \qquad\qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

ceux de $\varphi(t)$. Nous joindrons les premiers à la circonférence de rayon K, les seconds à la circonférence de rayon L, par des rayons ou, plus généralement, par des spirales logarithmiques toutes semblables entre elles et ayant l'origine comme pôle.

Nous pourrons prendre, pour les aires S et Σ, celles qu'on obtient en pratiquant, suivant ces spirales, des sections dans les deux cercles précédents. L'aire $S\Sigma$ sera alors celle qu'on déduira d'un cercle C ayant pour rayon la plus petite des quantités kL et lK, en y pratiquant des sections suivant des spirales logarithmiques semblables aux précédentes et partant des points

$$c_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu. \qquad\qquad \begin{pmatrix}\mu=1,2,\ldots,n\\ \nu=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

Donc la fonction ψ est holomorphe à l'intérieur de l'aire ainsi définie; comme, d'ailleurs, la forme des spirales logarithmiques employées est arbitraire, *les seuls points singuliers de $\psi(x)$, à l'intérieur du cercle C, sont les points $c_{\mu\nu}$.* C'est le résultat même que nous avions en vue.

9. Ce résultat peut être considéré comme généralisant, à un certain point de vue, celui qui figure dans ma thèse [1] et qui se rapporte aux points singuliers de la série

$$\Sigma C_m a_m x^m \tag{8}$$

où

$$C_m = \int_0^1 V(t) t^m dt.$$

Il présente, comme ce dernier, cette particularité d'être valable dans toute l'étendue du plan, tant en dehors qu'à l'intérieur du cercle de convergence: en un mot, de fournir une propriété du prolongement analytique d'une fonction donnée par son développement en série de puissances.

---

[1] Journal de M. Jordan, 4e série, tome 8; 1892; nos 35—37.

On doit toutefois observer qu'il lui manque, pour servir à la connaissance de ce prolongement analytique, un autre caractère important: ce caractère est l'invariance vis à vis de la transformation par laquelle on passe du développement de $f(x)$ à celui de $f(x+h)$ (h étant une constante quelconque).

Les difficultés que l'on rencontre dans l'étude des fonctions d'après leur développement taylorien tiennent, en effet, à la complication des formules qui lient entre eux les coefficients de ces deux développements (supposés ordonnés suivant les puissances de x); et l'un des problèmes dont la solution serait le plus essentielle pour cette étude est la recherche de fonctions des coefficients invariantes, non seulement vis à vis de la transformation que ces formules définissent (ce qui ne présenterait aucune difficulté, au moins pour les petites valeurs de h, et serait, d'autre part, sans utilité), mais encore par cette transformation, combinée avec l'addition d'un polynome quelconque à $f(x)$.

Malheureusement nous ne connaissons guère, dans cet ordre d'idées, qu'un seul exemple d'invariance ou plutôt de covariance: c'est celui des dérivées de $f(x)$ et, plus généralement, ainsi que je l'ai remarqué,[1] du symbole

$$D_x^a f(x) = \int_0^x (x-z)^a f(z)\,dz.$$

Quoiqu'il en soit, on serait très probablement conduit à des applications intéressantes par l'examen des cas où la série $\psi(x)$ aurait un rayon de convergence supérieur au produit des rayons de convergence primitifs k et l: ce qui pourra se produire lorsque la quantité $|\sqrt[m]{a_m}|$ ne tendra pas régulièrement vers $\frac{1}{k}$.

10. En terminant, signalons quelques formules analogues à la formule (4) et relatives aux séries de la forme $a_m e^{-\lambda_m u}$.

Soient

$$F(u) = \sum_m a_m e^{-\lambda_m u} \tag{9}$$

$$\Phi(v) = \sum_m b_m e^{-\lambda_m v} \tag{10}$$

[1] loc cit., n° 31, note.

deux telles séries, absolument convergentes pour certaines valeurs de $R(u)$ [1] et de $R(v)$. Considérons la quantité

$$\frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} F(u+wi)\Phi(v-wi)\,dw. \tag{11}$$

Comme on a

$$F(u+wi)\Phi(v-wi)$$
$$=\sum_{m,m'} a_m b_{m'} e^{-(\lambda_m u+\lambda_{m'} v)}[\cos(\lambda_m-\lambda_{m'})w+i\sin(\lambda_m-\lambda_{m'})w],$$

le développement de l'expression (11) comprendra deux parties: l'une (celle qui correspond à $m=m'$) sera égale à $\Psi(u+v)$, où l'on a posé

$$\Psi(u)=\sum_m a_m b_m e^{-\lambda_m u}. \tag{12}$$

Quant aux termes restants, qui sont de la forme

$$a_m b_{m'} e^{-(\lambda_m u+\lambda_{m'} v)}\frac{\sin(\lambda_m-\lambda_{m'})A}{(\lambda_m-\lambda_{m'})A}, \qquad (m\neq m') \tag{13}$$

ils constituent un ensemble qui tend vers zéro pour A infini; car chacun d'eux tend vers zéro et, d'autre part, la série qu'ils forment est uniformément convergente quel que soit A, puisque ses termes sont plus petits en valeur absolue que ceux de la série

$$\sum_{m,m'} a_m b_{m'} e^{-(\lambda_m u+\lambda_{m'} v)},$$

laquelle est absolument convergente, d'après les hypothèses faites sur F et Φ.

Si donc nous appelons *valeur moyenne* de $f(w)$ l'expression

$$\lim_{A=\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} f(w)\,dw,$$

---

[1] $R(u)$ désigne la partie réelle de u.

il viendra

$$\text{Val. moy. } (F(u+wi)\Phi(v-wi)) = \Psi(u+v).$$

On aura ainsi

$$\text{Val. moy. } [\zeta(u+wi)\zeta(v-wi)] = \zeta(u+v),$$

ζ étant la fonction de Riemann; et, plus généralement, le symbole D représentant une différentiation,

$$\text{Val. moy. } [D^p\zeta(u+wi)D^q\zeta(v-wi)] = D^{p+q}\zeta(u+v).$$

Les fonctions

$$\zeta(u)(1-2^{1-u}) = \Sigma(-1)^m m^{-u} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta(2u)}{\zeta(u)} = \prod \frac{1}{1+\frac{1}{p^u}}$$

ont des développements identiques à celui de ζ, aux signes des termes près. On aura donc

$$\text{Val. moy. } [\zeta(u+wi)(1-2^{1-u-wi})\zeta(v-wi)(1-2^{1-v+wi})]$$
$$= \text{Val. moy. } \left(\frac{\zeta[2(u+wi)]}{\zeta(u+wi)}\frac{\zeta[2(v-wi)]}{\zeta(v-wi)}\right) = \zeta(u+v),$$

et autres formules analogues.

En particulier, pour u réel, il vient

$$\text{Val. moy. } |\zeta(u+wi)|^2 = \zeta(2u),$$
$$\text{Val. moy. } |D^p\zeta(u+wi)|^2 = D^{2p}\zeta(2u),$$
$$\text{Val. moy. } |\zeta(u+wi)(1-2^{1-u-wi})|^2 = \zeta(2u),$$
$$\text{Val. moy. } \left|\frac{\zeta[2(u+wi)]}{\zeta(u+wi)}\right|^2 = \zeta(2u). \tag{14}$$

Il est intéressant de remarquer que le second membre de cette dernière formule reste fini, pour u compris entre $\frac{1}{2}$ et 1; et on peut se demander si la formule ne subsisterait pas pour ces valeurs de u; ce qui exigerait, bien entendu, la réalité de racines de l'équation[1]

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + wi\right) = 0. \tag{15}$$

Cenon, 18 août 1897.

---

[1] Il est probable qu'il ne faudrait pas chercher à démontrer la réalité des racines de l'équation (15) par des considérations de cette espèce, non plus que par toute autre voie reposant sur la décomposition de $\zeta(u)$ en produit. Cette décomposition ne permet, en effet, d'utiliser que les propriétés suivantes de la fonction ζ:

1° $\zeta(u)$ (pour $R(u) > 1$) est le produit de facteurs de la forme $\frac{1}{1 - p^{-u}}$, où les nombres p sont positifs et croissent indéfiniment;

2° $\zeta(u)$ est uniforme dans tout le plan et égal au quotient, par $\frac{u(u-1)}{2}\pi^{-\frac{u}{2}}\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)$ d'une fonction entière de genre zéro par rapport à $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2$.

Or rien ne porte à croire qu'il n'existe pas une infinité de fonctions satisfaisant aux conditions précédentes, sans avoir leurs zéros situés sur la droite $R(u) = \frac{1}{2}$.

Bien entendu, il se peut que les racines de l'équation (15) soit réelles sans que la formule (14) soit vraie et sans même que son premier membre ait un sens.