

**8. Über die nach Fresnelscher Art
beobachteten Beugungserscheinungen der Gitter;
von Heinrich Weisel.**

(Auszug aus der Gießener Dissertation.)

Im Bd. 27, Heft 15 der Annalen der Physik findet sich eine Arbeit von Hrn. Prof. Winkelmann mit dem Titel: „Über einige Erscheinungen, die bei der Beugung des Lichtes durch Gitter auftreten.“ Zur Zeit der Veröffentlichung dieser Arbeit war ich mit einer Untersuchung im wesentlichen bereits zum Abschluß gelangt, welche inzwischen als Dissertation erschienen ist und das Problem von einem anderen Ausgangspunkt aus und in etwas anderer Form behandelt. Dieser letztere Umstand veranlaßt mich, auch meine Arbeit, wenigstens im Auszuge, an dieser Stelle mitzuteilen.

Meine Untersuchung erstreckt sich auf die Erscheinungen, welche man mit Hilfe eines Mikroskopes hinter einem Beugungsgitter in den verschiedenen zu ihm parallelen Ebenen beobachten kann, wenn das Gitter von kohärenten Strahlen monochromatischen Lichtes getroffen wird. Dabei ist ein Unterschied gemacht worden zwischen einem Strichgitter und einem Streifengitter. Unter ersterem ist ein solches Gitter verstanden, dessen Spalten wesentlich enger als die trennenden Stege sind, so daß man sie als Lichtlinien ansehen und ihre Breite bei der Berechnung praktisch vernachlässigen kann. Dagegen ist ein Streifengitter definiert als ein solches, dessen Spaltbreite gegenüber der Stegbreite berücksichtigt und in Rechnung gesetzt werden muß. Für die erstere Art von Gittern kann man die Intensitätsverteilung in elementarer Form mit Hilfe des Superpositionsprinzipes vollständig entwickeln; es lassen sich einfache Gesetzmäßigkeiten aufstellen, die das Experiment bestätigt. Für die Streifengitter dagegen verlangt die Feststellung der Lichtverteilung Integrationen, die nicht allgemein ausführbar sind, und die Erscheinungen sind sehr verwickelt.

Hierauf soll jedoch in diesem Auszuge nicht näher eingegangen werden.

Die eigentümlichen Interferenzbilder, die eine größere Anzahl äquidistanter und gleichbreiter Spaltöffnungen bei der Fresnelschen Beobachtungsweise ergeben, sind zuerst von Fox Talbot¹⁾ bemerkt worden. Er benutzte bei seinen Untersuchungen, welche übrigens nur von qualitativer Art sind, weißes Licht und beschrieb die Erscheinung, welche er beobachtete als eine regelmäßige Folge zahlreicher farbiger, den Gitterspalten paralleler Linien oder Streifen, die in verschiedenen Abständen hinter der Gitterebene ein ganz gleiches Aussehen haben. Lord Rayleigh kam später auf diese seltsamen Beobachtungen zurück und entwickelte eine kurze rechnerische Begründung²⁾, ohne aber näher auf die Erscheinungen einzugehen.

Die von mir benutzte Versuchsanordnung war in der Hauptsache die folgende: Das Licht einer Bogen- oder Quecksilberlampe passierte zuerst einen Spalt, dessen Breite nach Belieben verändert werden konnte, und dann eine Sammellinse. Hinter dieser befand sich ein geradsichtiges Prisma, welches das von der Sammellinse entworfene objektive Bild des Spaltes in ein Spektrum verwandelte, aus dem man Licht von jeder gewünschten Wellenlänge mittels einer spaltförmigen Blende ausschneiden konnte. In den Strahlengang dieses monochromatischen Lichtes wurde das Gitter gebracht und zwar derart, daß seine Ebene die Achse des Lichtbündels orthogonal schnitt und seine Spalte dem Spalt der Blende parallel waren. Da in den meisten Fällen mit Parallelstrahlen gearbeitet wurde, so benutzte man an Stelle der Blende einen auf unendlich eingestellten Kollimator mit Spalt. Beobachtet wurde jenseits des Gitters mit einem Mikroskop, dessen Achse nach Möglichkeit mit derjenigen des benutzten Lichtbündels zusammenfiel und dessen Verschiebungen in dieser Achse mit einer Genauigkeit bis zu $\frac{1}{10}$ mm an einem Komparator abgelesen wurden. Ein im Okular des Mikroskopes angebrachtes Mikrometer gestattete die Messung des Streifenabstandes im

1) F. Talbot, Phil. Mag. Dez. 1836 (nach Lord Rayleigh).

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 11. p. 196—205. 1881.

Beugungsbild. Die benutzten Strichgitter wurden mit Hilfe einer Teilmaschine in die berußte oder versilberte Seite einer Spiegelglasplatte geritzt und die Gitterkonstante mittels eines Mikroskopes alsdann nachgeprüft; die Streifengitter waren auf photographischem Wege hergestellt.¹⁾

Während ich mit der Untersuchung beschäftigt war, wurde ich mit einem kleinen Aufsätze von Porter²⁾ bekannt, in welchem für die Untersuchung der hier in Frage kommenden Beugungserscheinungen eine der meinigen sehr ähnliche Untersuchungsmethode vorgeschlagen wird, ohne daß die Erscheinungen quantitativ genauer verfolgt werden.

**Ableitung der Formel für die Intensitätsverteilung
im Beugungsbild eines Strichgitters, das von homogenen
Parallelstrahlen getroffen wird.**

Da das Gitter stets so orientiert war, daß seine Ebene die Achse des benutzten Lichtbündels senkrecht schnitt, so folgt für den vorliegenden Fall, in welchem es sich um ein Bündel paralleler Lichtstrahlen handelt, daß alle diese Strahlen auf der Gitterebene senkrecht stehen. Daher bildet die Ebene des Gitters eine Wellenebene, d. h. alle Punkte derselben haben den gleichen Schwingungszustand oder dieselbe Phase. Von diesen sekundären Erschütterungszentren sind aber nur diejenigen für das Zustandekommen des Beugungsbildes verantwortlich, welche sich innerhalb der lichtdurchlässigen Teile des Gitters befinden. Macht man nun diese durchsichtigen Stellen der Gitterebene, die Spalten, unendlich schmal, so sind die sekundären Erregungszentren in feinen Lichtlinien angeordnet, die einander parallel verlaufen, und deren Abstand gleich der Gitterkonstante ist. Um die Lichtverteilung im Beugungsbild zu berechnen, muß man zweckmäßig von diesen sekundären Lichtlinien ausgehen und deren Wirkung auf einen Punkt *P* hinter dem Gitter untersuchen. Handelt es sich jedoch nur um eine relative Intensitätsvergleichung — und das soll in vorliegender Arbeit Prinzip sein —, so genügt es³⁾,

1) Präparate von Zeiss. Vgl. C. Zeiss, Opt. Meßinstrumente 1893.

2) T. C. Porter, Phil. Mag. 24. p. 303 ff. 1907.

3) Nach Analogie bekannter Überlegungen aus der Interferenz- und Beugungstheorie.

senkrecht zu den Lichtlinien, also senkrecht zu den Spalten des Gitters einen Schnitt zu legen, welcher den Punkt P enthält und die resultierende Lichterregung für diesen Punkt P zu berechnen unter der alleinigen Berücksichtigung derjenigen Wellenzentren, die im Schnitte liegen. Dabei ist es bequem, immer nur solche Punkte ins Auge zu fassen, welche auf einer zur Gitterebene parallelen Geraden liegen, und diese Gerade

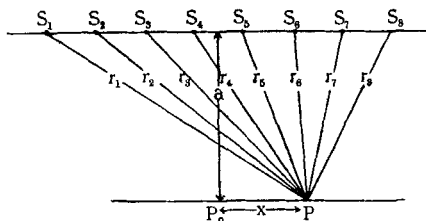


Fig. 1.

in der Beobachtungsebene parallel zu sich selbst zu verschieben. Diese Beobachtungsebene sei nun zur Ebene der Fig. 1¹⁾ genommen. $S_1 S_2 S_3 \dots S_{n+1}$ sind alsdann die Schnittpunkte derselben mit den Gitterstrichen. Die gegenseitige Entfernung zweier

benachbarter Schnittpunkte ist gleich der Gitterkonstante d . Die Gerade $P_0 P$ ist eine im Abstände a zur Gitterebene gezogene Parallele. Dabei ist zu beachten, daß der Punkt P_0 genau der Mitte des Gitterdurchschnittes gegenüber liegt und infolgedessen den Mittelpunkt der Beugungserscheinung auf der Geraden $P_0 P$ bildet.

Der Punkt P , für den die Intensität berechnet werden soll, ist auf der Geraden $P_0 P$ beweglich; sein Abstand von P_0 sei mit x und seine Entfernung von den sekundären Lichtzentren $S_1 S_2 \dots S_{n+1}$ mit $r_1 r_2 \dots r_{n+1}$ bezeichnet. Drückt man die Lichtbewegung in diesen Wellenzentren durch die Zustandsgröße $s = \sin 2\pi(t/T)$ aus, so erfährt der Punkt P von ihnen die Einzelerregungen:

$$s_1 = \frac{1}{r_1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right),$$

$$s_2 = \frac{1}{r_2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right),$$

1) Die Fig. 1 und alle folgenden sind insofern mangelhaft, als die im Punkt P zum Schnitt kommenden Strahlen sich nicht unter kleinen Winkeln schneiden, wie es für die Anwendung des Interferenzprinzips gefordert wird.

$$s_3 = \frac{1}{r_3} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_3}{\lambda} \right) = A_3 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_3}{\lambda} \right) \\ \dots \dots \dots \\ s_{n+1} = \frac{1}{r_{n+1}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_{n+1}}{\lambda} \right) = A_{n+1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_{n+1}}{\lambda} \right),$$

wobei in bekannter Weise t die Zeit, $A_1, A_2, A_3 \dots A_{n+1}$ die Amplituden und T die Periode des Lichtzustandes bedeuten.

Nach dem Prinzip der Superposition, das anwendbar ist, falls die von den verschiedenen Punkten S ausgehenden Strahlen nur eine geringe Neigung gegeneinander besitzen, ist die aus diesen Einzelerregungen resultierende Gesamterregung S gegeben durch die Gleichung:

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{n+1} = A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \delta \right),$$

wenn man zur Abkürzung

$$A_1 \cos 2\pi \frac{r_1}{\lambda} + A_2 \cos 2\pi \frac{r_2}{\lambda} + A_3 \cos 2\pi \frac{r_3}{\lambda} \dots \\ + A_{n+1} \cos 2\pi \frac{r_{n+1}}{\lambda} = A \cos \delta, \\ A_1 \sin 2\pi \frac{r_1}{\lambda} + A_2 \sin 2\pi \frac{r_2}{\lambda} + A_3 \sin 2\pi \frac{r_3}{\lambda} \dots \\ + A_{n+1} \sin 2\pi \frac{r_{n+1}}{\lambda} = A \sin \delta$$

setzt. Daraus folgt für die Intensität der resultierenden Lichterregung in P :

$$J_{n+1} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots + A_{n+1}^2 \\ + 2 \left\{ A_1 A_2 \cos 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} + A_1 A_3 \cos 2\pi \frac{r_1 - r_3}{\lambda} \dots \right. \\ \left. + A_1 A_{n+1} \cos 2\pi \frac{r_1 - r_{n+1}}{\lambda} \right. \\ + A_2 A_3 \cos 2\pi \frac{r_2 - r_3}{\lambda} + A_2 A_4 \cos 2\pi \frac{r_2 - r_4}{\lambda} \dots \\ \left. + A_2 A_{n+1} \cos 2\pi \frac{r_2 - r_{n+1}}{\lambda} \right. \\ + \dots \dots \dots \\ \left. + A_n A_{n+1} \cos 2\pi \frac{r_n - r_{n+1}}{\lambda} \right\}.$$

Setzt man voraus, daß die äußerst geringen Verschiedenheiten in den Amplituden der Einzelerregungen, hervorgerufen durch die ungleichen Entfernungen der einzelnen Spalten von

was stets zulässig ist, wenn der Bruch klein gegen 1. Entsprechende Ausdrücke erhält man für die übrigen Größen $r_2, r_3 \dots r_{n+1}$. Ist $(n+1)$ eine ungerade Zahl, so liegt der Punkt P_0 , d. h. der Nullpunkt der Variablen x einem Spalt senkrecht gegenüber. Die Ausdrücke für die Größen $r_1, r_2 \dots r_{n+1}$ werden bei ungerader Spaltzahl denen bei gerader Spaltzahl ganz analog gebildet.

Substituiert man nun in Gleichung (1) für die Größen $r_1, r_2 \dots r_{n+1}$ ihre entsprechenden nach Art des Ausdruckes (2b) gefundenen Werte, setzt alsdann zur Abkürzung

$$(3) \quad \frac{\pi d^2}{a \lambda} = \alpha, \quad \frac{2 \pi d x}{a \lambda} = \beta,$$

so kann man durch eine Reihe trigonometrischer Umformungen die Intensitätsgleichung (1) schließlich auf folgende einfache Form bringen¹⁾

$$(4) \quad J_{n+1} = (n+1) + 2 \sum_{K=0}^{K=n-1} \frac{\sin [(K+1)(n-K)\alpha]}{\sin [(n-K)\alpha]} \cos [(n-K)\beta].$$

Gleichung (4) gilt in gleicher Weise für ein Gitter mit gerader wie für ein solches mit ungerader Spaltzahl, nur darf man nicht vergessen zu beachten, daß der Punkt P_0 , der Mittelpunkt der Beugungserscheinungen auf der in der Beobachtungsebene im Abstände a gezogenen Parallelen zum Gitter, bei ungerader Spaltzahl einem Spalt, bei gerader Spaltzahl dagegen der Mitte eines Steges gegenüber liegt.

Diskussion der erhaltenen Formel.

Eine besonders einfache Gestalt nimmt die Formel (4) an, wenn man α gleich einem ganzzahligen Vielfachen von π setzt. Dabei muß der wahre Wert der einzelnen Glieder unter dem Summationszeichen, deren Koeffizienten zunächst alle die unbestimmte Form 0/0 annehmen, nach dem gewöhnlichen Verfahren durch Differentiation des Zählers und Nenners ermittelt werden.

1) Das Nähere vgl. in der Dissertation.

Die Berechnung zeigt alsdann, daß die Intensitätsverteilung im Beugungsbild eines Strichgitters auf allen Geraden bzw. Ebenen, deren Abstand von der Gitterebene die Gleichung

$$h \pi = \frac{\pi d^2}{a \lambda} \text{ [unter } h \text{ eine beliebige ganze Zahl verstanden]}$$

erfüllt, durch dieselbe Formel

$$J_{n+1} = (n+1) + 2 \sum_{K=0}^{K=n-1} (K+1) \cos(n-K)\beta$$

dargestellt werden kann.

Wo liegen diese Ebenen?

Aus $h \pi = \pi d^2 / a \lambda$ folgt:

$$\text{Ist } \alpha = \frac{\pi d^2}{a \lambda} = 0 \pi, \text{ so ist } a = \infty^1),$$

$$,, \alpha = \frac{\pi d^2}{a \lambda} = 1 \pi, \quad ,, \quad ,, \quad a = \frac{d^2}{\lambda},$$

$$,, \alpha = \frac{\pi d^2}{a \lambda} = 2 \pi, \quad ,, \quad ,, \quad a = \frac{d^2}{2 \lambda},$$

$$,, \alpha = \frac{\pi d^2}{a \lambda} = 3 \pi, \quad ,, \quad ,, \quad a = \frac{d^2}{3 \lambda} \text{ usw.}$$

Sieht man von der ersten Möglichkeit, welche das Beugungsbild im Unendlichen erscheinen läßt, ab, so befindet sich im Abstand $a = d^2/\lambda$ die am weitesten vom Beugungsbild entfernte Ebene, in welcher die durch die Gleichung

$$J_{n+1} = (n+1) + 2 \sum_{K=0}^{K=n-1} (K+1) \cos[(n-K)\beta]$$

charakterisierte Lichtverteilung vorhanden ist. Diese Ebene sei im folgenden als F_1 -Ebene und ihr Abstand vom Gitter

1) $\alpha = 0$ hat zunächst keinen Sinn, da dann auch $\beta = 2 \pi d \cdot x / a \lambda$, infolge des unendlich großen Wertes für den Abstand a , gleich 0 wird. Man kann dieser Verlegenheit aber leicht aus dem Wege gehen durch Einführung einer Winkelgröße ε ; setzt man nämlich

$$\beta = \frac{2 \pi d x}{a \lambda} = \frac{2 \pi d}{\lambda} \cdot \frac{x}{a} = \frac{2 \pi d}{\lambda} \sin \varepsilon,$$

so wird β nur 0, wenn $\sin \varepsilon$ gleich 0 wird. Weiter unten wird gezeigt werden, daß J_{n+1} ein Maximum ist, wenn $\beta/2 = m \pi$, $m = 0, 1, 2, 3 \dots$, d. h. in bezug auf den vorliegenden Fall, wenn $\sin \varepsilon = m(\lambda/d)$ ist. (Fraunhofersche Beugungserscheinung.)

mit f_1 bezeichnet. Analog soll unter der F_2 -Ebene eine im Abstande $f_2 = d^2/2\lambda$ vom beugenden Schirm befindliche Ebene verstanden sein. Die weiteren Bezeichnungen: $f_3, f_4 \dots F_3$ -Ebene, F_4 -Ebene \dots wird man im Zusammenhang mit dem Vorherigen verstehen können.

Welches Aussehen hat die Beugungserscheinung in diesen Ebenen?

Die Intensitätsgleichung

$$J_{n+1} = (n+1) + 2 \sum_{K=0}^{K=n-1} (K+1) \cos [(n-K)\beta]$$

läßt sich leicht auf die Form bringen:

$$(5) \quad J_{n+1} = \frac{\sin^2(n+1) \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Das ist derselbe Ausdruck, der auch bei der Intensitätsberechnung der Gitterspektren auftritt. Er zeigt bekanntlich:

1. äquidistante Minima gleich Null,
2. äquidistante Hauptmaxima gleich $(n+1)^2$,
3. sekundäre Maxima, $(n-1)$ zwischen zwei Hauptmaxima, weder gleich groß noch äquidistant und an Größe verschwindend gegen die Hauptmaxima, wenn n groß ist.¹⁾

Wie bei den Gitterspektren bei genügend großer Strichzahl die sekundären Maxima verschwinden und nur die Hauptmaxima übrig bleiben, so werden auch in unserem Fall die sekundären Maxima sich der Beobachtung im Mikroskop entziehen; an ihrer Stelle wird gleichmäßige Dunkelheit in Gestalt eines Streifens wahrzunehmen sein. Die Breite dieses Dunkelstreifens läßt sich durch eine einfache Überlegung finden. Es ist bereits angeführt, daß die Minima äquidistant sind. Da nun zwischen zwei Hauptmaxima $(n-1)$ sekundäre Maxima vorhanden sind, so folgt, daß sich zwischen zwei Hauptmaxima n Minima befinden müssen, die den Abstand derselben in $(n+1)$ gleiche Teile teilen. Von diesen $(n+1)$ Teilen nehmen die sekundären Maxima bzw. der statt ihrer wahrnehmbare

1) Vgl. T. C. Porter, Phil. Mag. 8 p. 174. 1904.

Dunkelstreifen $(n - 1)$ Teile für sich in Anspruch. Mithin wird bei großem n das durch den Ausdruck

$$\frac{\sin^2(n+1) \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

dargestellte Beugungsbild eine abwechselnde Folge dunkler und heller Streifen sein, die sich in ihrer Breite verhalten wie $(n - 1)$ zu 2. Dieses Verhältnis ist, wie man sieht, nur abhängig von der Zahl der Gitterstriche; es muß daher in jedem Abstand vom Beugungsschirm, in welchem der erwähnte Ausdruck gültig ist, konstant sein.

Welches ist die letzte, d. h. dem beugenden Schirm am nächsten gelegene F-Ebene mit gleichmäßigen Streifen?

Man könnte meinen, daß es unzählig viele solcher Ebenen gäbe, daß also diese Frage überflüssig sei. Das ist aber nicht der Fall.

Es ist bekannt, daß das Beugungsbild eines einzelnen, von homogenen Parallelstrahlen senkrecht getroffenen Spaltes, dessen Breite 2γ sein möge, unter der Bedingung

$$\sqrt{a^2 + \gamma^2} - a = \frac{\gamma^2}{2a} < \frac{\lambda}{2} \text{ oder } a > \frac{\gamma^2}{\lambda}$$

Beugungsfranzen nur im geometrischen Schatten aufweist, während in seiner Mitte ein helles, breites Maximum zu beobachten ist, das alle anderen an Intensität weit überragt. Handelt es sich nun um eine ganze Reihe solcher Spalten, die einen konstanten Abstand voneinander besitzen (also um ein Gitter), so wird ein jeder dieser Spalten für sich allein ein derartiges Streifensystem hervorrufen, und das resultierende Franzensystem kann nur so lange regelmäßig sein, als die hellen zentralen Maxima der Einzelsysteme genügend weit übereinander greifen. Es läßt sich sogar vermuten, daß dann, wenn jedes zentrale Maximum zu beiden Seiten gerade bis zur Mitte des nächstfolgenden Maximums reicht, keine gleichmäßigen Streifen mehr zu erwarten sein werden, da in diesem Falle alle Mitten der zentralen Maxima nur von je einem Spalte abhängig sind.

Nun erfüllen die Minima im Beugungsbild eines einzelnen Spaltes die Gleichung

$$\frac{2 \pi x \gamma}{a \lambda} = m \pi; \quad m = 1, 2, 3.$$

Die beiden, das zentrale Maximum begrenzenden Minima liefern also die Gleichung

$$\frac{2 \pi x \gamma}{a \lambda} = \pm \pi.$$

Für diese Gleichung kann man auch schreiben

$$\frac{\pi d^2}{a \lambda} \frac{2 x \gamma}{d^2} = \pm \pi \quad \text{oder} \quad \alpha \cdot \frac{2 \pi \gamma}{d^2} = \pm \pi.$$

Setzt man

$$\alpha = \rho \pi,$$

wobei ρ jede beliebige reelle Zahl bedeuten kann, so geht die letzte Gleichung über in

$$\rho \frac{2 x \gamma}{d^2} = \pm 1.$$

Daraus folgt

$$x = \pm \frac{d^2}{2 \rho \gamma}$$

Soll nun ein jedes der zentralen Maxima gerade bis zur Mitte der beiden ihm benachbarten Maxima reichen, so muß

$$x = \pm d$$

sein. So ergibt sich die Beziehung

$$\rho = \frac{d}{2 \gamma}.$$

Nun wird ρ in den seltensten Fällen eine ganze Zahl sein; ist es zufällig eine solche, so ist die durch $a = d^2 / \rho \lambda$ bestimmte Parallelebene zum Gitter eine F -Ebene und zwar die F_ρ -Ebene. Diese F_ρ -Ebene ist ferner die erste der F -Ebenen, in welcher keine regelmäßigen Streifen zu erwarten sind. Demnach muß die letzte F -Ebene mit gleichmäßigen Streifen die Signatur $F_{\rho-1}$ -Ebene haben. Ist ρ keine ganze Zahl, so nimmt man die größte in ρ enthaltene ganze Zahl und deutet dies an durch Einschließen in eine eckige Klammer:

$$[\rho] \quad \text{und} \quad \left[\frac{d}{2 \gamma} - 1 \right].$$

Das Ergebnis lautet also: Die letzte F -Ebene mit gleichmäßigen Streifen ist vermutlich die $F_{[\varrho-1]}$ -Ebene.

Die nach dieser Richtung angestellten Versuche haben dieses Ergebnis bestätigt, wie folgende Versuchsbeispiele zeigen:

1. Gitter: $2\gamma = \frac{1}{3}d$; es war $\varrho = 3$ (theoretisch und experimentell),
2. Gitter: $2\gamma = \frac{1}{5}d$; es war $\varrho = 5$ (theoretisch und experimentell),
3. Gitter: $2\gamma = \frac{1}{8}d$; es war $\varrho = 8$ (theoretisch und experimentell).

Wie groß ist die Entfernung zweier Hauptmaxima in den verschiedenen F -Ebenen?

Der Ort der Hauptmaxima ist gegeben durch die Gleichung

$$m\pi = \frac{\beta}{2}; \quad m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Es ist aber stets

$$\beta = \frac{2\alpha x}{d}.$$

Daher muß

$$m\pi = \frac{\alpha x}{d}$$

sein. In der F_1 -Ebene ist $\alpha = \pi$. Daraus folgt

$$m\pi = \pi \frac{x}{d} \text{ oder } x_{\max.} = m d.$$

Analog findet man für die F_2 -Ebene:

$$x_{\max.} = m \frac{d}{2},$$

für die F_3 -Ebene:

$$x_{\max.} = m \frac{d}{3} \text{ usw.}$$

Demnach ist die Entfernung zweier Hauptmaxima in der F_k -Ebene gleich d/k ; $k = 1, 2, 3 \dots$

Bemerkenswert ist, daß in allen diesen Ebenen der Abstand zweier benachbarter Hauptmaxima vollkommen unabhängig, dagegen die Lage der Ebenen abhängig von der Wellenlänge ist. Seinen größten Wert erreicht dieser Abstand in der F_1 -Ebene; hier wird er gleich der Gitterkonstante. Berücksichtigt man nun, daß die Breite eines Streifens maximaler Helligkeit sich zu der des auf ihn folgenden Dunkel-

streifens verhält wie $2:(n-1)$ und daß dieses Verhältnis mit wachsender Spaltzahl immer kleiner wird, so darf man mit Sicherheit behaupten, daß sein Wert schließlich dem Verhältnis Spaltbreite zu Stegbreite im Gitter gleichkommen muß (daß er nicht kleiner werden kann, soll noch erörtert werden); denn die Gitterstriche können niemals so ideal fein gezogen werden, daß ihre Breite vollständig 0 wird. Aus diesen Betrachtungen folgt:

In der F_1 -Ebene wird bei hinreichend großer Spaltzahl ein Interferenzbild erzeugt werden, das in seinem Aussehen die größte Ähnlichkeit mit dem Gitterbild selbst besitzt.

Was läßt sich über die Phase der Lichterregung in den Hauptmaxima der F_1 -Ebene aussagen?

Der Schwingungszustand der resultierenden Lichterregung in einem beliebigen Punkt P bestimmt sich durch Division der beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{a} \cos 2\pi \frac{r_1}{\lambda} + \frac{1}{a} \cos 2\pi \frac{r_2}{\lambda} + \dots + \frac{1}{a} \cos 2\pi \frac{r_{n+1}}{\lambda} = A \cos \delta,$$

$$\frac{1}{a} \sin 2\pi \frac{r_1}{\lambda} + \frac{1}{a} \sin 2\pi \frac{r_2}{\lambda} + \dots + \frac{1}{a} \sin 2\pi \frac{r_{n+1}}{\lambda} = A \sin \delta.$$

Substituiert man für die Größen $r_1, r_2 \dots r_{n+1}$ ihre entsprechenden Werte, so findet man unter gleichzeitiger Berücksichtigung der für die Hauptmaxima gefundenen Abszissenwerte, daß die sekundären Lichtzentren an den Orten maximaler Helligkeit in gleicher Phase schwingen. Mithin bildet die F_1 -Ebene wieder eine ebene Wellenfront, ebenso wie die Gitterebene.

Wie liegen die Hauptmaxima der F_1 -Ebene zu den Spalten des Gitters?

Aus $x_{\max.} = m \cdot d$ folgt, daß im Nullpunkt des Abszissensystems, welches der Gleichung

$$J_{n+1} = (n+1) + 2 \sum_{K=0}^{K=n-1} (K+1) \cos [n-K] \beta]$$

zugrunde liegt, ein Maximum zu beobachten sein wird. Dieser Nullpunkt ist aber für ein Gitter mit gerader Spaltzahl identisch mit dem als Mittelpunkt der Beugungserscheinung be-

zeichneten Punkt P_0 ; für ein Gitter mit ungerader Spaltzahl dagegen ist er von diesem um die Strecke $d/2$ entfernt, da für letzteres die Intensitätsgleichung erst durch die Transformation $x = (x' - d/2)$ in die obige Gestalt gebracht werden konnte. Vergewenwärtigt man sich nun die Lage des Punktes P_0 für jede der beiden genannten Gitterarten, so kommt man zu dem Schluß, daß die Hauptmaxima der F_1 -Ebene stets den Mitten der Gitterstege gegenüber liegen.

Lassen sich auch in den durch $(-\alpha)$ bestimmten Ebenen Beugungserscheinungen beobachten?

Setzt man α gleich einer negativen Größe, so gelangt man zu Ebenen, deren Abstand a vom Beugungsschirm negativ ist, d. h. zu solchen Ebenen, die zwischen Gitter und Lichtquelle liegen. Auch hier werden sich mit Hilfe eines Mikroskopes Beugungserscheinungen nachweisen lassen. Da dieselben aber nur dadurch zustande kommen können, daß Strahlen interferieren, die von den Gitterspalten divergent ausgehen, so kann es sich im Bereiche dieser Ebenen nur um virtuelle¹⁾ Beugungsbilder handeln. Nach Aussehen und Streifenabstand dürfen diese virtuellen Bilder vor dem Gitter sich von den in gleichem Abstände hinter demselben zu beobachtenden reellen Erscheinungsformen in keiner Weise unterscheiden; denn die Intensitätsgleichung nimmt für $\pm a$ die gleichen Werte an. Man kann also sagen: Vor und hinter dem Beugungsschirm müssen in gleichem Abstände von diesem dem Aussehen nach gleiche Bilder zu beobachten sein.

Welches Aussehen werden bei großer Strichzahl die Beugungsbilder in den Abständen $a = 2f_1, 3f_1, 4f_1 \dots$ vom Gitter haben?

Diese Frage läßt sich im Anschluß an die vorstehenden Resultate leicht erledigen. Es ist festgestellt, daß in der Entfernung f_1 ein Beugungsbild erzeugt wird, das dem mikroskopischen Gitterbild bei genügender Feinheit der Spalten und hinreichend großer Spaltzahl bis zum Verwechseln ähnlich sieht, und das wie dieses eine ebene Wellenfläche bildet. Daraus folgt aber, daß man für die F_1 -Ebene genau dieselben

1) Über virtuelle Beugungsbilder vgl. E. Verdet, p. 292.

Betrachtungen wiederholen kann, welche der Gitterebene galten, daß also namentlich in einem Abstand f_1 von ihr (oder $2f_1$ vom Gitter) eine Ebene existieren muß mit derselben Lichtverteilung, die auch sie besitzt, und daß zwischen dieser Ebene und der F_1 -Ebene sich alle Streifensysteme in der gleichen Folge wiederholen werden wie zwischen F_1 -Ebene und Gitter. Bringt man diese Schlußweise beliebig oft in Anwendung, so gelangt man zu dem Ergebnis, daß in allen jenen Parallelebenen zum Gitter, deren Abstände von diesem ein ganzzahliges Vielfaches der Größe d^2/λ sind, Streifensysteme zu beobachten sein müssen mit der Streifenbreite d , wenn die Strichzahl hinreichend groß angenommen wird.

Dieses Resultat muß sich natürlich auch aus der allgemeinen Intensitätsformel (4) gewinnen lassen. Da es für das Aussehen des Beugungsbildes bei sehr großer Strichzahl — und eine solche ist ja vorausgesetzt — durchaus unwesentlich ist, ob sie gerade oder ungerade angenommen wird, so kann man nach Belieben hierüber verfügen.

Es sei nun 1.:

$$a = 2f_1 = 2 \frac{d^2}{\lambda},$$

$[n+1]$ gerade und sehr groß.

Alsdann ist

$$\alpha = \frac{\pi d^2}{a \lambda} = \frac{\pi}{2}.$$

Trägt man $\alpha = \pi/2$ in die Formel (4) ein und berücksichtigt nur diejenigen Glieder unter dem Summationszeichen, deren Koeffizienten größer als 1 sind — für die übrigen Glieder sind die Koeffizienten gleich ± 1 — so erhält man für die Intensität einen angenäherten Wert, welcher J'_{n+1} heißen möge, und welcher lautet

$$J'_{n+1} = (n+1) + 2\{-(n-1)\cos 2\beta + (n-3)\cos 4\beta \\ - (n-5)\cos 6\beta + \dots \pm 2\cos(n-1)\beta\},$$

wobei das letzte Glied in der geschweiften Klammer das obere Vorzeichen erhält, wenn $(n-1)/2$ gerade und das untere, wenn $(n-1)/2$ ungerade ist.

Durch die Transformation

$$x = x' - \frac{d}{2}$$

geht die letzte Gleichung über in

$$J'_{n+1} = (n+1) + 2 \{ (n-1) \cos 2\beta' + (n-3) \cos 4\beta' \\ + (n-5) \cos 6\beta' + \dots + 2 \cos (n-1)\beta' \},$$

wenn man

$$\frac{2\pi d x'}{a\lambda} = \beta',$$

setzt.

Führt man nun noch die Abkürzung $2\beta' = B$ ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$J'_{n+1} = 2 \frac{\sin^2 \left[\frac{n+1}{2} \cdot \frac{B_1}{2} \right]}{\sin^2 \frac{B_1}{2}}.$$

Das ist derselbe Ausdruck, wie er oben bereits diskutiert worden ist. Der Ort seiner Hauptmaxima ist gegeben durch die Gleichung

$$m\pi = \frac{B_1}{2}.$$

Daher ist

$$m\pi = \frac{2\beta'}{2} = \frac{2\alpha x'}{d} = \frac{\pi x'}{d}.$$

Infolgedessen wird

$$x'_{\max.} = m \cdot d,$$

d. h. die Entfernung zweier benachbarter Hauptmaxima ist d , genau wie in der F_1 -Ebene.

Es ist nun noch nachzuweisen, daß der resultierende Beitrag der vernachlässigten Glieder, deren Koeffizienten gleich ± 1 sind, zur Feststellung der Streifenbreite nicht in Betracht gezogen zu werden braucht, da seine Maxima gegenüber den großen Intensitätswerten der Hauptmaxima im Mikroskop nicht erkennbar sein können. Der Gesamtbeitrag dieser vernachlässigten Glieder — er möge mit J''_{n+1} bezeichnet werden — ist $J''_{n+1} = \pm 2 (\cos \beta - \cos 3\beta + \cos 5\beta - \cos 7\beta + \dots + \cos n\beta)$, wobei das Pluszeichen gilt, wenn $(n+1)/2$ ungerade, und das Minuszeichen, wenn $(n+1)/2$ gerade ist. Durch die Transformation

$$x = x' - \frac{d}{2},$$

geht die letzte Gleichung über in

$$J''_{n+1} = \pm 2 (\sin \beta' + \sin 3\beta' + \sin 5\beta' + \sin 7\beta' + \dots + \sin n\beta').$$

Wendet man auf die in der runden Klammer eingeschlossenen Glieder die Summationsformel

$$\sin u + \sin(u + v) + \sin(u + 2v) + \dots \\ + \sin(u + mv) = \frac{\sin(m+1)\frac{1}{2}v}{\sin\frac{1}{2}v} \sin\left(u + \frac{m}{2}v\right)$$

an, so erhält man

$$J''_{n+1} = \pm 2 \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} \beta'}{\sin \beta'} = \sin \beta' \cdot J'_{n+1}.$$

Daraus folgt, daß die Summe der vernachlässigten Glieder da, wo die Hauptmaxima von J'_{n+1} liegen (für $\beta' = m\pi$), den Wert Null hat, an dazwischen liegenden Stellen aber keine Werte erreicht, die größer wären als die hier nur kleinen und zu vernachlässigenden Werte von J'_{n+1} .

Es sei 2.:

$$a = 3f_1 = 3 \frac{d^2}{\lambda},$$

$(n+1)$ gerade, sehr groß und ein Vielfaches der Zahl 3.

Es wird

$$\alpha = \frac{\pi d^2}{a \lambda} = \frac{\pi}{3}.$$

Trägt man $\alpha = \pi/3$ in die Intensitätsformel ein und berücksichtigt wiederum nur die Glieder unter dem Summationszeichen, deren Koeffizienten größer als 1 sind — die dazwischen liegenden Glieder haben die Koeffizienten ± 1 — so erhält man für den Näherungswert J'_{n+1} :

$$J'_{n+1} = (n+1) + 2\{(n-2)\cos 3\beta + (n-5)\cos 6\beta \\ + (n-8)\cos 9\beta + \dots + 3\cos(n-2)\beta\}.$$

Setzt man zur Abkürzung $3\beta = B_2$ und bringt den Faktor 3, welcher in jedem Koeffizienten enthalten ist, vor die geschweifte Klammer, so erhält man

$$J'_{n+1} = 3 \frac{\sin^2 \left[\frac{n+1}{3} \cdot \frac{B_2}{2} \right]}{\sin^2 \frac{B_2}{2}}.$$

Der Ort der Hauptmaxima des letzten Ausdruckes ist gegeben durch die Gleichung

$$m\pi = \frac{B_2}{2}.$$

Folglich ist

$$m\pi = \frac{3\beta}{2} = \frac{3\alpha x}{d} = \frac{\pi x}{d}.$$

Daher wird $x_{\max.} = md$, d. h. die Entfernung zweier benachbarter Hauptmaxima ist d , ebenso wie in der F_1 -Ebene und in der $2F_1$ -Ebene.

Genau dieselben Betrachtungen lassen sich nun für $a = 4f_1$, $5f_1$, $6f_1 \dots$ mit ganz dem gleichen Ergebnis wiederholen. Ein einziger Unterschied wird darin bestehen, daß für $a = 4f_1$, $6f_1$, $8f_1 \dots$ Transformationen von der Form $x = x' - d/2$ nötig sind. Diese Transformationen aber sagen aus, daß von je zwei aufeinander folgenden Ebenen mit maximaler Streifenbreite die hellen Streifen der einen den dunklen Streifen der anderen gegenüber liegen und umgekehrt. Es darf nun nicht übersehen werden, daß die Vernachlässigungen, welche man begehen müßte, um die letzteren Resultate aus der allgemeinen Intensitätsformel folgern zu können, allmählich wachsen müssen, da die Zahl der vernachlässigten Glieder immer größer wird. Die Folge davon wird eine mit dem Abstand vom Beugungsschirm langsam zunehmende Unschärfe der Streifensysteme sein. Das einzige Bild, das an diesem Übelstand nicht leidet, liegt im Abstand $a = f_1$. Hier ist die Stelle schärfster Interferenz.

Wie sehen vermutlich die Streifensysteme in den Entfernungen $a = rf_1/s$ (wobei r, s relative Primzahlen sein sollen) aus?

Aus $a = (r/s)f_1$ folgt $\alpha = s\pi/r$. Trägt man $\alpha = s\pi/r$ in die Intensitätsformel (4) ein, so kommt man unter der Annahme, daß $(n+1)$ ein gerades Vielfaches von r sei, auf die schon erörterte Weise zu einem Näherungswert für die Intensität J'_{n+1} , welcher lautet

$$J'_{n+1} = r \frac{\sin^2 \left[\frac{n+1}{r} \frac{B_{r-1}}{2} \right]}{\sin^2 \left[\frac{B_{r-1}}{2} \right]},$$

wobei B_{r-1} eine Abkürzung für $r\beta$ sein soll.

Den Ort der Hauptmaxima dieses Ausdrucks findet man wieder aus der Beziehung

$$\frac{B_{r-1}}{2} = m\pi.$$

Folglich erhält man

$$\frac{r\beta}{2} = \frac{r \cdot 2\alpha x}{2d} = m\pi.$$

Daraus folgt

$$\frac{sx}{d} = m.$$

Endlich ist

$$x_{\max.} = m \frac{d}{s},$$

d. h. die Streifenbreite in der Entfernung $a = rf_1/s$ ist d/s , also vollkommen unabhängig von der Größe r .

Wie liegen die Maxima des im Abstände $a = rf_1/s$ befindlichen Beugungsbildes zu den Spalten des Gitters?

Verfolgt man die letzten Entwicklungen in allen ihren Einzelheiten, so findet man, daß stets dann und nur dann, wenn r eine gerade Zahl bedeutet, eine Transformation der Art $x = x' - d/2$ nötig ist, um die Intensitätsformel in die charakteristische Form

$$J'_{n+1} = r \frac{\sin^2 \left[\frac{n+1}{r} \frac{B_{r-1}}{2} \right]}{\sin^2 \left[\frac{B_{r-1}}{2} \right]}$$

überführen zu können. Berücksichtigt man ferner, daß der Ausdruck

$$\frac{\sin^2 \left[\frac{n+1}{r} \frac{B_{r-1}}{2} \right]}{\sin^2 \left[\frac{B_{r-1}}{2} \right]}$$

für die Abszissen $0, \pm d, \pm 2d \dots$ stets Maxima liefert, so folgt:

1. Ist r ungerade, so liegt jeder Stegmitte ein Maximum gegenüber und die übrigen Maxima folgen in Abständen gleich d/s .

2. Ist r gerade, so liegt jedem Spalt ein Maximum gegenüber und die übrigen Maxima folgen in Abständen gleich d/s .

Zusammenfassend läßt sich nun sagen:

Wird ein Strichgitter von kohärenten, homogenen Parallelstrahlen senkrecht getroffen, so verlangt die Rechnung bei großer Strichzahl in den Abständen

$$\frac{d^2}{\lambda}, \quad 2 \frac{d^2}{\lambda}, \quad 3 \frac{d^2}{\lambda} \dots$$

vor und hinter dem Beugungsschirm Interferenzbilder mit dem gleichen Streifenabstand d .

Die vorstehende Skizze soll die Aufeinanderfolge dieser einzelnen Streifensysteme schematisch zur Darstellung bringen. Um die Übersichtlichkeit nicht leiden zu lassen, ist nur bis zu einer Streifenbreite gleich $d/4$ gezeichnet worden.

Versuchsergebnisse.

Die Versuche wurden angestellt mit rotem, gelbem, grünem und blauem Licht. Die benutzten beiden Gitter hatten eine Gitterkonstante von $\frac{1}{4}$ mm bzw. $\frac{1}{3}$ mm, und die Stege waren reichlich 4 bzw. 7 mal so breit als die Striche. Bei der Beobachtung wurde das Mikroskop zunächst auf die Gitterebene selbst eingestellt. Von dieser Einstellung aus wurde es dem beugenden Schirm genähert bzw. von ihm entfernt und die jedesmalige Verschiebung sowie der in Betracht kommende Streifenabstand genau festgestellt.

Tabelle 1.

$d = \frac{1}{4}$ mm; $\lambda = 0,000671$ mm (rote Lithiumlinie).

Abstand des Streifensystems von der Gitterebene in mm				Abstand zweier benach- barter Streifen im System	
berechnet		beobachtet (Mittelwerte)	Unterschied		
aus	zu		in mm		in Proz.
$2 d^2/\lambda$	186,3	185,5	-0,8	-0,4	d
$7/4$ „	163,0	162,6	-0,4	-0,3	$d/4$
$5/3$ „	155,2	155,0	-0,2	-0,1	$d/3$
$3/2$ „	139,7	139,3	-0 4	-0,3	$d/2$
$4/3$ „	124,1	124,3	+0,2	+0,2	$d/3$
$5/4$ „	116,4	116,0	-0,4	-0,4	$d/4$
1 „	93,1	92,9	-0,2	-0,2	d
$3/4$ „	69,9	69,8	-0,1	-0,1	$d/4$
$2/3$ „	62,1	61,9	-0,2	-0,3	$d/3$
$1/2$ „	46,6	46,8	+0,2	+0,4	$d/2$
$1/3$ „	31,0	31,1	+0,1	+0,3	$d/3$
$1/4$ „	23,3	23,3	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/4$
$-1/4$ „	-23,3	-23,1	+0,2	+0,9	$d/4$
$-1/3$ „	-31,0	-31,1	-0,1	-0,3	$d/3$

Tabelle 2.

 $d = \frac{1}{4} \text{ mm}$; $\lambda = 0,000578 \text{ mm}$ (gelbe Quecksilberlinie).

Abstand des Streifensystems von der Gitterebene in mm					Abstand zweier benach- barter Streifen im System
berechnet		beobachtet (Mittelwerte)	Unterschied		
aus	zu		in mm	in Proz.	
$2 d^2/\lambda$	216,3	216,1	-0,2	-0,1	d
$7/4$ „	189,2	189,0	-0,2	-0,1	$d/4$
$5/3$ „	180,2	180,0	-0,2	-0,1	$d/3$
$3/2$ „	162,2	162,1	-0,1	-0,1	$d/2$
$4/3$ „	144,2	144,0	-0,2	-0,1	$d/3$
$5/4$ „	135,1	135,1	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/4$
1 „	108,1	108,1	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	d
$3/4$ „	81,1	81,1	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/4$
$2/3$ „	72,1	72,2	+0,1	+0,1	$d/3$
$1/2$ „	54,1	54,2	+0,1	+0,2	$d/2$
$1/3$ „	36,0	36,0	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/3$
$1/4$ „	27,0	27,1	+0,1	+0,4	$d/4$
$-1/4$ „	-27,0	-27,0	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/4$
$-1/3$ „	-36,0	-36,1	-0,1	-0,3	$d/3$

Tabelle 3.

 $d = \frac{1}{4} \text{ mm}$; $\lambda = 0,000546 \text{ mm}$ (grüne Quecksilberlinie).

Abstand des Streifensystems von der Gitterebene in mm					Abstand zweier benach- barter Streifen im System
berechnet		beobachtet (Mittelwerte)	Unterschied		
aus	zu		in mm	in Proz.	
$2 d^2/\lambda$	229,0	228,6	-0,4	-0,2	d
$7/4$ „	200,4	200,0	-0,4	-0,2	$d/4$
$5/3$ „	190,9	190,6	-0,3	-0,15	$d/3$
$3/2$ „	171,7	171,5	-0,2	-0,1	$d/2$
$4/3$ „	152,7	152,8	+0,1	+0,06	$d/3$
$5/4$ „	143,1	142,9	-0,2	-0,14	$d/4$
1 „	114,5	114,4	-0,1	-0,1	d
$3/4$ „	85,9	85,8	-0,1	-0,12	$d/4$
$2/3$ „	76,4	76,3	-0,1	-0,13	$d/3$
$1/2$ „	57,2	57,3	+0,1	+0,17	$d/2$
$1/3$ „	38,2	38,2	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/3$
$1/4$ „	28,6	28,6	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/4$
$-1/4$ „	-28,6	-28,7	-0,1	-0,35	$d/4$
$-1/3$ „	-38,2	-38,2	0,0	0,0	$d/2$

Tabelle 4.

 $d = \frac{1}{4}$ mm; $\lambda = 0,000461$ mm (blaue Strontiumlinie).

Abstand des Streifensystems von der Gitterebene in mm					Abstand zweier benach- barter Streifen im System
berechnet		beobachtet (Mittelwerte)	Unterschied		
aus	zu		in mm	in Proz.	
$2 d^2/\lambda$	271,2	270,2	-1,0	-0,4	d
$7/4$ „	237,3	236,5	-0,8	-0,3	$d/4$
$5/3$ „	226,0	225,0	-1,0	-0,4	$d/3$
$3/2$ „	203,4	204,0	+0,6	+0,3	$d/2$
$4/3$ „	180,8	181,5	+0,7	+0,4	$d/3$
$5/4$ „	169,5	168,5	-1,0	-0,6	$d/4$
1 „	135,6	135,8	+0,2	+0,1	d
$3/4$ „	101,7	101,4	-0,3	-0,3	$d/4$
$2/3$ „	90,4	90,0	-0,4	-0,4	$d/3$
$1/2$ „	67,8	67,5	-0,3	-0,4	$d/2$
$1/3$ „	45,2	45,3	+0,1	+0,2	$d/3$
$1/4$ „	33,9	33,8	-0,1	-0,3	$d/4$
$-1/4$ „	-33,9	-33,7	+0,2	+0,6	$d/4$

Tabelle 5.

 $d = \frac{1}{3}$ mm; $\lambda = 0,000671$ mm (rote Lithiumlinie).

Abstand des Streifensystems von der Gitterebene in mm					Abstand zweier benach- barter Streifen im System
berechnet		beobachtet (Mittelwerte)	Unterschied		
aus	zu		in mm	in Proz.	
$2 d^2/\lambda$	331,2	330,3	-0,9	-0,3	d
$7/4$ „	289,8	289,2	-0,6	-0,2	$d/4$
$5/3$ „	276,0	276,1	+0,1	$\pm 0,0$	$d/3$
$3/2$ „	248,4	248,0	-0,4	-0,2	$d/2$
$4/3$ „	220,8	220,4	-0,4	-0,2	$d/3$
$5/4$ „	207,0	206,5	-0,5	-0,2	$d/4$
1 „	165,6	165,6	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	d
$3/4$ „	124,2	123,9	-0,3	-0,2	$d/4$
$2/3$ „	110,4	110,1	-0,3	-0,3	$d/3$
$1/2$ „	82,8	82,6	-0,2	-0,2	$d/2$
$1/3$ „	55,2	55,2	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/3$
$1/4$ „	41,4	41,5	+0,1	+0,2	$d/4$

Tabelle 6.

 $d = 1/3$ mm; $\lambda = 0,000578$ mm (gelbe Quecksilberlinie).

Abstand des Streifensystems von der Gitterebene in mm					Abstand zweier benach- barter Streifen im System
berechnet		beobachtet (Mittelwerte)	Unterschied		
aus	zu		in mm	in Proz.	
2 d^2/λ	384,5	384,1	- 0,4	- 0,1	d
7/4 „	336,4	336,1	- 0,3	- 0,1	$d/4$
5/3 „	320,4	320,2	- 0,2	- 0,1	$d/3$
3/2 „	288,4	288,0	- 0,4	- 0,1	$d/2$
4/3 „	256,3	256,1	- 0,2	- 0,1	$d/3$
5/4 „	240,3	240,0	- 0,3	- 0,1	$d/4$
1 „	192,2	192,2	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	d
3/4 „	144,1	144,2	+ 0,1	+ 0,1	$d/4$
2/3 „	128,2	128,4	+ 0,2	+ 0,2	$d/3$
1/2 „	96,1	96,1	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/2$
1/3 „	64,1	64,1	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/3$
1/4 „	48,1	48,1	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/4$

Tabelle 7.

 $d = 1/5$ mm; $\lambda = 0,000546$ mm (grüne Quecksilberlinie).

Abstand des Streifensystems von der Gitterebene in mm					Abstand zweier benach- barter Streifen im System
berechnet		beobachtet (Mittelwerte)	Unterschied		
aus	zu		in mm	in Proz.	
2 d^2/λ	407,0	406,5	-0,5	-0,1	d
7/4 „	356,1	356,0	-0,1	-0,0	$d/4$
5/3 „	339,2	338,8	-0,4	-0,1	$d/3$
3/2 „	305,3	305,1	-0,2	-0,1	$d/2$
4/3 „	271,3	271,1	-0,2	-0,1	$d/3$
5/4 „	254,4	254,1	-0,3	-0,1	$d/4$
1 „	203,5	203,6	+0,1	+0,0	d
3/4 „	152,6	152,5	-0,1	-0,1	$d/4$
2/3 „	135,7	135,6	-0,1	-0,1	$d/3$
1/2 „	101,8	101,8	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/2$
1/3 „	67,8	67,7	-0,1	-0,2	$d/3$
1/4 „	50,9	50,9	$\pm 0,0$	$\pm 0,0$	$d/4$

Tabelle 8.

 $d = \frac{1}{3}$ mm; $\lambda = 0,000461$ mm (blaue Strontiumlinie).

Abstand des Streifensystems von der Gitterebene in mm					Abstand zweier benachbarter Streifen im System
berechnet		beobachtet (Mittelwerte)	Unterschied		
aus	zu		in mm	in ‰	
2 d^2/λ	482,0	480,9	-1,1	-0,2	d
7/4 „	421,8	420,9	-0,9	-0,2	$d/4$
5/3 „	401,7	401,1	-0,6	-0,2	$d/3$
3/2 „	361,5	362,3	+0,8	+0,2	$d/2$
4/3 „	321,3	320,0	-1,3	-0,4	$d/3$
5/4 „	301,3	300,5	-0,8	-0,3	$d/4$
1 „	241,0	240,7	-0,3	-0,1	d
3/4 „	180,8	180,6	-0,2	-0,1	$d/4$
2/3 „	160,7	160,2	-0,5	-0,3	$d/3$
1/2 „	120,5	120,6	+0,1	+0,1	$d/2$
1/3 „	80,3	80,2	-0,1	-0,1	$d/3$
1/4 „	60,3	60,1	-0,2	-0,3	$d/4$

In allen acht Tabellen zeigt sich eine recht gute Übereinstimmung zwischen den beobachteten und errechneten Werten. Außer den in den Tabellen verzeichneten Streifensystemen waren noch andere vorhanden, die aber unmöglich alle gemessen werden konnten, da namentlich bei großer Gitterkonstante und sehr schmalen Spalten die Zahl derselben beträchtlich ist. Das Aussehen der Streifenbilder ist in der Hauptsache¹⁾ so, wie es die Rechnung verlangt. Die schärfsten und hellsten Erscheinungen liegen in den Abständen d^2/λ , $d^2/2\lambda \dots d^2/m\lambda$ vom Gitter. Wird die Entfernung vom Beugungsschirm größer, so werden die Bilder allmählich blasser und verwaschener und die hellen Streifen nehmen an Breite zu. Handelt es sich um ein Gitter mit nur wenigen Spalten, so lassen sich in dem Abstand d^2/λ deutlich die früher erwähnten sekundären Maxima unterscheiden, ein Zeichen dafür, daß auch

1) Die weiter oben aus theoretischen Betrachtungen gefolgerte Konstanz des Breitenverhältnisses der dunklen und hellen Streifen in allen Abständen vom Gitter hat der Versuch nicht bestätigt. Vgl. hierüber die Bemerkungen auf p. 1026.

in diesem Fall sich Rechnung und Beobachtung in Übereinstimmung befinden.

Versuche mit weißem Licht.

Wenn man an Stelle des monochromatischen Lichtes weißes Licht benutzt, im übrigen aber die Versuchsanordnung ungeändert läßt, so zeigt das Beugungsbild in allen Abständen vom beugenden Schirm Streifen von außerordentlicher von Ort zu Ort wechselnder Farbenpracht. Dieselben kommen zustande durch Übereinanderlagerung der durch die einfachen Farben, aus denen das weiße Licht besteht, hervorgebrachten Streifensysteme. Wie alle diese Streifensysteme an irgend einer Stelle im einzelnen aussehen, läßt sich durch folgende einfache Anordnung leicht sichtbar machen. Zwischen Beobachtungsmikroskop und Gitter bringt man eine Blende, welche nur einen feinen Spalt freiläßt, derart an, daß ihre Ebene der Gitterebene parallel ist und ihr Spalt die Gitterstriche senkrecht kreuzt. Alsdann nähert man das Mikroskop so lange, bis man in ihm den Spalt deutlich sieht. Ersetzt man darauf das Okular des Mikroskopes durch ein kleines Spektroskop, so wird man bei geeigneter Orientierung desselben in der Ebene der Blende die den verschiedenen Wellenlängen entsprechenden Streifenbilder getrennt übereinander liegend wahrnehmen. Zur leichteren Handhabung der beschriebenen Einrichtung empfiehlt es sich, die Blende in dem durch die Objektweite des Mikroskopes gegebenen Abstände fest mit dem Mikroskop zu verbinden und an allen Bewegungen des letzteren teilnehmen zu lassen. Das Aussehen der Beugungserscheinung, welche die neue Anordnung liefert, läßt sich auf Grund der vorausgegangenen Entwicklungen im wesentlichen angeben. Der Ausdruck (4) stellt, solange α konstant bleibt, dieselbe Funktion dar. Daraus folgt — und die Versuchsergebnisse bestätigen dies — daß für Strahlen von verschiedener Wellenlänge Streifensysteme mit vollständig gleicher Streifenbreite in solchen Abständen vom Gitter zu erwarten sind, welche sich umgekehrt verhalten, wie die entsprechenden Wellenlängen.

Mithin ist die Aufeinanderfolge der Streifensysteme hinter einem Beugungsschirm für alle Lichtgattungen ganz gleich, nur die Abstände vom Beugungsgitter sind für die verschie-

denen Wellenlängen verschieden und zwar für kurze Wellenlängen größer als für lange. Denkt man sich nun das Mikroskop mit seiner neuen Einrichtung in unmittelbare Nähe des Gitters gebracht, so wird man in dem durch das kleine Spektroskop erzeugten spektralen Farbenbände Interferenzstreifen sehen, die im blauen Teil desselben schmal und zahlreich sind und nach dem roten Ende zu allmählich an Breite zu- und infolgedessen an Zahl abnehmen. Vergrößert man langsam den Abstand zwischen Mikroskop und Gitter, so muß ein Wandern der Streifen von rot nach blau zu beobachten sein, während im roten Ende die Streifenbreite — von kleineren Zwischenlagen abgesehen — immer bedeutender wird, bis die maximale Breite d erreicht ist. Bei weiterer Entfernung des

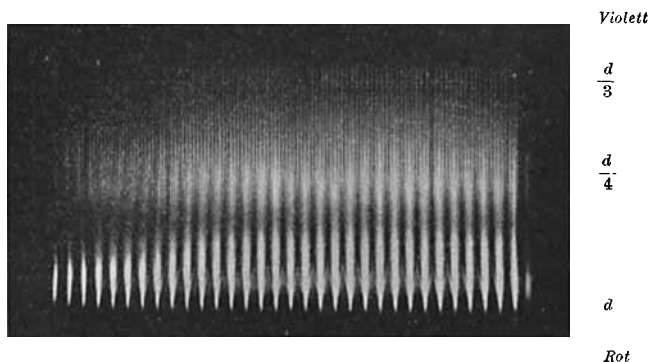


Fig. 2.

Mikroskopes wandert dann der Streifen größter Breite auch durch die ganze Farbenskala und verschwindet im Blau. Fast gleichzeitig taucht im Rot wieder ein neuer Streifen von der Breite d auf, und das Spiel wiederholt sich aufs neue. Alle diese Angaben werden durch den Versuch aufs beste bestätigt.

Die Fig. 2, welche nach einer photographischen Aufnahme angefertigt wurde, dürfte eine ungefähre Anschauung, wenn auch nicht gerade von dem Aussehen der ganzen Erscheinung, so doch wenigstens von dem Streifenverlauf in einem Teile derselben, liefern. Der Streifen maximaler Breite befand sich im Grün, also ungefähr in der Mitte des Spektrums. Infolge

der vorzüglichen Empfindlichkeit der Platte¹⁾ gegenüber blauen Strahlen und der geringen Empfindlichkeit gegenüber rotem Licht ist das Streifenbild im Blau sehr vollkommen, im Rot dagegen äußerst mangelhaft ausgebildet. Immerhin ist wohl deutlich erkennbar, daß sich die Streifenzahl mit der Wellenlänge ändert.

**Beugungserscheinungen eines Strichgitters in homogenem
divergenten Licht.**

Es möge das Strichgitter von homogenen Strahlen getroffen werden, welche von einer den Gitterstrichen parallelen Lichtlinie ausgehen. Dieselbe soll sich in einem Abstände b vor der Gitterebene befinden, während das Streifensystem in einem Abstände a hinter derselben beobachtet wird. Es sollen ferner die Größen a und b durch die Gleichung

$$(I) \quad a = q b$$

verbunden sein, wobei q jede beliebige reelle Zahl bedeuten kann.

Zur Ebene der Fig. 3 ist — wie zur Ebene der Fig. 1 — eine Schnittebene genommen, welche auf der Gitterebene und den Gitterstrichen senkrecht steht. Die Bezeichnungsweise wird keiner weiteren Erklärung bedürfen.

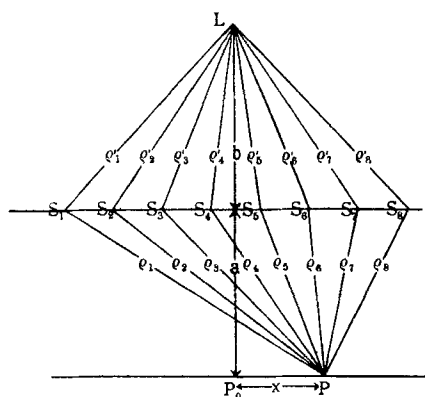


Fig. 3.

Setzt man:

$$q_1 + q_1' = r_1,$$

$$q_2 + q_2' = r_2,$$

$$q_3 + q_3' = r_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

so lassen sich die Einzelerregungen, welche der Punkt P unter Annahme von $(n+1)$ Gitterstrichen

1) Es war eine farbenempfindliche Perutzplatte.

von seiten des Punktes L erfährt, in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{r_1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right), \\ s_2 &= \frac{1}{r_2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right), \\ s_3 &= \frac{1}{r_3} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_3}{\lambda} \right), \\ &\dots \dots \dots \\ s_{n+1} &= \frac{1}{r_{n+1}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_{n+1}}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Genau dieselben Ausdrücke waren früher für die im Punkt P interferierenden Einzelschwingungen aufgestellt worden. Die weitere Rechnung führte dann unter Berücksichtigung dieser Ausdrücke zu Gleichung (1), welche auch im vorliegenden Fall bei Anwendung derselben Schlüsse erhalten wird. Diese Gleichung läßt sich nun noch vereinfachen, wenn man ähnlich, wie in den Gleichungen (2a) und (2b) die Ausdrücke für $r_1, r_2, r_3 \dots r_{n+1}$ unter Vernachlässigung höherer Potenzen der gegen a und b kleinen Glieder entwickelt.

Man erhält dann Gleichungen, welche sich von den Gleichungsformen für Parallelstrahlen nur dadurch unterscheiden, daß überall an die Stelle von α nunmehr $(q+1)\alpha$ tritt. Daraus folgt, daß alle früheren Entwicklungen an dieser Stelle übernommen werden können, wenn man sie in entsprechender Weise abändert. Das Schlußergebnis muß also für den vorliegenden Fall lauten

$$(4a) J_{n+1} = (n+1) + 2 \sum_{K=0}^{K=n-1} \frac{\sin [(K+1)(n-K)(q+1)\alpha]}{\sin [(n-K)(q+1)\alpha]} \cos [(n-K)\beta].$$

Der Ausdruck (4) charakterisierte nun ein besonders scharfes Streifensystem, wenn $\alpha = h\pi$ war, wobei h eine beliebige ganze Zahl bedeutete. Dasselbe muß für den Ausdruck (4a) der Fall sein, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$(II) \quad (q+1)\alpha = h\pi,$$

wobei h ebenfalls eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Aus der letzten Bedingungsgleichung folgt, wenn man für α seinen Wert aus (3) substituiert,

$$(III) \quad (q+1) \frac{\pi d^2}{a\lambda} = h\pi$$

oder

$$(IV) \quad (q+1) \frac{d^2}{h\lambda} = a.$$

Laut früherer Festsetzung ist

$$\frac{d^2}{\lambda} = f_1, \quad \frac{d^2}{2\lambda} = f_2, \dots, \frac{d^2}{k\lambda} = f_k \dots$$

Unter Berücksichtigung dieser Bezeichnungsweise geht (IV) über in

$$(V) \quad (q+1)f_h = a,$$

und diese Gleichung ergibt in Verbindung mit (I) nach Elimination von q

$$(VI) \quad \left(\frac{a}{b} + 1\right)f_h = a$$

oder

$$(VII) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_h}.$$

Gleichung (VII) hat genau die Form der Bildgleichung einer Linse und mithin die Größe f_h für das Gitter die Bedeutung einer Brennweite, die aber zum Unterschied von der Linsenbrennweite eine Reihe von Werten anzunehmen vermag.

Um die Streifenbreite eines Systems, das sich in einem Abstand $a^1)$ hinter dem Beugungsschirm befindet, rechnerisch zu bestimmen, fragt man zweckmäßig nach dem Ort der Hauptmaxima in diesem Abstand. Dieser Ort ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\beta}{2} = m\pi,$$

aus welcher folgt:

$$x_{\max.} = m \frac{a\lambda}{d}.$$

Bezeichnet man nun den Ort der Hauptmaxima im Abstände f_h hinter einem von Parallelstrahlen getroffenen Gitter mit $X_{\max.}$ und den Ort der Hauptmaxima in dem entsprechenden Abstände a hinter einem von divergentem Licht getroffenen Gitter — die Lichtlinie liege in der Entfernung b vor dem beugendem Schirm — mit $x_{\max.}$, so folgt aus

$$X_{\max.} = m \frac{d}{h} \quad \text{und} \quad x_{\max.} = m \frac{a\lambda}{d}$$

1) Dieser Abstand a ist nicht beliebig, sondern muß der Gleichung (VII) genügen; denn es handelt sich doch um scharfe Streifenbilder.

die neue Beziehung

$$(VIII) \quad \frac{x_{\max.}}{X_{\max.}} = a \frac{h \lambda}{d^2} = \frac{a}{f_h} = \frac{b}{b - f_h}.$$

Zur experimentellen Prüfung der Gleichungen (VII) und (VIII) wurde die Lichtlinie L in einen beliebig gewählten Abstand b vor das Gitter gebracht und die Abstände sowie Streifenbreiten der den verschiedenen Brennweiten f_h entsprechenden Beugungsbilder hinter dem Beugungsschirm durch Messung und Rechnung festgestellt.

Tabelle 9.

$d = 1/4$ mm, $\lambda = 0,000546$ mm (grüne Quecksilberlinie).

Abstand der Lichtlinie von dem Gitter in mm b (gegeben)	Brennweite f_h (gegeben)	Abstand des Streifensystems vom Gitter in mm; a				Abstand zweier benachbarter Streifen im System
		ber.	beob. (Mittelwerte)	Unterschied in mm in %		
229,0 = $2 f_1$	114,5 = f_1	229,0	228,5	-0,5	-0,2	$2 d$
" " "	57,2 = f_2	76,3	76,2	-0,1	-0,1	$2 d/3$
" " "	38,2 = f_3	45,8	45,4	-0,4	-0,9	$2 d/5$
" " "	28,6 = f_4	32,7	32,4	-0,3	-0,9	$2 d/7$
114,5 = f_1	114,5 = f_1	∞	∞	0	0	—
" " "	57,2 = f_2	114,5	114,0	-0,5	-0,5	d
" " "	38,2 = f_3	57,2	57,3	+0,1	+0,2	$d/2$
" " "	28,6 = f_4	38,2	38,0	-0,2	-0,6	$d/3$

Tabelle 10.

$d = 1/3$ mm, $\lambda = 0,000546$ mm (grüne Quecksilberlinie),

Abstand der Lichtlinie von dem Gitter in mm b (gegeben)	Brennweite f_h (gegeben)	Abstand des Streifensystems vom Gitter in mm; a				Abstand zweier benachbarter Streifen im System
		ber.	beob. (Mittelwerte)	Unterschied in mm in %		
407,0 = $2 f_1$	203,5 = f_1	407,0	405,5	-1,5	-0,4	$2 d$
" " "	101,8 = f_2	135,7	134,9	-0,8	-0,6	$2 d/3$
" " "	67,8 = f_3	81,4	81,2	-0,2	-0,3	$2 d/5$
" " "	50,9 = f_4	58,1	57,8	-0,3	-0,5	$2 d/7$
203,5 = f_1	203,5 = f_1	∞	∞	0	0	—
" " "	101,8 = f_2	203,5	202,7	-0,8	-0,4	d
" " "	67,8 = f_3	101,8	101,3	-0,5	-0,5	$d/2$
" " "	50,9 = f_4	38,2	38,0	-0,2	-0,6	$d/3$

Bemerkungen über die Erscheinungen an Streifengittern.

Der Versuch, eine allgemeine Theorie der Streifengitter zu entwickeln, soll hier nicht gemacht werden. Aber gewisse Erscheinungen der Streifengitter lassen sich auf Grund der hier behandelten Theorie der Strichgitter einfach erklären. Denkt man sich alle Spalte des Streifengitters in eine größere, für alle gleiche Anzahl schmaler Streifen zerlegt, deren Breite der Spaltbreite des Strichgitters nahezu gleichkommt, so werden sämtliche erste Streifen aller Spalte, ebenso sämtliche zweiten Streifen, desgleichen sämtliche dritten Streifen usw. für sich allein betrachtet, ein Strichgitter repräsentieren und infolgedessen im Abstände d^2/λ ein Streifen-system erzeugen. Sämtliche Strichgitter, in die das Streifengitter auf diese Weise zerlegt wird, müssen daher in ihrer Gesamtheit im Abstände d^2/λ ein Streifenbild hervorbringen, dessen Maxima so breit wie die Spalten des Streifengitters sind und in einer Entfernung aufeinander folgen, die gleich der Gitterkonstante ist.

Zu dem gleichen Ergebnis führt diese Betrachtung für die Interferenzbilder in den Abständen $2(d^2/\lambda)$, $3(d^2/\lambda)$, ... Mithin gibt es auch im Beugungsbild eines Streifengitters Streifensysteme mit der Streifenbreite d . Dieselben haben in ihrem Aussehen die größte Ähnlichkeit mit dem geometrischen Abbild des Gitters, und liegen in denselben Parallelebenen zum Beugungsschirm, in denen sich die entsprechenden Interferenzbilder eines Strichgitters, das die gleiche Gitterkonstante besitzt, befinden.

Mit Hilfe dieser Überlegungen lassen sich auch die Erscheinungen in den Abständen $d^2/2\lambda$, $d^2/3\lambda$... vom Gitter erklären. Dieselben besitzen ebenfalls Maxima, die so breit wie die Gitterspalten sind. Die Entfernung zweier benachbarter Maxima in diesen Ebenen ist aber $d/2$, $d/3$... Daraus folgt, daß die Minima fortwährend an Breite abnehmen, je mehr man sich dem Beugungsschirm nähert. Diese Betrachtungen sind aber nur so lange durchzuführen, als der Abstand der Maxima größer als die Spaltbreite ist. Es möge nun in dem benutzten Gitter sich Stegbreite zu Spaltbreite verhalten

wie $(\varrho - 1):1$, oder die Gitterkonstante das ϱ fache der Spaltbreite sein, wo ϱ eine ganze Zahl ist. Alsdann wird im Abstand $d^2/\varrho\lambda$ von der Gitterebene sowohl die Breite eines Maximums als auch die Entfernung zweier benachbarter Maxima gleich d/ϱ sein. Man sollte daher in der F'_ϱ -Ebene ein Beugungsbild ohne Dunkelstreifen erwarten. Merkwürdigerweise beobachtet man aber in dieser Ebene ein Interferenzstreifensystem, bestehend aus breiten Maxima, die durch feine dunkle Linien getrennt sind. Dieses Streifenbild ist das erste, welches abweichender Natur ist. (Vgl. hiermit die früheren Ausführungen über die Bedeutung der F'_ϱ -Ebene.) Dieses letzte Ergebnis wurde an einem Gitter 1:1 und an einem Gitter 2:1 geprüft und bestätigt gefunden.

Die untersuchten Strichgitter haben zwar sehr enge Spalten gehabt, aber sie sind im Grunde doch auch Streifengitter. Daher gilt für sie der aus der Theorie idealer Strichgitter gefolgerte Satz nicht, daß das Verhältnis der Breite der Maxima zur Breite der Minima konstant sein muß. In der Tat bestätigte die Beobachtung auch an ihnen, daß die Breite der Maxima konstant blieb, das Breitenverhältnis der Minima und Maxima also mit dem Abnehmen des Abstandes der Maxima abnahm.

**Vergleich der vorliegenden Untersuchung mit der Arbeit
von Hrn. Winkelmann.**

Es möge mir zum Schluß gestattet sein, die Beziehung der vorliegenden Arbeit zu der des Hrn. Winkelmann kurz zu erörtern.

Beide Untersuchungen haben zunächst eine gemeinsame Grundlage; dieselbe besteht in den in verschiedenen Abständen vom Gitter erzeugten Streifenbildern. Während aber Herr Winkelmann die zu diesen Abständen in bezug auf die Objektivlinse eines Fernrohres konjugierten Längen bzw. die Differenzen zwischen diesen Längen und der Objektivbrennweite mißt, habe ich die Abstände selbst zum Gegenstand meiner Messungen gemacht. Im vorletzten Paragraphen seiner Arbeit hat allerdings Hr. Winkelmann auch ohne Anwendung eines Fernrohrobjektivs Beobachtungen angestellt,

aber nach dieser Methode nur zwei Arten von Streifenbildern gemessen.

Der andere Ausgangspunkt bei Hrn. Winkelmann führt auch zu einer anderen Form der theoretischen Entwicklungen, die das Endresultat nicht in so direkter und einfacher Form hervortreten lassen. In den Ausdrücken¹⁾ für die Lage des Streifensystems und für die Streifenbreite kommen bei Hrn. Winkelmann zwei unbestimmte Größen p und q vor, für die er durch Probieren ganzzahlige Werte so einsetzt, daß jene Formeln die Beobachtungen richtig darstellen. Für die Bedeutung dieser Größen ergibt sich aus meinen Ableitungen folgendes:

Um Verwechslungen zu vermeiden, will ich die lateinischen Buchstaben, die Hr. Winkelmann benutzt, durch die entsprechenden deutschen ersetzen. Dann lauten jene beiden Ausdrücke

$$(9) \quad \eta = \frac{q \mathfrak{A} b}{p a - q b};$$

$$(10a) \quad \varepsilon = \frac{a b}{p a - q b}.$$

Dabei ist

- η der Abstand des Streifensystems vom hinteren Brennpunkt der Objektivlinse,
- \mathfrak{A} die Brennweite der Objektivlinse,
- a die Gitterkonstante,
- b die Streifenbreite in der Brennebene,
- ε die Streifenbreite in dem betrachteten Streifensystem,
- p und q die beiden erwähnten unbestimmten Größen, von denen weiter nichts ausgesagt wird, als daß sie ganze Zahlen sein müssen.

Wie bereits festgestellt wurde, befinden sich die Streifensysteme, welche Hr. Winkelmann maß, und diejenigen, welche meinen Messungen zugrunde lagen, in konjugierten Ebenen, bezogen auf die Objektivlinse des Fernrohres. Sucht man daher zu der Länge $\mathfrak{A} + \eta$ die konjugierte Länge, welche z heißen möge, und zu der Streifenbreite ε die Streifenbreite in

1) Vgl. A. Winkelmann, Ann. d. Phys. 27. p. 914 u. 915. 1908.

der konjugierten Ebene, welche ε' heißen möge, so sind δ und ε' nichts anderes als die von mir gemessenen und berechneten Größen. Unter Berücksichtigung von

$$\delta = \frac{\mathfrak{A} \lambda}{a}$$

findet man nach geringen Umformungen aus (9) und (10a)

$$\delta = \frac{p}{q} \frac{a^2}{\lambda} \quad \text{und} \quad \varepsilon' = \frac{a}{q}.$$

Multipliziert man die erstere der beiden letzten Gleichungen mit π , so erhält man

$$\delta \pi = \frac{p}{q} \frac{a^2}{\lambda} \pi$$

und daraus

$$\frac{q}{p} \pi = \frac{\pi}{\delta} \frac{a^2}{\lambda},$$

oder in meiner Bezeichnungsweise

$$\alpha = \frac{s}{r} \pi = \frac{\pi}{a} \frac{d^2}{\lambda}.$$

Es entspricht also q der von mir mit s und p der von mir mit r bezeichneten Größe.

Über die Grenzen, innerhalb deren sich die Zahlen p und q bewegen, ergibt sich folgendes:

α kann wachsen von Null bis zu sehr großen Werten. Daraus würde folgen, daß das Gebiet der Größe q die Reihe der ganzen Zahlen von Null bis zu sehr großen Werten sei. Soll jedoch das zu beobachtende Beugungsbild gleichmäßige Streifen aufweisen, so darf α nachgewiesenermaßen höchstens gleich

$$\left[\frac{d}{2\gamma} - 1 \right] \pi$$

sein, wobei d und γ die frühere Bedeutung besitzen und durch die eckige Klammer ausgedrückt sein soll, daß nur der größte in ihr enthaltene ganzzahlige Wert gemeint ist. Demnach ist die obere Grenze für die Zahl q der Wert

$$\left[\frac{d}{2\gamma} - 1 \right],$$

d. h. mit anderen Worten, q ist bei konstantem d abhängig von der Spaltbreite. Prüfen wir das gewonnene Ergebnis an dem Beobachtungsmaterial von Hrn. Winkelmann. Der größte Wert von q ist nach seiner Angabe 3. Die Gitterkonstante seines benutzten Gitters beträgt 2,1 mm und die Spaltbreite $= 2\gamma = 0,5$ mm. Daher wird

$$\left[\frac{2,1}{0,5} - 1 \right] = 3.$$

Für p ist die untere Grenze offenbar die Zahl 1, während sich der größte zulässige Wert nicht zahlenmäßig angeben läßt; anscheinend hängt letzterer von der Spaltzahl ab. Wie weiter oben bereits ausgesprochen wurde, ist die Streifenbreite nur von s — das ist aber q — abhängig, dagegen vollkommen unabhängig von r — das ist p .

Ganz abgesehen aber von der einfacheren Formulierung, welche die Erscheinungen bei dem von mir gewählten Ausgangspunkte erfahren, gibt die vorliegende Arbeit eine wesentlich ausführlichere Diskussion des ganzen Problems und berührt eine Reihe von Punkten — Änderung der Erscheinung beim Übergang von parallelem zu divergentem Licht, Aussehen der Erscheinung bei Anwendung weißen Lichtes, Einfluß der Spaltbreite u. a. m. — die von Hrn. Winkelmann noch nicht behandelt worden sind.

Zusammenfassung.

Die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

Wird ein Gitter von kohärenten Parallelstrahlen monochromatischen Lichtes senkrecht getroffen, so beobachtet man vor und hinter der Gitterebene in gleichem Abstand von ihr dem Aussehen nach gleiche Bilder. Die Aufeinanderfolge der verschiedenen Interferenzbilder ist für alle Wellenlängen dieselbe, ihre Entfernung von dem Beugungsschirm dagegen nicht; diese steht in umgekehrtem Verhältnis zur Wellenlänge.

Die Streifenbreite ist in den verschiedenen Abständen verschieden; ihren größten Wert erreicht sie in denjenigen

Parallelebenen zum Gitter, deren Abstände von ihm ein ganzzahliges Vielfaches der Größe d^2/λ sind; in diesen Ebenen ist sie gleich der Gitterkonstante d ; in allen übrigen Ebenen ist sie gleich einem Bruchteil derselben.

Bei hinreichend großer Spaltzahl weisen die Beugungsbilder in den genannten Parallelebenen, abgesehen von seitlichen Unregelmäßigkeiten, in ihrem Aussehen die größte Ähnlichkeit mit dem geometrischen Bild des jeweilig benutzten Gitters auf.

(Eingegangen 28. Juli 1910.)
