

Metrische Eigenschaften der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt.

Von Gottlieb Stiner in Zürich.

I.

1. Es seien gegeben ein Kegelschnitt \mathfrak{K} , eine Gerade a und auf dem Kegelschnitt ein fester Punkt D . Zieht man durch D irgend einen Strahl d , so wird dieser den Kegelschnitt \mathfrak{K} zum zweiten Mal in einem Punkt K treffen und die Gerade a in einem Punkt A schneiden. Construiert man auf jedem Strahl d denjenigen Punkt P , für welchen

$$DA = KP$$

oder, was damit gleichbedeutend ist

$$DP = DA + DK$$

so ist der Ort von P eine Curve dritter Ordnung, welche in D einen Doppelpunkt hat.

Um dies zu beweisen, zieht man durch K die Parallele k zu a , welche dem Kegelschnitt in einem zweiten Punkt K_1 begegnet. Der Punkt P_1 , für welchen $DA_1 = K_1P_1$, liegt dann mit P auf einer Geraden p , welche zu a parallel ist und welche von k dieselbe Entfernung hat wie a von D . Dreht sich demnach d um den Scheitel D , so beschreiben die Geraden k und p 2 congruente gleichstimmige Parallelenbüschel. Die Strahlenpaare dd_1 bilden eine Involution, welche zu dem Büschel der Linien k perspectivisch, somit zu dem Büschel der Linien p projectivisch ist. Der definierte Ort von P entsteht folglich als Erzeugniss der projectivischen Zuordnung der Strahlenpaare einer Involution zu den Strahlen eines Büschels; er ist eine Curve dritter Ordnung C_3 , für welche D ein Doppelpunkt und die gemeinsame Richtung A_∞ der Linien p ein einfacher Punkt ist¹⁾.

Die symmetrische Gerade zu a in Bezug auf D sei a^* ; diese begegne dem Kegelschnitt \mathfrak{K} in den 2 Punkten G und H . Dann sind die Strahlen $DG = g$ und $DH = h$ die Doppelpunktstangenten, weil die nach dem allgemeinen Verfahren auf diesen Strahlen lie-

¹⁾ E. Weyr: Theorie der mehrdeutigen geom. Elementargebilde, Leipzig 1869.

genden Punkte der C_3 mit D zusammenfallen. D ist also ein eigentlicher Doppelpunkt, ein Rückkehrpunkt oder ein isolirter Doppelpunkt je nachdem a^* den Kegelschnitt \mathfrak{K} reell schneidet, berührt oder nicht reell schneidet.

2. Die Tangente in einem Punkt P der C_3 ergibt sich durch folgende Betrachtung. Man nehme durch D einen Strahl d' welcher mit $DP = d$ einen kleinen Winkel einschließt und construirt auf demselben den Punkt P' der C_3 nach der Bedingung $DA' = KP'$. Dann gibt es eine Hyperbel, welche a und die Verbindungslinie KK' zu Asymptoten hat und durch die 3 Punkte D, P, P' geht. Dreht man jetzt $DP' = d'$ in der Richtung nach d , so nähert sich die Linie KK' der Tangente t in K an den gegebenen Kegelschnitt und die gemeinsame Sehne PP' der Hyperbel und der C_3 nähert sich der Tangente in P an C_3 . Im Grenzfall, wo d' mit d zusammenfällt, fällt KK' mit t zusammen und die Hyperbel und die C_3 berühren sich im Punkte P . Man erkennt daraus für die Tangente in P an C_3 die folgende Construction: sie ist die Tangente in P an diejenige Hyperbel, welche durch P geht und die beiden Geraden a und t zu Asymptoten hat. Construirt man also zum Schnittpunkt von a und t den symmetrischen in Bezug auf den Schnittpunkt von p und t , so ist dieser ein Punkt der gesuchten Tangente. Der letztere Punkt kann auch definiert werden als der symmetrische in Bezug auf K zum Schnittpunkte von t und a^* .

Zu dieser Tangentenconstruction kann man auch durch die folgende Überlegung kommen: Haben K, K', P, P' dieselbe Bedeutung wie vorhin, so gibt es auch eine Hyperbel, welche durch D, K und K' geht und die Linien a^* und PP' zu Asymptoten hat. Im Grenzfall, wo d und d' zusammenfallen, wird die Linie KK' zur Tangente t in K an den gegebenen Kegelschnitt und die Asymptote PP' wird zur Tangente in P an C_3 . Die Tangente in P an C_3 ist also dadurch definiert als die durch P gehende Asymptote derjenigen Hyperbel, welche a^* zur einen Asymptote hat und welche in K den gegebenen Kegelschnitt berührt. Weil aber der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente in der Mitte des durch die Asymptoten auf der Tangente abgeschnittenen Segmentes liegt, so findet man also einen zweiten Punkt der gesuchten Asymptote, wenn man zum Schnittpunkt von t mit a^* den symmetrischen Punkt construirt in Bezug auf den Berührungspunkt K von t mit \mathfrak{K} .

Das Princip der letzten Tangentenconstruction kann auch verwendet werden zur Bestimmung der 3 Schnittpunkte einer beliebigen Geraden g mit der Curve C_3 : Es gibt eine Hyperbel, welche a^* und g zu Asymptoten hat und durch D geht; diese schneidet den gegebenen Kegelschnitt außer in D noch in 3 weiteren Punkten K_1, K_2, K_3 . Die Strahlen DK_1, DK_2 und DK_3 treffen g in den 3 gesuchten Punkten.

Aus den allgemeinen Tangentenconstructionen folgt speciell:

a) Die gegebene Gerade a ist die Tangente des Punktes A_{∞} , also

eine Asymptote der C_3 ; *b*) die Asymptoten des gegebenen Kegelschnittes sind die 2 andern Asymptoten der C_3 ; *c*) sind K_1 und K_2 die Berührungspunkte der zu a parallelen Tangenten von \mathcal{K} , so sind die Tangenten in den zugehörigen Punkten P_1 und P_2 der C_3 ebenfalls zu a parallel.

3. An die gegebenen Tangentenconstructionen schliesst sich noch Folgendes. Die erste Construction gibt Veranlassung zu dem Satz:

Die Enveloppe der sämtlichen Hyperbeln, welche eine feste Gerade a zur einen Asymptote haben, durch einen gegebenen Punkt D gehen und deren zweite Asymptote einen durch D gehenden festen Kegelschnitt berührt, ist eine Curve dritter Ordnung, für welche D ein Doppelpunkt und a eine Asymptote ist; der Berührungspunkt irgend einer Hyperbel des Systems mit der Enveloppe liegt auf der Geraden von D nach dem Berührungspunkt der zweiten Asymptote mit dem Kegelschnitt.

Die zweite Construction führt zu dem Satz:

Construiert man die sämtlichen Hyperbeln, welche eine feste Gerade a^* zur einen Asymptote haben, durch einen Punkt D gehen und außerdem einen durch D gehenden Kegelschnitt in irgend einem Punkte K berühren, so ist die Enveloppe der zweiten Asymptoten dieser Hyperbeln eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt in D . Der Berührungspunkt irgend einer dieser Asymptoten liegt auf der Linie von D nach dem Berührungspunkt K der zugehörigen Hyperbel mit dem gegebenen Kegelschnitt.

Dieser Satz liefert ein bequemes Mittel, um eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt aus Tangenten zu construieren.

Beide Sätze lassen sich projectivisch verallgemeinern. Die Verallgemeinerungen lauten:

a) Es seien gegeben zwei Gerade a und q , ein Punkt D und ein durch D gehender Kegelschnitt \mathcal{K} . Ist t eine variable Tangente des gegebenen Kegelschnittes, so ist die Enveloppe derjenigen Kegelschnitte, welche durch D gehen, ferner a im Schnittpunkt aq und t im Schnittpunkt tq berühren, eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt in D . Der Berührungspunkt der Enveloppe mit einem Kegelschnitt des Systems liegt auf der Geraden von D nach dem Berührungspunkt von t mit dem gegebenen Kegelschnitt.

b) Es seien gegeben zwei Gerade a^* und q , ein Punkt D und ein durch D gehender Kegelschnitt.

Construiert man die sämtlichen Kegelschnitte, welche durch D gehen, ferner a^* im Schnittpunkt a^*q und den Kegelschnitt in irgend einem Punkt K berühren, so umhüllen die Tangenten dieser Kegelschnitte in den resp. zweiten Schnittpunkten mit q eine Curve dritter Ordnung, welche in D einen Doppelpunkt hat. Der Berührungspunkt einer solchen Tangente mit der Enveloppe liegt auf der Verbindungslinie von D mit dem zugehörigen Punkt K des gegebenen Kegelschnittes.

Beide Sätze führen durch specielle Wahl der gegebenen Elemente zu interessanten Resultaten. Die dualistischen Übertragungen dieser zwei Sätze liefern Constructionen für die Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente. Durch Specialisierung dieser dualistischen Übertragungen ergeben sich folgende Constructionen für die Steiner'sche Hypocykloide:

a) Es sei gegeben eine feste Parabel mit dem Brennpunkt A^* ; A sei ein beliebig gewählter Punkt der Ebene und Q der Mittelpunkt der Strecke AA^* . Ist nun T ein variabler Punkt der Parabel, so ist die Enveloppe der sämtlichen Parabeln, welche die Gerade AQ in A und die Gerade TQ in T berühren, eine Steiner'sche Hypocykloide. Der Berührungspunkt einer Parabel des Systems mit der Enveloppe liegt auf derjenigen Tangente dieser Parabel, welche parallel ist zur Tangente im zugehörigen Punkte T an die feste Parabel.

b) Es sei gegeben eine feste Parabel mit dem Brennpunkt A^* ; Q sei ein willkürlich angenommener Punkt der Ebene. Construiert man die sämtlichen Parabeln, welche die Gerade A^*Q in A^* und die gegebene Parabel in irgend einem Punkte T berühren, so liegen die Berührungspunkte P der zweiten Tangenten dieser Parabeln aus Q auf einer Steiner'schen Hypocykloide. Die Tangente in einem Punkte P der Curve ist parallel mit der Tangente im zugehörigen Punkte T an die feste Parabel.

Beide Sätze erfordern nur die Anwendung des Brianchon'schen Satzes. Aus diesen Sätzen ergibt sich auch die Beziehung, welche besteht zwischen drei Tangenten der Steiner'schen Hypocykloide, die durch einen Punkt Q gehen und den zugehörigen Berührungspunkten. Sie lautet: Je zwei dieser Tangenten mit ihren Berührungspunkten bestimmen eine Parabel; die dritte Tangente geht durch den Brennpunkt dieser Parabel und der zugehörige Berührungspunkt ist der symmetrische zu diesem Brennpunkt in Bezug auf Q .

4. Es bleibt noch zu zeigen, dass jede C_3 mit einem Doppelpunkt, bei welcher der Doppelpunkt und eine Asymptote im Endlichen liegen, nach der in §. 1 angegebenen Weise dargestellt werden kann. D sei der Doppelpunkt, a die Asymptote; d ein Strahl durch den Doppelpunkt, A dessen Schnittpunkt mit der

Asymptote und P dessen letzter Schnittpunkt mit C_3 . Construiert man auf jedem Strahl a durch D denjenigen Punkt K , für welchen $DA = KP$, so ist der Ort von K ein Kegelschnitt, welcher durch D geht. Zum Beweis zieht man durch P die Parallele p zu a , welche der C_3 außer in P und A_∞ in einem dritten Punkt P_1 begegnet. Construiert man zu P_1 den Punkt K_1 , so dass $DA_1 = K_1P_1$, so liegen K und K_1 auf einer Linie k , welche zu p parallel ist und von ihr denselben Abstand hat wie D von a . Wenn sich also P verändert, so beschreiben p und k zwei congruente Parallelenbüschel. Nun bilden die Strahlenpaare $DP = d$ und $DP_1 = d_1$ eine Involution, welche projectivisch ist zum Büschel der Linien p^1 , also auch projectivisch zum Büschel der Linien k . Der Ort von K entsteht also als Erzeugniss der ein-zweideutigen Zuordnung der Linien k und d , ist demnach eine C_3 . Fällt aber p mit a zusammen, so fällt der eine Strahl des zugehörigen Paares dd_1 zusammen mit der Parallelen durch D zu a , mit welcher Geraden sich dann auch das entsprechende k deckt. Diese Gerade sondert sich demnach als Bestandtheil der C_3 ab und es bleibt als eigentlicher Ort von K ein Kegelschnitt, welcher durch D geht.

Ist demnach eine C_3 gegeben durch den Doppelpunkt D , eine Asymptote a und vier Punkte $P_1..P_4$, so wird man zur weiteren Construction der Curve so verfahren: Man bestimmt auf den vier Strahlen DP_i die Punkte K_i , für welche $DA_i = K_iP_i$, dann definieren diese vier Punkte K_i mit D einen Kegelschnitt. Construiert man jetzt auf jedem Strahl durch D zum zweiten Schnittpunkt K mit dem Kegelschnitt den Punkt P , für welchen $DA = KP$, so beschreibt P die definierte C_3 . Der construierte Kegelschnitt hat die zwei weiteren Asymptoten der C_3 zu seinen Asymptoten. Ist also speciell die Curve circular, so ist der Kegelschnitt ein Kreis und der Mittelpunkt des Kreises der ausgezeichnete Brennpunkt der Curve.

Sind von C_3 statt zweier Punkte P_i ein Punkt und seine Tangente gegeben, so tritt eine geringe Modification der Construction des Kegelschnittes ein, welche sich aus §. 2 ergibt.

Wenn die C_3 speciell gegeben ist durch den Doppelpunkt und die drei Asymptoten $aa'a''$, so kann man als Kegelschnitt eine der drei Hyperbeln nehmen, welche zwei der gegebenen Geraden zu Asymptoten hat und durch D geht. Man nehme z. B. die durch D gehende Hyperbel, für welche a' und a'' die Asymptoten sind. d sei ein beliebiger Strahl durch D , $AA'A''$ seien seine Schnittpunkte mit $aa'a''$. Dann erhält man auf d den Punkt K , wenn man auf d von A' aus eine Strecke abträgt, welche gleich und gleich gerichtet ist mit DA'' , also $DK = DA' + DA''$. Nun erhält man den auf d liegenden Punkt P der C_3 nach der Be-

¹⁾ Man vergl. E. Weyr a. a. O.

ziehung $DA = KP$. Durch zweimaliges Abtragen von Strecken bekommt man also auf jedem durch D gehenden Strahl den Punkt P . Nun ist

$$\begin{aligned} DP &= DK + KP \\ &= DK + DA \\ &= DA + DA' + DA'' \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Satz: Ist d ein beliebiger Strahl durch den Doppelpunkt D einer C_3 , P sein Schnittpunkt mit der Curve, $AA'A''$ seine Schnittpunkte mit den drei Asymptoten der Curve, so ist immer $DP = DA + DA' + DA''$.¹⁾

Mit Hilfe dieser Construction von P ergibt sich speciell noch die Bestimmung der Schnittpunkte der Asymptoten mit der Curve. Der Schnittpunkt von a mit C_3 ist der Schnittpunkt von a mit der Tangente in D an die oben betrachtete durch D gehende Hyperbel, welche a' und a'' zu Asymptoten hat; entsprechend ergeben sich die Schnittpunkte mit a' und a'' . Aus dieser Construction folgt: Liegt insbesondere D auf einer Schwerlinie des durch die Asymptoten gebildeten Dreiecks, so ist die Seite des Dreiecks, welche durch diese Schwerlinie halbiert wird, eine Wendenasymptote der Curve. Fällt D in den Schwerpunkt des Dreiecks, so sind die drei Asymptoten Wendenasymptoten.

Der Satz $DP = DA + DA' + DA''$ lässt sich auch für den Fall beweisen, wo von den drei Asymptoten zwei, z. B. a' und a'' imaginär sind. Der Beweis kann so geliefert werden: a'_i und a''_i sind conjugiert imaginär, also darstellbar als Doppelstrahlen einer elliptischen Involution I . Wir können dann die durch Daa'_i und a''_i definierte C_3 construieren unter Benützung der Ellipse, welche durch D geht und I zu ihrer Durchmesserinvolution hat. Ein Strahl d trifft diese Ellipse in einem Punkt K und wir finden den zugehörigen Punkt P nach der Beziehung $DP = DA + DK$. Nun ist aber $DK = 2DM$, wenn M der Mittelpunkt der Involution harmonischer Pole von d in Bezug auf die Ellipse ist. Man erhält M , wenn man den Mittelpunkt der Punktinvolution construirt, in welcher d von der gegebenen Strahleninvolution I geschnitten wird. Sind also A'_i und A''_i die Doppelpunkte dieser Punktinvolution, d. h. die Schnittpunkte von d mit a'_i und a''_i , so ist auch $DA'_i + DA''_i = 2DM$; somit ist

$$\begin{aligned} DK &= DA'_i + DA''_i, \text{ oder} \\ DP &= DA + DA'_i + DA''_i. \end{aligned}$$

¹⁾ Auf die weitgehenden Verallgemeinerungen dieses Satzes wird der Verfasser bei anderer Gelegenheit zu sprechen kommen.

II.

5. Es seien wieder gegeben wie in § 1 ein Kegelschnitt, eine Gerade a und auf dem Kegelschnitt ein Punkt D . Construiert man auf jedem Strahl d durch D einen Punkt P so dass $DK = PA$, so ist der Ort von P ebenfalls eine Curve dritter Ordnung, welche in D einen Doppelpunkt hat. Der Beweis hiefür kann auf dieselbe Art geliefert werden wie in § 1. Zwischen den zusammengehörigen Strahlen k und p besteht hier die Beziehung, dass die Mittellinie zwischen k und p immer auch die Mittellinie ist zwischen a und D . Je zwei zusammengehörige Strahlen k und p liegen also symmetrisch in Bezug auf diese Mittellinie m . Man erkennt hieraus, dass der Ort von P entsteht als Erzeugniss der projectivischen Zuordnung der Strahlen des Büschels vom Scheitel A_∞ zu den Strahlenpaaren einer Involution vom Scheitel D . P kann auch definiert werden als der symmetrische Punkt zu K in Bezug auf den Schnittpunkt von d mit m .

Aus der Construction folgt speciell: *a*) C_3 geht durch die Schnittpunkte von m mit dem gegebenen Kegelschnitt. *b*) Sind G und H die Schnittpunkte von a mit dem gegebenen Kegelschnitt, so sind $DG = g$ und $DH = h$ die beiden Doppelpunktstangenten. D ist demnach ein Knotenpunkt, ein Rückkehrpunkt oder ein isolirter Doppelpunkt, je nachdem a den gegebenen Kegelschnitt reell schneidet, berührt oder nicht reell schneidet.

6. Um in P die Tangente der C_3 zu construieren, nimmt man wieder einen Strahl d' , welcher mit d einen kleinen Winkel einschließt und construirt auf diesem den Punkt P' , so dass $DK' = P'A'$. Nun gibt es eine Hyperbel, welche durch die 4 Punkte $KK'PP'$ geht, für welche a die eine Asymptote und D ein Punkt der zweiten Asymptote ist. Dreht man den Strahl d' in der Richtung nach d , so bewegt sich K' auf dem Kegelschnitt in der Richtung nach K und P' bewegt sich auf der C_3 in der Richtung nach P . Ist d' mit d unendlich benachbart, so berührt die definierte Hyperbel in K den gegebenen Kegelschnitt und in P die C_3 . Es ergibt sich also für die Tangente in P an C_3 die folgende Construction: Sie ist die Tangente in P an diejenige Hyperbel, welche a zur einen Asymptote hat, in K den gegebenen Kegelschnitt berührt und durch P geht. Nach einem bekannten Satz über die Hyperbel findet man einen zweiten Punkt der gesuchten Tangente, wenn man in Bezug auf A den symmetrischen Punkt nimmt zum Schnittpunkt von a mit der Tangente in K an den gegebenen Kegelschnitt.

Zu demselben Punkt der gesuchten Tangente kann man auch auf folgende Weise kommen: Es gibt eine Hyperbel, welche die Linien KK' und PP' zu Asymptoten hat und durch die 3 Punkte $DA A'$ geht. Wenn d' unendlich nahe zu d rückt, so wird KK' zur Tangente t in K an den gegebenen Kegelschnitt, PP' zur Tangente in P an C_3 und $AA' = a$ zur Tangente in A an die Hyperbel. Die gesuchte Tangente der C_3 in P ist somit definiert als

die zweite Asymptote derjenigen Hyperbel, welche t zur einen Asymptote hat, die Linie a in A berührt und durch D geht. Man findet also einen zweiten Punkt der gesuchten Asymptote, wenn man in Bezug auf A den symmetrischen nimmt zum Schnittpunkt von a und t . Aus dieser Tangentenconstruction folgt noch: Die Linie a ist die Tangente des Punktes A_∞ , also eine Asymptote. Die beiden anderen Asymptoten sind die symmetrischen Geraden in Bezug auf D zu den Asymptoten des gegebenen Kegelschnittes.

7. Analog den Sätzen von §. 3 ergibt sich hier:

a) Die Enveloppe der Hyperbeln, deren eine Asymptote eine feste Gerade a ist, deren zweite Asymptote durch einen festen Punkt D geht und welche überdies einen durch D gehenden Kegelschnitt berühren ist eine C_3 , welche a zur einen Asymptote und D zu einem Doppelpunkt hat. Der Berührungspunkt irgend einer Hyperbel des Systems mit der Enveloppe liegt auf der Linie von D nach dem Berührungspunkt der Hyperbel mit dem festen Kegelschnitt.

b) Ist D ein fester Punkt, a eine feste Gerade, A ein variabler Punkt derselben und K der zweite Schnittpunkt von DA mit einem durch D gehenden festen Kegelschnitt und construirt man für jede Lage von A die Hyperbel, welche durch D geht, a in A berührt und die Tangente in K an den festen Kegelschnitt zur einen Asymptote hat, so ist die Enveloppe der zweiten Asymptote eine C_3 , für welche a eine Asymptote und D der Doppelpunkt ist. Der Berührungspunkt einer solchen zweiten Asymptote liegt mit D , A und K in einer Geraden.

Auch hier können, wie in §. 3, die projectivischen Verallgemeinerungen und für diese die dualistischen Uebertragungen gebildet werden. Durch Specialisierung der Letzteren ergeben sich 2 weitere Constructionen der Steiner'schen Hypocykloide:

a) A sei der Brennpunkt einer Parabel und Q ein ganz beliebiger Punkt der Ebene. Construirt man die Hyperbeln, welche die Linie AQ in A und die Parabel in irgend einem Punkte T berühren und deren eine Asymptote durch Q geht, so ist die Enveloppe derselben eine Steiner'sche Hypocykloide. Die Berührungsstelle irgend einer Hyperbel des Systems mit der Enveloppe liegt auf derjenigen Tangente der Hyperbel, welche parallel ist zur Tangente in T an die gegebene Parabel.

Es ist dabei nur noch zu bemerken, dass aus obigen Bedingungen für die Hyperbel die durch Q gehende Asymptote gefunden werden kann als die Parallele zum vierten harmonischen Strahl zu TA in Bezug auf TQ und die Tangente in T an die Parabel.

b) A sei der Brennpunkt einer Parabel, k sei eine beliebige Tangente derselben mit dem Berührungspunkt T , a die Parallele

zu k durch A , endlich Q ein ganz willkürlicher Punkt der Ebene. Construiert man für jede Lage von k diejenige Parabel, welche QT in T und a in A berührt, so beschreibt der Berührungspunkt der zweiten Tangente aus Q an diese Parabel eine Steiner'sche Hypocykloide. Die Tangente eines solchen Punktes ist immer parallel zur zugehörigen Lage von k .

Einfache Constructionen der Hypocykloide ergeben sich auch aus den Ausgangsconstructionen in den §§. 1 und 5.

8. In §. 5 wurde gezeigt, dass die Doppelpunktstangenten g und h der C_3 die Verbindungslinien von D mit den Schnittpunkten G und H von a mit dem gegebenen Kegelschnitt sind. Nun sind die Doppelpunktstangenten die Doppelstrahlen derjenigen Involution, welche gebildet wird durch die Verbindungslinien der Paare conjugierter Punkte der C_3 mit dem Doppelpunkt¹⁾. Ist also XX_1 ein beliebiges Paar der Involution harmonischer Pole von a in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt, so gehen die Strahlen DX und DX_1 nach einem Paar conjugierter Punkte der C_3 . Die zweiten Schnittpunkte von DX und DX_1 mit dem gegebenen Kegelschnitt seien \mathfrak{P} und \mathfrak{P}_1 , die ihnen zugehörigen Punkte der C_3 seien P und P_1 , also $D\mathfrak{P} = PX$ und $D\mathfrak{P}_1 = P_1X_1$. Die Verbindungslinie $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ geht durch den Pol P_a von a in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt und die Tangenten in \mathfrak{P} und \mathfrak{P}_1 an den gegebenen Kegelschnitt schneiden sich in einem Punkte \mathfrak{Z} von a . Construiert man mit Hilfe dieser Tangenten nach § 6 die Tangenten t und t_1 in P und P_1 an C_3 , so findet man einen Punkt von t , wenn man zu \mathfrak{Z} den symmetrischen Punkt nimmt in Bezug auf X und man findet einen Punkt von t_1 , wenn man zu \mathfrak{Z} den symmetrischen Punkt nimmt in Bezug auf X_1 . Aus dieser Construction folgt, dass das Segment von a zwischen diesen 2 symmetrischen Punkten doppelt so groß ist wie das Segment XX_1 und man hat damit den Satz: Das Segment, welches die Tangenten in 2 conjugierten Punkten einer C_3 , bei welcher D und a im Endlichen liegen, auf einer Asymptote abschneiden, ist immer gleich gerichtet und doppelt so groß wie das Segment, welches auf derselben Asymptote abgeschnitten wird durch die Verbindungslinien dieser conjugierten Punkte mit dem Doppelpunkt.²⁾

Die Tangenten t und t_1 schneiden sich in einem neuen Punkt T der C_3 , dem Tangentialpunkt von P und P_1 . Durch unsere Construction ist nun jedem Punkt \mathfrak{Z} der Linie a ein bestimmter Punkt T der C_3 zugeordnet und umgekehrt. Man kann zeigen, dass die Zuordnung eine projectivische ist. Die Paare der Strahleninvolution DP, DP_1 sind projectivisch zugeordnet den Strahlen DT ³⁾; letzteres

¹⁾ Man vergl. E. Weyr a. a. O.

²⁾ Dass jede C_3 , bei welcher D und a im Endlichen liegen, auf die Weise des §. 5 dargestellt werden kann, wird auf analoge Art bewiesen wie in §. 4.

³⁾ Man vergl. E. Weyr a. a. O.

Büschel ist also projectivisch zu dem Büschel der Linien $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ durch den Pol P_a . Dieses Büschel endlich ist projectivisch zur Reihe seiner Pole \mathfrak{Z} auf a . Daraus folgt also, dass die Reihe der Punkte \mathfrak{Z} projectivisch ist zum Büschel der Geraden DT . Die eindeutige Beziehung, welche besteht zwischen den Paaren conjugierter Punkte der C_3 und den zugehörigen Tangentialpunkten ist also damit eindeutig übertragen auf den gegebenen Kegelschnitt und die Gerade a , in der Weise, dass der Kegelschnitt der Träger der zweideutigen Reihe und die Gerade a der Träger der eindeutigen Reihe ist. Es ist noch zu bemerken, dass 2 Punkte \mathfrak{Z} und \mathfrak{Z}_1 von a die correspondierenden von 2 conjugierten Punkten T und T_1 der C_3 sind, wenn sie conjugierte harmonische Pole sind in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt.

Die obige Übertragung führt zu folgender Betrachtung: Legt man durch den Punkt T der C_3 einen veränderlichen Strahl, welcher der Curve in jeder Lage noch in 2 Punkten P' und P'' begegnet, so bilden die Strahlenpaare DP', DP'' eine Involution, deren Doppelstrahlen die Linien DP und DP_1 sind.¹⁾ Daraus folgt, dass die Verbindungslinien der zugehörigen Punkte \mathfrak{P}' und \mathfrak{P}'' auf dem Kegelschnitt durch \mathfrak{Z} gehen müssen. Man kann zeigen, dass die Zuordnung der Strahlen $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ zu den Strahlen $P'P''$ eine projectivische ist. Das Büschel der Linien $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ ist nämlich perspectivisch zu der Strahleninvolution $D\mathfrak{P}', D\mathfrak{P}''$ und diese Involution ist wiederum projectivisch zu dem Büschel der Linien $P'P''$. Zieht man also in der Ebene irgend eine Gerade, welche dem Kegelschnitt in 2 Punkten \mathfrak{P}' und \mathfrak{P}'' und der Geraden a in einem Punkt \mathfrak{Z} begegnet, so liegen die Punkte P' und P'' in gerader Linie mit dem Punkt T der C_3 , welcher \mathfrak{Z} correspondiert.

9. Mit Hilfe der Resultate des vorhergehenden Paragraphen lässt sich eine vollständige Theorie der conjugierten Punkte der C_3 einfach ableiten aus den Involutionseigenschaften des gegebenen Kegelschnittes.

Einige Beispiele mögen dies zeigen:

1. Verbindet man zwei Punkte \mathfrak{P} und \mathfrak{P}_1 des gegebenen Kegelschnittes, deren Verbindungslinie durch den Pol P_a von a geht, mit einem beliebigen Punkte \mathfrak{Z} von a , so treffen diese Verbindungslinien den Kegelschnitt zum zweitenmal in zwei neuen Punkten \mathfrak{P}' und \mathfrak{P}'_1 , deren Verbindungslinie durch P_a geht. Daraus folgt: Verbindet man zwei conjugierte Punkte der C_3 mit einem beliebigen Curvenpunkt T , so sind die dritten Schnittpunkte dieser zwei Verbindungslinien wieder ein Paar conjugierter Punkte P' und P'_1 der C_3 .

¹⁾ Man vergl. E. Weyr a. a. O.

2. Verbindet man noch $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'_1$ und $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}'$, so schneiden sich diese zwei Geraden in einem Punkt \mathfrak{T}_1 von a , welcher der conjugierte ist zu \mathfrak{T} in der Involution harmonischer Pole auf a in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt. Daraus folgt: Verbindet man PP'_1 und $P'P_1$, so schneiden sich diese Linien in einem Punkt T_1 der C_3 , welcher der conjugierte ist von T .

3. Sind \mathfrak{P} und \mathfrak{P}_1 zwei Punkte des Kegelschnittes, deren Tangenten sich in einem Punkt \mathfrak{T} von a schneiden, so ist der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ mit a der conjugierte Punkt zu \mathfrak{T} in der Involution harmonischer Pole von a in Bezug auf den Kegelschnitt. Daraus folgt: Die Verbindungslinie von zwei conjugierten Punkten PP_1 trifft die C_3 in einem neuen Punkt T_1 , welcher der conjugierte ist zum Tangentialpunkt T von P und P_1 .

Die sechs Punkte $PP_1P'P'_1TT_1$ in Beispiel 2. sind die Ecken eines vollständigen Vierseits. Die Sätze von §. 8 geben neue Gesichtspunkte für die Schließungsprobleme überhaupt.

III.

Die in den §§. 1 und 5 entwickelten Constructionen der C_3 sollen noch verwendet werden zur Construction der beiden bekanntesten Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, der Strophoide und der Cissoide.¹⁾

Die Strophoide.

10. Der gegebene Kegelschnitt sei ein Kreis vom Mittelpunkt M ; D sei ein beliebiger Punkt des Kreises, O der symmetrische Punkt zu M in Bezug auf D und endlich a die Senkrechte in O zum Durchmesser OM . Construiert man hier auf jedem Strahl durch D einen Punkt P , so dass $DK=AP$, so ist der Ort von P eine Strophoide. a ist eine Wendearsymptote der Curve; die beiden andern Asymptoten sind die imaginären Asymptoten des Kreises vom Mittelpunkt M . Weil M auf der Strophoide liegt, so sind also die Kreispunkte conjugierte Punkte der Curve. Letzteres hat zur Folge, dass die Doppelpunktstangenten g und h zu einander senkrecht stehen, was durch die allgemeine Construction derselben bestätigt wird. Verbindet man P und K mit M , so ist $\triangle AOD \cong \triangle PMK$, weil $OD=MK=r$, $AD=PK$ und $\sphericalangle ADO = \sphericalangle KDM = \sphericalangle PKM$. Aus der Congruenz folgt: $\sphericalangle PMK = 90^\circ$. Ist K' der zu K diametral gegenüberliegende Punkt im Kreis, so liegt zufolge dieser Eigenschaft P' ebenfalls auf MP . Man bekommt damit den Satz:

¹⁾ Man vergl. dazu hauptsächlich: M. G. de Longchamps: Cours de Mathématiques spéciales, II^e partie, 2^e et 3^e leçons mit den zugehörigen Übungen.
Ferner: Baltzer: Analytische Geometrie, §. 26.

Projiciert man von irgend einem Punkt D eines Kreises aus die Endpunkte jedes Durchmessers auf den dazu senkrechten Durchmesser, so ist der Ort dieser Projectionen eine Strophoide. Diese Construction kann auch so aufgefasst werden:

Bei einem veränderlichen rechtwinkligen Dreieck PMK , dessen eine Kathete MK von constanter Länge ist, drehe sich der Scheitel des rechten Winkels um einen festen Punkt M und die Hypotenuse drehe sich um einen festen Punkt D , welcher der Bedingung genügt, dass $MD = MK$, dann beschreibt die letzte Ecke P eine Strophoide.

Man kann für diese Construction einen einfachen Mechanismus herstellen.

B sei der Schnittpunkt von MP mit a , dann ist $\sphericalangle BAP = \sphericalangle BPA$, weil beide gleich sind mit $\sphericalangle KPM$. Das Dreieck ABP ist also ein gleichschenkliges. Man hat damit den Satz:

Verändert sich ein gleichschenkliges Dreieck so, dass der eine Schenkel AB sich auf der festen Geraden a bewegt, während der andere Schenkel BP sich um einen festen Punkt M und die Basis AP sich um einen festen Punkt D dreht, so ist der Ort der Ecke P eine Strophoide.

Man kann diese Construction dadurch verallgemeinern, dass man an Stelle von a irgend eine dazu parallele Gerade p nimmt. Lässt man p speciell mit der Tangente d in D an den gegebenen Kreis zusammenfallen, so folgt:

Bleiben von einem gleichschenkligen Dreieck DCP die Ecke D und die Richtung des einen Schenkels DC fest, während der andere Schenkel CP durch einen festen Punkt M geht, welcher auf der Senkrechten in D zu CD liegt, so ist der Ort von P eine Strophoide.

Ist also C ein beliebiger Punkt von d , so bekommt man die zwei Punkte P und P' der Curve, welche auf CM liegen, so, dass man auf CM von C aus nach beiden Seiten die Länge CD abträgt. Man kann dies auch so ausdrücken:

Die Endpunkte der durch M gehenden Durchmesser sämtlicher Kreise, welche durch D gehen und ihre Mittelpunkte auf d haben, liegen auf einer Strophoide.

Es ergibt sich noch, dass auf jedem Strahl durch M die Entfernungen MP und $P'B$ einander gleich sind.

Nimmt man in obiger Construction zwei Kreise, deren Centra C und C_1 symmetrisch zu D liegen, so erhält man 4 Punkte der $C_3 PP_1P'_1$, welche paarweise symmetrisch zu OM liegen; die Verbindungslinien PP_1 und $P'P'_1$ sind also parallel zu a und liegen symmetrisch in Bezug auf D . Man kann zeigen, dass die 4 Geraden PP' , $P_1P'_1$, PP_1 und $P'P'_1$ Tangenten eines Kreises

vom Centrum D sind. Es ist nämlich $\sphericalangle CDP = \sphericalangle P'PD = \sphericalangle DPP_1$; also ist DP die Halbierungslinie des $\sphericalangle P'PP_1$, womit der Satz bewiesen ist. Daraus folgt der Satz:

Schneidet man die Tangenten aus M an irgend einen Kreis vom Centrum D mit den zwei zu MD senkrechten Tangenten desselben Kreises, so ist der Ort dieser Schnittpunkte eine Strophoide.

Eine weitere Eigenschaft der Strophoide ergibt sich aus der Betrachtung der 2 letzten Seiten PP'_1 und P'_1P_1 des Vierecks $PP_1P'_1P'_1$. m sei die Senkrechte in M zu MD , Q und Q_1 die Schnittpunkte derselben mit PP'_1 und P_1P' , ferner F der symmetrische Punkt zu D in Bezug auf M . Dann ist $DQ \perp P_1P'$ und $DQ_1 \perp PP'_1$, weil Q und Q_1 die Pole sind von P_1P' und PP'_1 in Bezug auf den Kreis, welcher die Linien PP' , $P_1P'_1$, PP_1 und P'_1P_1 berührt. Weiter ist nun $PP'_1 \perp FQ$ und $P'_1P_1 \perp FQ_1$, d. h. die Linien PP'_1 und P_1P' sind Tangenten derjenigen Parabel, für welche F der Brennpunkt und M der Scheitel ist.

Die Geraden DQ und P_1P' schneiden sich in einem Punkt P^* und die Geraden DQ_1 und PP'_1 schneiden sich in einem Punkt P_1^* . Die Verbindungslinie $P^*P_1^*$ ist die Polare von M in Bezug auf den Kreis, welcher durch $P^*P_1^*$ und D geht, d. h. die Linien MP^* und MP_1^* sind die Tangenten aus M an diesen Kreis. Daraus folgt aber, dass P^* und P_1^* ebenfalls auf der Strophoide liegen, denn sind C^* und C_1^* die Schnittpunkte von MP^* und MP_1^* mit d , so sind die Längen C^*D und C^*P^* , sowie C_1^*D und $C_1^*P_1^*$ einander gleich. Nach einem früheren Satz ist damit bewiesen, dass P^* und P_1^* der Strophoide angehören.

Die Construction von P^* und P_1^* führt zu den Sätzen:

Die Berührungspunkte der Tangenten aus M an die Kreise, welche durch D gehen und die Mittelpunkte auf MD haben, liegen auf einer Strophoide.

Der Ort der Höhenfußpunkte der gleichschenkligen Dreiecke QDQ_1 , welche ihre Spitze in D und ihre Basis auf der Geraden m haben, ist eine Strophoide.

Die Strophoide ist die Fußpunktcurve der Parabel vom Brennpunkt F und vom Scheitel M für den Punkt D , wobei D der Schnittpunkt der Axe mit der Directrix der Parabel ist.

Die Cissoide.¹⁾

11. Der gegebene Kegelschnitt sei ein Kreis vom Mittelpunkt M und dem Radius r ; D sei ein beliebiger Punkt des Kreises, F

¹⁾ Man vergl. Klügel: Math. Wörterbuch, I. Theil, Seite 434.

der diametral gegenüberliegende und O der symmetrische zu F in Bezug auf D , also $DO = 2r$, endlich a die Senkrechte in O zu OM . Construirt man nun zu jedem Punkt K des Kreises einen Punkt P , so dass $DK = AP$, so ist der Ort von P eine Cissoide. D ist ein Rückkehrpunkt der Curve, DM die zugehörige Rückkehrtangente, a eine Asymptote und zwar speciell eine Wendearsymptote; die beiden andern Asymptoten sind die imaginären Asymptoten des Kreises. Ist K' der diametral gegenüber liegende Punkt zu K im gegebenen Kreis, so ist $\triangle AOD \cong \triangle PK'K$, weil $AD = PK$, $OD = KK' = 2r$ und $\sphericalangle ADO = \sphericalangle MDK = \sphericalangle PKK'$. Aus der Congruenz folgt: $\sphericalangle PK'K = 90^\circ$, d. h. PK' ist die Tangente in K' an den gegebenen Kreis. Aus der Congruenz folgt also der Satz:

Projiciert man aus irgend einem Punkte D eines Kreises jeden Peripheriepunkt K auf die Tangente des diametral gegenüberliegenden Punktes K' , so ist der Ort dieser Projectionen eine Cissoide.

Diese Construction kann auch so ausgedrückt werden:

Bewegt sich ein veränderliches rechtwinkliges Dreieck $PK'K$ so, dass die eine Kathete KK' von constanter Länge sich um ihren Mittelpunkt M dreht, während die Hypotenuse KP sich um einen festen Punkt D dreht, dessen Entfernung von $M = \frac{1}{2} KK'$, so ist der Ort der Ecke P eine Cissoide.

Diese Bewegung kann durch einen einfachen Mechanismus veranschaulicht werden. Die obige Construction kann man auch so auffassen:

Der Scheitel des rechten Winkels eines veränderlichen rechtwinkligen Dreiecks PDK drehe sich um einen festen Punkt D , der Endpunkt K der einen Kathete bewege sich auf irgend einem durch D gehenden Kreis und die Hypotenuse sei die Tangente in K an diesen Kreis, dann beschreibt die letzte Ecke P eine Cissoide.

Man erkennt in den letzten Constructionen die Darstellung der Cissoide als Erzeugniss der projectivischen Zuordnung der Tangenten des festen Kreises zu den Strahlen des Büschels vom Scheitel D .

Ist T der Schnittpunkt der Tangente t' in K' mit der Tangente d in D an den gegebenen Kreis, so ist das Dreieck DTK' gleichschenkelig, also auch das Dreieck DTP . Es sind demnach die Strecken TD , TK' und TP einander gleich. Man bekommt damit den Satz:

Sind d eine feste und t' eine variable Tangente eines Kreises und nimmt man immer zum Berührungspunkt K' von t' mit dem Kreis den symmetrischen Punkt P in Bezug auf den Schnittpunkt von t' und d , so beschreibt P eine Cissoide.

Der Punkt T ist das Centrum eines Kreises, welcher durch P , D und K' geht und man bekommt den Satz:

D sei ein Punkt eines festen Kreises, d seine Tangente und T ein variabler Punkt derselben; construirt man auf dem Kreis, welcher T zum Centrum hat und durch D geht den diametral gegenüberliegenden Punkt P zum Schnittpunkt K' mit dem festen Kreis, so ist der Ort von P eine Cissoide.

Man erkennt in dieser Construction die Entstehung der Cissoide aus der projectivischen Zuordnung der Elemente eines Kreisbüschels zu den Elementen eines Strahlenbüschels.

Der obige Kreis durch D vom Centrum T trifft die Linie d in einem zweiten Punkt E . Die vier Punkte $DK'EP$ bilden die Ecken eines Rechtecks; es geht also die Seite $K'E$ durch den Punkt F , den zweiten Endpunkt des Durchmessers DM im festen Kreis. Verändert man T , so bewegt sich E auf d , K' auf dem festen Kreis und die Seite $K'E$ dreht sich um den festen Punkt F . Es folgt daraus:

Bewegt sich ein veränderliches Rechteck so, dass die Ecke D und die Diagonale $DE = d$ fest bleiben, während die Seite EK' sich um den festen Punkt F dreht, so beschreibt die letzte Ecke P dieses Rechtecks eine Cissoide.

Die letzte Construction kann noch einfacher ausgedrückt werden. Die Linie EP umhüllt bei der Bewegung des Rechtecks eine Parabel, für welche F der Brennpunkt und D der Scheitel ist. Die Cissoide erscheint demnach als Fußpunktscurve einer Parabel für den Scheitel derselben als Pol. Die Wendeadymptote der Cissoide ist dabei identisch mit der Directrix der Parabel.

m sei die Parallele durch M zu a , M' ihr Schnittpunkt mit der Tangente t' in K' ; n sei die Parallele zu a durch den Mittelpunkt der Strecke OD , N' ihr Schnittpunkt mit t' und endlich N der Schnittpunkt von n mit der Normale in P zu t' . Dann ist $\triangle NPN' \cong \triangle MK'M'$, denn die Strecken PN' und $K'M'$ haben dieselbe Länge, die Winkel bei P und K' sind rechte und die Winkel bei N und M sind einander gleich, weil ihre Schenkel resp. parallel laufen. Aus der Congruenz folgt: $NP = K'M = r$, also constant für alle Punkte der Curve.

Hat also bei einem rechten Winkel NP der eine Schenkel NP die constante Länge r und bewegt sich dieser rechte Winkel so, dass der Punkt N die Gerade n durchläuft, während der andere Schenkel $PK' = t'$ den festen Kreis berührt, jedoch immer so, dass N und der Mittelpunkt M des Kreises auf verschiedenen Seiten von t' liegen, so beschreibt der Scheitel des rechten Winkels eine Cissoide.

Zieht man noch durch M die Parallele zu t' und t , welche PN in dem Punkte S begegnet, so ist $NS = 2r$ und man hat den Satz:

Hat bei einem rechten Winkel NSM der eine Schenkel NS die constante Länge $2r$ und bewegt sich der Punkt N auf der Linie n , während der andere Schenkel SM durch den festen Punkt M geht, so beschreibt der Mittelpunkt der Strecke NS eine Cissoide.¹⁾

Es kann hier noch eine einfache Construction der Cissoide mit Hilfe einer constanten Zirkelöffnung erwähnt werden. Nach dem Vorigen ist $NP = r = MK$, ferner ist $DK = AP$ und $\sphericalangle DKM = \sphericalangle APN$. Somit ist $\triangle DKM \cong \triangle APN$, also $\sphericalangle KDM = \sphericalangle PAN$, d. h. AN steht rechtwinklig auf a und seine Länge ist gleich r .

Verschiebt man also ein veränderliches gleichschenkliges Dreieck ANP , dessen Schenkel AN und NP die constante Länge r haben, so, dass A und N sich auf a und n bewegen, während die Basis AP durch D geht, so beschreibt P eine Cissoide.

Eine ähnliche Construction besteht mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Verlängerung von AN geht nämlich durch den früher benutzten Punkt E . Man hat also ein rechtwinkliges Dreieck APE , bei welchem die Hypotenuse die constante Länge $2r$ hat, während die eine Kathete AP durch den festen Punkt D geht. Es folgt der Satz:

Verschiebt man ein veränderliches rechtwinkliges Dreieck APE , dessen Hypotenuse AE die constante Länge $2r$ hat, so, dass A und E sich auf a und d bewegen, während die Kathete AP durch den festen Punkt D geht, so beschreibt der Scheitel des rechten Winkels eine Cissoide.

Analoge Constructionen existieren für alle circularen C_3 mit einem Doppelpunkt.

Zum Schluss sei dem Verfasser noch die Bemerkung erlaubt, dass die vorliegende Arbeit über die C_3 als ein Beitrag zur Theorie einer durch einen Punkt D und eine Gerade a vermittelten Transformation zu betrachten ist. Diese Transformation wird auch für gewisse Curven höherer Ordnung ein nicht unwesentliches Untersuchungsmittel liefern.²⁾

¹⁾ Es ist die Newton'sche Construction der Cissoide.

²⁾ Man vergl. auch Ch. Beyel: „Über Curven IV. Ordnung mit einem doppelten Berührungsknoten und einem Doppelpunkt“, Art. 7, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Band XXXI.