Zur Theorie der Matrices.

Von

OSKAR PERRON in München.

In dieser Note werden zum Teil bekannte Sätze aus der Theorie der Matrices und ihrer charakteristischen Gleichung auf neue, höchst einfache Weise bewiesen, zum Teil neue Sätze entwickelt. Unter den Anwendungen der Theorie hebe ich ein der Gräffeschen Methode analoges Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung hervor.

§ 1.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

das Koeffizientensystem einer linearen Substitution von n Variabeln, E das der identischen Substitution. Soweit im folgenden bloß solche Koeffizientensysteme oder kürzer *Matrices* vorkommen, die rationale Funktionen von A, also miteinander vertauschbar sind, dürfen alle rationalen Rechenoperationen genau wie bei Zahlen ausgeführt werden. Bezeichnet man die Elemente der Potenz A^ν mit $a_{ik}^{(\nu)}$, so daß also $a_{ik}^{(1)}$ mit a_{ik} gleichbedeutend ist, so ist wegen $A^{\nu+\mu} = A^\nu A^\mu$:

$$(1) \qquad a_{ik}^{(\nu+\mu)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(\nu)} a_{sk}^{(\mu)}.$$

Konsequenterweise sollen auch die Elemente der Einheitssubstitution $E = A^0$ mit $a_{ik}^{(0)}$ bezeichnet werden; es ist also

$$a_{ik}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ 1 & \text{für } i = k, \end{cases}$$

und (1) gilt auch noch, wenn ν oder μ oder beide gleich Null sind.

Sind $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$, $C = (c_{ik})$ beliebige Matrices, so sind die Gleichungen

$$A = B \quad \text{oder} \quad A = BC$$

gleichbedeutend mit

$$a_{ik} = b_{ik} \quad \text{bez.} \quad a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} b_{is} c_{sk}, \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n).$$

Die im folgenden häufig ausgeführte Umsetzung der ersten in diese zweite Form mag kurz als *Übergang von den Matrices zu ihren Elementen* bezeichnet werden.

Die Elemente $a_{ik}^{(\nu)}$ sind ganze Funktionen von $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}$. Für ihre partiellen Differentialquotienten findet man durch den Schluß von ν auf $\nu + 1$ die Formel:

$$\frac{\partial a_{ik}^{(\nu)}}{\partial a_{rs}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{sk}^{(\nu-1-\lambda)}. \tag{2}$$

Die Determinante $|E\varrho - A|$ werde mit $f(\varrho)$ bezeichnet, so daß $f(\varrho) = 0$ die *charakteristische Gleichung* der Matrix A ist; ihre Minoren mit $g_{ik}(\varrho)$, und zwar

$$\frac{\partial |E\varrho - A|}{\partial(-a_{ik})} = g_{ki}(\varrho),$$

so daß

$$\frac{Ef(\varrho)}{E\varrho - A} = \begin{pmatrix} g_{11}(\varrho) & g_{12}(\varrho) & \cdots & g_{1n}(\varrho) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1}(\varrho) & g_{n2}(\varrho) & \cdots & g_{nn}(\varrho) \end{pmatrix} \tag{3}$$

wird. Daher ist die Matrix $Ef(\varrho)$ als Funktion von ϱ teilbar durch $E\varrho - A$; da aber offenbar das gleiche von

$$Ef(\varrho) - f(A) = f(E\varrho) - f(A)$$

gilt, so muß auch $f(A)$ durch $E\varrho - A$ teilbar sein, und da $f(A)$ von ϱ gar nicht abhängt, so ist

$$f(A) = 0. \tag{4}$$

Bedeutet $\vartheta(\varrho)$ den größten gemeinsamen Faktor der Funktionen $g_{ik}(\varrho)$, so ist wegen (3) auch schon $E\frac{f}{\vartheta}(\varrho)$ teilbar durch $E\varrho - A$, und daher nach der gleichen Deduktion auch

$$\frac{f}{\vartheta}(A) = 0.$$

Soll umgekehrt φ die Funktion niedrigsten Grades sein, für welche $\varphi(A) = 0$ ist, so muß, weil $\varphi(E\varrho) - \varphi(A)$ durch $E\varrho - A$ teilbar ist, auch schon $E\varphi(\varrho)$ durch $E\varrho - A$ teilbar sein. Die Elemente von $\frac{E\varphi(\varrho)}{E\varrho - A}$ sind aber nach (3): $\frac{g_{ik}(\varrho)\,\varphi(\varrho)}{f(\varrho)}$, und dies sind dann und nur dann lauter ganze Funktionen, wenn $\varphi(\varrho)$ durch $\frac{f}{\vartheta}(\varrho)$ teilbar ist, also muß $\varphi = \frac{f}{\vartheta}$ sein. Diese Herleitung der bekannten Sätze erscheint mir einfacher als die bis jetzt gegebenen.

Zwischen den Funktionen $g_{ik}(\varrho)$ besteht die interessante Beziehung:

(5) $$\sum_{s=1}^{n} g_{is}(\varrho)\,g_{sk}(\sigma) = \frac{1}{\varrho-\sigma}\left(f(\varrho)\,g_{ik}(\sigma) - f(\sigma)\,g_{ik}(\varrho)\right).$$

Der Beweis folgt sehr einfach aus der Identität:

$$E = \frac{1}{\varrho-\sigma}\left[(E\varrho - A) - (E\sigma - A)\right];$$

multipliziert man diese nämlich beiderseits mit $\frac{Ef(\varrho)}{E\varrho - A}\,\frac{Ef(\sigma)}{E\sigma - A}$, so folgt:

$$\frac{E\,f(\varrho)}{E\varrho - A}\,\frac{Ef(\sigma)}{E\sigma - A} = \frac{1}{\varrho-\sigma}\left[f(\varrho)\,\frac{Ef(\sigma)}{E\sigma - A} - f(\sigma)\,\frac{Ef(\varrho)}{E\varrho - A}\right],$$

und hieraus Formel (5) einfach durch Übergang von den Matrices zu ihren Elementen. Für $\sigma = \varrho$ ergibt sich aus (5):

(5a) $$\sum_{s=1}^{n} g_{is}(\varrho)\,g_{sk}(\varrho) = f'(\varrho)\,g_{ik}(\varrho) - f(\varrho)\,g'_{ik}(\varrho).\,{}^{*)}$$

Aus Formel (5) fließt ein neuer sehr einfacher Beweis des Satzes von der Realität der Wurzeln der Säkulargleichung und sogar des folgenden allgemeineren Satzes von Hermite:

*Wenn die Zahlenpaare a_{ik}, a_{ki} komplex-konjugiert sind, also insbesondere auch a_{ii} reell, so hat die Gleichung $f(\varrho) = 0$ lauter reelle Wurzeln.***)

Zunächst ist leicht zu sehen, daß die Koeffizienten von $f(\varrho)$ reell sind; denn die Determinante $|E\varrho - A|$ ändert sich nicht, wenn man die Zeilen zu Kolonnen macht und gleichzeitig $\sqrt{-1}$ durch $-\sqrt{-1}$ ersetzt. Wenn jetzt $f(\varrho)$ ein Paar komplex-konjugierter Wurzeln ϱ_0, ϱ_1 hat, so setze man in (5): $\varrho = \varrho_0$, $\sigma = \varrho_1$; dann folgt für $i = k$:

$$\sum_{s=1}^{n} g_{is}(\varrho_0)\,g_{si}(\varrho_1) = 0.$$

Hier sind aber nach unserer Voraussetzung über die a_{ik} die Terme der linken Seite sämtlich Normen von komplexen Zahlen, also $\geqq 0$; sie müssen daher einzeln verschwinden. Insbesondere wird $g_{ii}(\varrho_0) = 0$. Jede komplexe Wurzel würde also auch die Hauptunterdeterminanten zum Verschwinden

---

*) Diese spezielle Formel entsteht auch, wenn man die bekannte Determinantenbeziehung

$$\frac{\partial f}{\partial(-a_{ki})}\,\frac{\partial f}{\partial(-a_{ss})} - \frac{\partial f}{\partial(-a_{si})}\,\frac{\partial f}{\partial(-a_{ks})} = f\,\frac{\partial^2 f}{\partial(-a_{ki})\,\partial(-a_{ss})}$$

nach s summiert.

**) Hermite, Comptes Rendus 41, pag. 181, wo der Beweis mittels Sturmscher Ketten geführt wird.

bringen; indem man von diesen wieder zu den Hauptunterdeterminanten übergeht, usw., folgt schließlich, daß auch $\varrho_0 - a_{ii} = 0$ sein müßte, was nicht angeht, da a_{ii} reell ist.

Unter den gleichen Voraussetzungen über die a_{ik}, als speziell auch für die Säkulargleichung, ergibt sich ebensoleicht durch Zuziehung von (5a): *Für eine Doppelwurzel von $f(\varrho) = 0$ verschwinden auch sämtliche Unterdeterminanten $g_{ik}(\varrho)$.*

§ 2.

Für die Beurteilung des gleichzeitigen Verschwindens der Unterdeterminanten von $|E\varrho - A|$ ist von Wichtigkeit die Kenntnis der *Resultante von $f(\varrho)$ und $g_{ik}(\varrho)$.* Um diese zu bilden, setze man

$$f(\varrho) = \varrho^n + c_1\varrho^{n-1} + c_2\varrho^{n-2} + \cdots + c_n$$

und führe weiter die Funktionen ein:

$$\begin{aligned} f_0(\varrho) &= 1, \\ f_1(\varrho) &= \varrho + c_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-1}(\varrho) &= \varrho^{n-1} + c_1\varrho^{n-2} + \cdots + c_{n-1}. \end{aligned}$$

Dann ist identisch

$$\begin{aligned} A^\nu \frac{f(\varrho)}{E\varrho - A} &= A^\nu \frac{f(E\varrho) - f(A)}{E\varrho - A} \\ &= A^\nu(Ef_{n-1}(\varrho) + Af_{n-2}(\varrho) + \cdots + A^{n-1}f_0(\varrho)) \\ &= A^\nu f_{n-1}(\varrho) + A^{\nu+1}f_{n-2}(\varrho) + \cdots + A^{\nu+n-1}f_0(\varrho); \end{aligned} \tag{6}$$

andererseits ist aber auch

$$\begin{aligned} A^\nu \frac{f(\varrho)}{E\varrho - A} &= \frac{E\varrho^\nu f(\varrho)}{E\varrho - A} - (E\varrho^\nu - A^\nu)\frac{f(\varrho)}{E\varrho - A} \\ &= \varrho^\nu \frac{f(\varrho)}{E\varrho - A} - f(\varrho)\frac{(E\varrho)^\nu - A^\nu}{E\varrho - A} \\ &= \varrho^\nu \frac{f(\varrho)}{E\varrho - A} - f(\varrho)(E\varrho^{\nu-1} + A\varrho^{\nu-2} + \cdots + A^{\nu-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

Indem man die rechten Seiten von (6) und (7) einander gleichsetzt und von den Matrices zu ihren Elementen übergeht, erhält man:

$$\begin{aligned} & a_{ik}^{(\nu)} f_{n-1}(\varrho) + a_{ik}^{(\nu+1)} f_{n-2}(\varrho) + \cdots + a_{ik}^{(\nu+n-1)} f_0(\varrho) \\ &= \varrho^\nu g_{ik}(\varrho) - f(\varrho)\left(a_{ik}^{(0)}\varrho^{\nu-1} + a_{ik}^{(1)}\varrho^{\nu-2} + \cdots + a_{ik}^{(\nu-1)}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

eine Formel, die sich auch durch den Schluß von ν auf $\nu + 1$ erweisen ließe; für $\nu = 0$ fällt rechts in (7) und also auch in (8) das zweite Glied weg.

Sind $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n$ die Wurzeln von $f(\varrho)$, so folgt aus (8) insbesondere:

$$(8a)\qquad a_{ik}^{(\nu)} f_{n-1}(\varrho_\lambda) + a_{ik}^{(\nu+1)} f_{n-2}(\varrho_\lambda) + \cdots + a_{ik}^{(\nu+n-1)} f_0(\varrho_\lambda) = \varrho_\lambda^\nu g_{ik}(\varrho_\lambda)$$
$$(\lambda = 1, 2, \cdots, n).$$

Für $\nu = 0, 1, \cdots, n-1$, $\lambda = 1, 2, \cdots, n$ entspringt aus (8a) ein System von n^2 Gleichungen, welche zusammen die Übereinstimmung der beiden Matrixprodukte aussagen:

$$(9)\qquad \begin{pmatrix} a_{ik}^{(0)} & a_{ik}^{(1)} & \cdots & a_{ik}^{(n-1)} \\ a_{ik}^{(1)} & a_{ik}^{(2)} & \cdots & a_{ik}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ik}^{(n-1)} & a_{ik}^{(n)} & \cdots & a_{ik}^{(2n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1}(\varrho_1) & \cdots & f_{n-1}(\varrho_n) \\ f_{n-2}(\varrho_1) & \cdots & f_{n-2}(\varrho_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_0(\varrho_1) & \cdots & f_0(\varrho_n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \varrho_1 & \cdots & \varrho_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_1^{n-1} & \cdots & \varrho_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{ik}(\varrho_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{ik}(\varrho_2) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & g_{ik}(\varrho_n) \end{pmatrix}.$$

Geht man hier zu den Determinanten über, so wird der zweite Faktor links, vom Zeichen $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ abgesehen, gleich dem ersten Faktor rechts, und da dieser, wenn die a_{ik} beliebig sind, bekanntlich nicht verschwindet, so folgt schließlich:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{ik}^{(0)} & a_{ik}^{(1)} & \cdots & a_{ik}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ik}^{(n-1)} & a_{ik}^{(n)} & \cdots & a_{ik}^{(2n-2)} \end{vmatrix} = \prod_{\lambda=1}^{n} g_{ik}(\varrho_\lambda) = R(f, g_{ik}).$$

Hiermit ist bereits ein Ausdruck für die gesuchte Resultante gewonnen. Indes ist die Determinante links keine irreduzible Funktion der a_{rs}, vielmehr folgt leicht vermittels (1), daß sie das (zeilenweise gebildete) Produkt der beiden Determinanten ist:

$$(10)\qquad P_i = \begin{vmatrix} a_{i1}^{(0)} & a_{i2}^{(0)} & \cdots & a_{in}^{(0)} \\ a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & \cdots & a_{in}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1}^{(n-1)} & a_{i2}^{(n-1)} & \cdots & a_{in}^{(n-1)} \end{vmatrix}, \qquad Q_k = \begin{vmatrix} a_{1k}^{(0)} & a_{2k}^{(0)} & \cdots & a_{nk}^{(0)} \\ a_{1k}^{(1)} & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{nk}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1k}^{(n-1)} & a_{2k}^{(n-1)} & \cdots & a_{nk}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Die Resultante $R(f, g_{ik})$ zerfällt also in zwei Faktoren, deren erster nur von i, deren zweiter nur von k abhängt:

$$(11)\qquad R(f, g_{ik}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P_i Q_k.$$

Multipliziert man (9) mit einer Unbestimmten u_{ik} und summiert über i, k, so liefert die gleiche Betrachtung auch die allgemeinere Formel:

$$(12)\quad R\left(f, \sum u_{ik} g_{ik}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \sum u_{ik} a_{ik}^{(0)} & \sum u_{ik} a_{ik}^{(1)} & \cdots & \sum u_{ik} a_{ik}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum u_{ik} a_{ik}^{(n-1)} & \sum u_{ik} a_{ik}^{(n)} & \cdots & \sum u_{ik} a_{ik}^{(2n-2)} \end{vmatrix}.$$

Die Funktionen $g_{ik}(\varrho)$ haben daher dann und nur dann alle eine gemeinsame Wurzel, wenn die Determinante (12) identisch in $u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{nn}$ verschwindet. Wenn, etwas weniger allgemein, $u_i v_k$ an Stelle von u_{ik} tritt, so zerfällt die Determinante (12) wieder in zwei Faktoren, nämlich

$$(13)\quad \begin{aligned} &(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R\left(f, \sum u_i v_k g_{ik}\right) \\ &= \begin{vmatrix} \sum u_i a_{i1}^{(0)} & \sum u_i a_{i2}^{(0)} & \cdots & \sum u_i a_{in}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum u_i a_{i1}^{(n-1)} & \sum u_i a_{i2}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_i a_{in}^{(n-1)} \end{vmatrix} \\ &\times \begin{vmatrix} \sum v_k a_{1k}^{(0)} & \sum v_k a_{2k}^{(0)} & \cdots & \sum v_k a_{nk}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum v_k a_{1k}^{(n-1)} & \sum v_k a_{2k}^{(n-1)} & \cdots & \sum v_k a_{nk}^{(n-1)} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Setzt man alle u gleich 0 bis auf eines, u_i, so folgt hieraus speziell, daß $R\left(f, \sum_k v_k g_{ik}\right)$ den Faktor P_i hat. Wenn also P_i verschwindet, so haben die Funktionen $f(\varrho)$ und $\sum_k v_k g_{ik}(\varrho)$ für beliebige v_k eine Nullstelle gemein, und daher haben

$$f(\varrho),\ g_{i1}(\varrho),\ g_{i2}(\varrho),\ \cdots,\ g_{in}(\varrho)$$

eine gemeinsame Wurzel. Wenn umgekehrt diese Funktionen eine gemeinsame Wurzel haben, so muß auch notwendig $P_i = 0$ sein. Denn addiert man in der Determinante P_i (Formel (10)) zu den Elementen der letzten Zeile die mit $f_{n-1}(\varrho)$ multiplizierten Elemente der ersten, die mit $f_{n-2}(\varrho)$ multiplizierten Elemente der zweiten usw., so nimmt P_i wegen (8) (für $\nu = 0$) die Gestalt an:

$$P_i = \begin{vmatrix} a_{i1}^{(0)} & a_{i2}^{(0)} & \cdots & a_{in}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1}^{(n-2)} & a_{i2}^{(n-2)} & \cdots & a_{in}^{(n-2)} \\ g_{i1}(\varrho) & g_{i2}(\varrho) & \cdots & g_{in}(\varrho) \end{vmatrix} = \sum_k \Phi_{ik} g_{ik}(\varrho),$$

woraus die Behauptung folgt.

Analoges gilt bezüglich der Funktionen Q_k. Damit also alle $g_{ik}(\varrho)$ eine gemeinsame Wurzel haben, ist notwendig, daß alle P_i und alle Q_k verschwinden. Es wäre aber ein Irrtum, aus dem Obigen schließen zu wollen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind. Das gleichzeitige Verschwinden von P_1 und P_2 bewirkt nämlich nur, daß $f(\varrho)$ sowohl mit

$$g_{11}(\varrho),\ g_{12}(\varrho),\ \cdots,\ g_{1n}(\varrho),$$

als auch mit

$$g_{21}(\varrho),\ g_{22}(\varrho),\ \cdots,\ g_{2n}(\varrho)$$

je eine Wurzel gemein hat; doch ist dies im allgemeinen, wie man sich leicht durch Beispiele überzeugt, *nicht die gleiche Wurzel.* Damit letzteres der Fall ist, müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein.

§ 3.

Daß die Resultante $R(f, g_{ik})$ in zwei Faktoren zerfällt, deren erster nur von i, deren zweiter nur von k abhängt, läßt sich nach bekannten Determinantensätzen a priori erwarten. Denn es ist ja

$$\begin{vmatrix} g_{ik}(\varrho) & g_{is}(\varrho) \\ g_{rk}(\varrho) & g_{rs}(\varrho) \end{vmatrix} = f(\varrho) \frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial(-a_{ki})\,\partial(-a_{sr})}.$$

Wenn also $f(\varrho)$ und $g_{ik}(\varrho)$ verschwindet, so muß zugleich auch $g_{is}(\varrho)\, g_{rk}(\varrho)$ verschwinden für beliebige r, s, also entweder $g_{i1}, g_{i2}, \cdots, g_{in}$, oder $g_{1k}, g_{2k}, \cdots, g_{nk}$. Die Resultante $R(f, g_{ik})$ wird also einen Faktor haben, der nur von i, und einen, der nur von k abhängt.

Es fragt sich nun weiter, ob etwa die P_i, Q_k irreduzible Funktionen der a_{rs} sind, oder ob sie wieder zerfallen. Mit der Entscheidung dieser Frage verbinden wir eine genauere Diskussion der betreffenden Funktionen.

Differenziert man in der Determinante P_i (Formel (10)) die Elemente einer beliebigen, etwa der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Zeile nach a_{ri}, so werden nach (2) die Elemente dieser Zeile

$$\frac{\partial a_{i1}^{(\nu)}}{\partial a_{ri}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{i1}^{(\nu-1-\lambda)},\quad \frac{\partial a_{i2}^{(\nu)}}{\partial a_{ri}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{i2}^{(\nu-1-\lambda)},\ \cdots,\ \frac{\partial a_{in}^{(\nu)}}{\partial a_{ri}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{in}^{(\nu-1-\lambda)};$$

sie setzen sich also linear aus den Elementen der vorhergehenden Zeilen zusammen.*) Daher verschwindet die Determinante und es folgt:

$$\frac{\partial P_i}{\partial a_{ri}} = 0.$$

Somit hängt P_i von $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ gar nicht ab, und man kann unbeschadet der Allgemeinheit bei Bildung von P_i statt die Matrix A die

*) Für $\nu = 0$ sind diese Formeln nicht anwendbar; aber in diesem Fall sind die fraglichen Elemente offenbar alle gleich Null.

speziellere wählen, bei der die Elemente der i^{ten} Kolonne sämtlich verschwinden.

Die Irreduzibilität von P_i beweisen wir nun durch vollständige Induktion. Für $n = 2$ ist

$$P_1 = a_{12}, \quad P_2 = -a_{21},$$

also irreduzibel; wir setzen daher für ein bestimmtes n voraus, daß $P_1, P_2, \cdots, P_n$ irreduzibel sind, und bilden dann die $(n+1)$-reihige Matrix:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,i-1} & 0 & a_{i-1,i} & \cdots & a_{i-1,n} \\ u_1 & \cdots & u_{i-1} & 0 & u_i & \cdots & u_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die ν^{te} Potenz hiervon wird, wie leicht zu sehen,

$$A'^{\nu} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(\nu)} & \cdots & a_{1,i-1}^{(\nu)} & 0 & a_{1i}^{(\nu)} & \cdots & a_{1n}^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1}^{(\nu)} & \cdots & a_{i-1,i-1}^{(\nu)} & 0 & a_{i-1,i}^{(\nu)} & \cdots & a_{i-1,n}^{(\nu)} \\ \sum\limits_s u_s a_{s1}^{(\nu-1)} & \cdots & \sum\limits_s u_s a_{s,i-1}^{(\nu-1)} & 0 & \sum\limits_s u_s a_{si}^{(\nu-1)} & \cdots & \sum\limits_s u_s a_{sn}^{(\nu-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(\nu)} & \cdots & a_{n,i-1}^{(\nu)} & 0 & a_{ni}^{(\nu)} & \cdots & a_{nn}^{(\nu)} \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet man daher mit P_i' diejenige Determinante, welche in bezug auf die Matrix A' die gleiche Bedeutung hat wie P_i in bezug auf die Matrix A (Formel (10)), so wird, wenn δ_{ik} die 0 oder 1 bedeutet, je nachdem $i \neq k$ oder $i = k$ ist,

$$P_i' = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \cdots & \delta_{i,i-1} & \delta_{ii} & \delta_{i,i+1} & \cdots & \delta_{i,n+1} \\ u_1 & \cdots & u_{i-1} & 0 & u_i & \cdots & u_n \\ \sum u_s a_{s1} & \cdots & \sum u_s a_{s,i-1} & 0 & \sum u_s a_{si} & \cdots & \sum u_s a_{sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum u_s a_{s1}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_s a_{s,i-1}^{(n-1)} & 0 & \sum u_s a_{si}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} \sum u_s a_{s1}^{(0)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(0)} \\ \sum u_s a_{s1}^{(1)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum u_s a_{s1}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1} (u_1^n P_1 + \cdots + u_2^n P_2 + \cdots).$$

Da $P_1, P_2, \cdots, P_n$ nach Voraussetzung irreduzibel sind, so kann hiernach P_i' offenbar nur in der Weise zerfallen, daß ein Faktor $\varphi(u_1, \cdots, u_n)$ sich abspaltet, der von den a_{rs} ganz frei ist. Dies ist aber nicht möglich; denn es müßte alsdann die Determinante P_i' für gewisse *numerische* Werte von $u_1, \cdots, u_n$ verschwinden, und da sie nach (13) ein Faktor von $R\left(f, \sum u_i v_i g_{ik}\right)$ ist, so müßten für diese Werte $f(\varrho)$ und $\sum u_i v_k g_{ik}(\varrho)$ eine Wurzel gemein haben. Dies ist aber nicht möglich, weil $f(\varrho)$ von höherem Grad als $\sum u_i v_k g_{ik}(\varrho)$ und bekanntlich irreduzibel ist.

Die obige Darstellung von P_i' zeigt zugleich, daß dies eine homogene Funktion n^{ten} Grades von $u_1, \cdots, u_n$ ist, und dies kann sich nach dem zuvor Bewiesenen auch nicht ändern, wenn in der Matrix A' an Stelle der Nullen in der i^{ten} Kolonne beliebige Elemente treten. Ebenso wird, indem man wieder n an Stelle von $n+1$ setzt, P_i homogen vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad in $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ sein. Diese Resultate fassen wir zusammen in folgendem

Satz: *Die Funktionen $P_1, P_2, \cdots, P_n$ sind irreduzibel im Bereich der Variabeln a_{rs} (und beliebiger numerischer Werte); P_i hängt von $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ nicht ab und ist eine homogene Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ (a_{ii} ausgeschlossen).*

Analog ergibt sich auch:

Die Funktionen $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ sind irreduzibel im Bereich der Variabeln a_{rs} (und beliebiger numerischer Werte); Q_k hängt von $a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kn}$ nicht ab, und ist eine homogene Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{nk}$ (a_{kk} ausgeschlossen).

Wenn die a_{rs} nicht unabhängig voneinander sind, so können natürlich die P_i, Q_k sehr wohl zerfallen. Doch mag bemerkt werden, daß sie noch irreduzibel bleiben, wenn die Matrix A eine symmetrische, d. h. $a_{rs} = a_{sr}$ ist, sonst aber die a_{rs} keiner Bedingung unterliegen. Außerdem ist dann $P_i = Q_i$, und ebenfalls wieder P_i homogen vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad in $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ (a_{ii} ausgeschlossen); von a_{ii} hängt P_i wieder nicht ab.

§ 4.

Für die Berechnung der $a_{ik}^{(\nu)}$ ist in (1) eine Rekursionsformel angegeben; *sie lassen sich aber mit Hilfe der Wurzeln der charakteristischen Gleichung auch in independenter Form darstellen.* Seien $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_m$ die verschiedenen Wurzeln von $f(\varrho)$, und zwar ϱ_λ eine $r_\lambda$fache, so daß

$$(14) \qquad f(\varrho) = (\varrho - \varrho_1)^{r_1} \psi_1(\varrho) = \cdots = (\varrho - \varrho_m)^{r_m} \psi_m(\varrho)$$

gesetzt werden kann, wo nun $\psi_\lambda(\varrho_\lambda) \neq 0$ ist. Dann liefert die Theorie der Partialbrüche die Identität:

$$\frac{x^\nu}{f(x)} = E(x) + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\zeta^{r_\lambda - 1} \left[\frac{\zeta^{r_\lambda}(\varrho_\lambda + \zeta)^\nu}{f(\varrho_\lambda + \zeta)(x - \varrho_\lambda - \zeta)} \right]_{\zeta=0} \text{*)},$$

wo $E(x)$ eine ganze Funktion bedeutet, und durch das Zeichen D_ζ^r die ν^{te} Ableitung nach ζ angedeutet wird. Statt dessen kann man auch schreiben, wenn man $\varrho_\lambda + \zeta = \varrho$ setzt und mit $f(x)$ multipliziert:

$$x^\nu = E(x) f(x) + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\varrho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\varrho^\nu}{\psi_\lambda(\varrho)} \frac{f(x)}{x - \varrho} \right)_{\varrho = \varrho_\lambda}$$

Nun ist offenbar

$$D_\varrho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\varrho^\nu}{\psi_\lambda(\varrho)} \frac{f(\varrho)}{x - \varrho} \right)_{\varrho = \varrho_\lambda} = D_\varrho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\varrho^\nu (\varrho - \varrho_\lambda)^{r_\lambda}}{x - \varrho} \right)_{\varrho = \varrho_\lambda} = 0,$$

so daß an Stelle der letzten Gleichung auch die folgende treten kann:

$$x^\nu = E(x) f(x) + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\varrho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\varrho^\nu}{\psi_\lambda(\varrho)} \frac{f(\varrho) - f(x)}{\varrho - x} \right)_{\varrho = \varrho_\lambda}$$

Da dies eine Identität in x ist, so entsteht auch eine richtige Gleichung, wenn an Stelle von x die Matrix A tritt; wegen $f(A) = 0$ folgt dann

$$A^\nu = \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\varrho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\varrho^\nu}{\psi_\lambda(\varrho)} \frac{E f(\varrho)}{E\varrho - A} \right)_{\varrho = \varrho_\lambda},$$

oder, indem man von den Matrices zu ihren Elementen übergeht:

$$a_{ik}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\varrho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\varrho^\nu g_{ik}(\varrho)}{\psi_\lambda(\varrho)} \right)_{\varrho = \varrho_\lambda} \tag{15}$$

Dies ist die gesuchte Formel. Von jetzt ab soll der Einfachheit wegen vorausgesetzt werden, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung alle verschieden sind (prinzipielle Schwierigkeiten würde die Behandlung des allgemeinen Falles nicht bieten). Formel (15) geht dann über in

$$a_{ik}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\varrho_\lambda^\nu g_{ik}(\varrho_\lambda)}{f'(\varrho_\lambda)}. \tag{15a}$$

Ist ϱ_1 absolut größer als die andern Wurzeln, so folgt hieraus

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu)}}{\varrho_1^\nu} = \frac{g_{ik}(\varrho_1)}{f'(\varrho_1)},$$

---

*) Man sehe etwa: Serret, Handbuch der höhern Algebra, 2. Aufl. Art. 222.

und daraus wieder, sofern nur $g_{ik}(\varrho_1) \neq 0$ ist*):

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1 \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1;$$

allgemeiner auch:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\sum_{i,k} u_{ik} a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1 \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{\sum_{i,k} u_{ik} a_{ik}^{(\nu+1)}}{\sum_{i,k} u_{ik} a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1,$$

wo die u_{ik} irgend welche Werte sind, für welche $\sum u_{ik} g_{ik}(\varrho_1) \neq 0$ ist.

Diese Formeln können zur näherungsweisen Berechnung der Wurzel ϱ_1 benutzt werden. Man bilde zu diesem Zweck sukzessive die Matrices

$$A^2, A^4, A^8, \cdots, A^{2^\nu}.$$

Die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichungen sind bez. die $2, 4, 8, \cdots{}^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln von $f(\varrho)$, und das Verfahren ist also ganz analog der *Näherungsmethode von Gräffe*, die sogar als Spezialfall daraus hervorgeht, wenn

$$u_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k, \\ 0 \text{ für } i \neq k \end{cases}$$

gesetzt wird (es ist nämlich $\sum_i a_{ii}^{(\nu)}$ die ν^{te} Potenzsumme der Wurzeln der charakteristischen Gleichung). Das bei der Gräffeschen Methode notwendige Ausziehen der $2^{\nu\text{ten}}$ Wurzel, wodurch eine Vieldeutigkeit entsteht, kann aber hier vermieden werden, indem man die Matrix A^{2^ν} noch mit A multipliziert; man erhält dann in $\dfrac{a_{ik}^{(2^\nu+1)}}{a_{ik}^{(2^\nu)}}$ einen Näherungswert von ϱ_1.

Aus (15a) folgt weiter:

$$\begin{vmatrix} a_{ik}^{(\nu)} & a_{is}^{(\nu)} \\ a_{rk}^{(\nu)} & a_{rs}^{(\nu)} \end{vmatrix} = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\varrho_\lambda^\nu \varrho_\mu^\nu}{f'(\varrho_\lambda) f'(\varrho_\mu)} \begin{vmatrix} g_{ik}(\varrho_\lambda) & g_{is}(\varrho_\lambda) \\ g_{rk}(\varrho_\mu) & g_{rs}(\varrho_\mu) \end{vmatrix};$$

dabei ist über λ und μ von 1 bis n zu summieren; es verschwinden aber offenbar diejenigen Summanden, für welche $\lambda = \mu$ ist. Wenn daher $|\varrho_1| > |\varrho_2|$ und ϱ_2 seinerseits wieder absolut größer ist als die übrigen Wurzeln, so ergibt sich

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\begin{vmatrix} a_{ik}^{(\nu)} & a_{is}^{(\nu)} \\ a_{rk}^{(\nu)} & a_{rs}^{(\nu)} \end{vmatrix}}{\varrho_1^\nu \varrho_2^\nu} = \frac{\begin{vmatrix} g_{ik}(\varrho_1) & g_{is}(\varrho_1) \\ g_{rk}(\varrho_2) & g_{rs}(\varrho_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{ik}(\varrho_2) & g_{is}(\varrho_2) \\ g_{rk}(\varrho_1) & g_{rs}(\varrho_1) \end{vmatrix}}{f'(\varrho_1) f'(\varrho_2)},$$

*) Man beachte, daß $g_{ik}(\varrho_1) = 0$ gewiß nicht für alle Werte i, k sein kann, weil ϱ_1 als einfache Wurzel von $f(\varrho)$ vorausgesetzt ist.

und hieraus erhält man analog wie oben Näherungswerte für $\varrho_1 \varrho_2$. Wenn weiter $|\varrho_1| > |\varrho_2| > |\varrho_3|$ und ϱ_3 wieder absolut größer ist als die noch fehlenden Wurzeln, so liefern die dreireihigen Determinanten der Matrix A^ν ebenso Näherungswerte für $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ usw., so daß man durch Division auch sukzessive $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \cdots$ erhält, genau wie bei der Gräffeschen Methode.

§ 5.

Wenn die charakteristische Gleichung eine Wurzel ϱ_1 hat, welche alle andern an absolutem Betrag übertrifft, so ist nach dem vorigen Paragraphen:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1, \quad \text{sofern} \quad g_{ik}(\varrho_1) \neq 0 \quad \text{ist.}$$

Umgekehrt kann unter Umständen, wenn die Existenz dieses Grenzwertes von vornherein bekannt ist, daraus ein Rückschluß auf die Wurzeln der charakteristischen Gleichung gezogen werden.

Seien alle a_{ik} reell und > 0; dasselbe gilt dann auch von den Zahlen $a_{ik}^{(\nu)}$. Bezeichnet man daher die kleinste, bez. größte der n Zahlen

$$\frac{a_{i1}^{(\nu)}}{a_{r1}^{(\nu)}}, \frac{a_{i2}^{(\nu)}}{a_{r2}^{(\nu)}}, \ldots, \frac{a_{in}^{(\nu)}}{a_{rn}^{(\nu)}}$$

mit $\beta^{(\nu)}$ bez. $\mathrm{B}^{(\nu)}$, so daß $0 < \beta^{(\nu)} \leqq \mathrm{B}^{(\nu)}$ ist, so folgt*)

$$(16) \qquad \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{is}^{(\nu)} a_{sk}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(\nu)} \frac{a_{is}^{(\nu)}}{a_{rs}^{(\nu)}} \begin{cases} \geqq \beta^{(\nu)} \left(\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)}\right) \\ \leqq \mathrm{B}^{(\nu)} \left(\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)}\right), \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{a_{rs}^{(\nu)} a_{sk}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \lambda_s^{(\nu)}$$

gesetzt ist.*) Da aber offenbar $\lambda_s^{(\nu)} > 0$ und $\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} = 1$ ist, so folgt aus (16) auch: $\beta^{(\nu+1)} \geqq \beta^{(\nu)}$ und $\mathrm{B}^{(\nu+1)} \leqq \mathrm{B}^{(\nu)}$, also:

$$0 < \beta^{(\nu)} \leqq \beta^{(\nu+1)} \leqq \mathrm{B}^{(\nu+1)} \leqq \mathrm{B}^{(\nu)}.$$

Nach einem bekannten Satz existieren daher die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} \beta^{(\nu)} = \beta, \quad \lim_{\nu=\infty} \mathrm{B}^{(\nu)} = \mathrm{B},$$

und es ist

$$\beta^{(\nu)} \leqq \beta \leqq \mathrm{B} \leqq \mathrm{B}^{(\nu)}.$$

Wenn somit ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet, so wird für

*) Es sind bei β, B, λ allemal nur die Indizes angemerkt, auf welche es im Lauf der gegenwärtigen Untersuchung allein ankommt.

hinreichend große ν gewiß $\frac{a_{is}^{(\nu)}}{a_{rs}^{(\nu)}} > \beta - \varepsilon$, und folglich nach (16), wenn ϱ eine beliebige der Zahlen $1, 2, \cdots, n$ bedeutet:

$$\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} > \left(\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} - \lambda_\varrho^{(\nu)}\right)(\beta - \varepsilon) + \lambda_\varrho^{(\nu)} \frac{a_{i\varrho}^{(\nu)}}{a_{r\varrho}^{(\nu)}}$$

$$= \left(1 - \lambda_\varrho^{(\nu)}\right)(\beta - \varepsilon) + \lambda_\varrho^{(\nu)} \frac{a_{i\varrho}^{(\nu)}}{a_{r\varrho}^{(\nu)}}$$

oder auch

$$\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} - \beta > \lambda_\varrho^{(\nu)} \left(\frac{a_{i\varrho}^{(\nu)}}{a_{r\varrho}^{(\nu)}} - \beta\right) - \varepsilon. \tag{17}$$

Nun ist aber

$$\frac{\lambda_s^{(\nu)}}{\lambda_\varrho^{(\nu)}} = \frac{a_{sk}\, a_{rs}^{(\nu)}}{a_{\varrho k}\, a_{r\varrho}^{(\nu)}} = \frac{a_{sk}}{a_{\varrho k}} \, \frac{\sum\limits_\tau a_{r\tau}^{(\nu-1)} a_{\tau s}}{\sum\limits_\tau a_{r\tau}^{(\nu-1)} a_{\tau\varrho}}.$$

Da alle a_{ik} größer als Null vorausgesetzt sind, so sind die n^4 Quotienten $\frac{a_{ik}}{a_{rs}}$ $(i, k, r, s = 1, 2, \cdots, n)$ endliche positive Zahlen und daher sämtlich kleiner als eine Zahl N; daher folgt

$$\frac{\lambda_s^{(\nu)}}{\lambda_\varrho^{(\nu)}} < N \frac{\sum\limits_\tau a_{r\tau}^{(\nu-1)} N a_{\tau\varrho}}{\sum\limits_\tau a_{r\tau}^{(\nu-1)} a_{\tau\varrho}} = N^2,$$

und somit

$$1 = \lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} < n N^2 \lambda_\varrho^{(\nu)}, \quad \text{d. h.} \quad \lambda_\varrho^{(\nu)} > \frac{1}{nN^2}.$$

Daher bleibt $\lambda_\varrho^{(\nu)}$ stets über einer von ν unabhängigen Grenze c, und aus (17) ergibt sich

$$\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} - \beta > c\left(\frac{a_{i\varrho}^{(\nu)}}{a_{r\varrho}^{(\nu)}} - \beta\right) - \varepsilon.$$

Da hierbei k und ϱ beliebig sind, so können sie speziell so gewählt werden, daß

$$\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \beta^{(\nu+1)} \leqq \beta; \qquad \frac{a_{i\varrho}^{(\nu)}}{a_{r\varrho}^{(\nu)}} = \mathsf{B}^{(\nu)} \geqq \mathsf{B}$$

wird, worauf aus der vorigen Ungleichung die weitere hervorgeht:

$$0 > c(\mathsf{B} - \beta) - \varepsilon.$$

Da ε beliebig klein angenommen werden kann und c eine feste positive Zahl ist, so folgt hieraus $\beta = \mathsf{B}$. *Das besagt aber, daß die Grenzwerte*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{i1}^{(\nu)}}{a_{r1}^{(\nu)}}, \ \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{i2}^{(\nu)}}{a_{r2}^{(\nu)}}, \cdots, \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{in}^{(\nu)}}{a_{rn}^{(\nu)}}$$

existieren und einander gleich sind. Ebenso wird bewiesen, daß auch die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{1k}^{(\nu)}}{a_{1s}^{(\nu)}}, \ \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{2k}^{(\nu)}}{a_{2s}^{(\nu)}}, \cdots, \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{nk}^{(\nu)}}{a_{ns}^{(\nu)}}$$

existieren und einander gleich sind. Setzt man daher

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu)}}{a_{rk}^{(\nu)}} = \frac{x_i}{x_r}, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu)}}{a_{is}^{(\nu)}} = \frac{y_k}{y_s},$$

so folgt weiter:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \lim_{\nu=\infty} \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{is}\, a_{sk}^{(\nu)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{is}\, x_s}{x_i}$$

und auch:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \lim_{\nu=\infty} \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{is}^{(\nu)}\, a_{sk}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{sk}\, y_s}{y_k}.$$

Somit existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho' \tag{18}$$

und ist sowohl von k als von i unabhängig; ferner ist ϱ' positiv, und wegen

$$\varrho' x_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n$$

ist ϱ' eine Wurzel der charakteristischen Gleichung.

Da alle $a_{ik}^{(\nu)}$ positiv sind, so folgt aus (18) leicht auch

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\sum_i a_{ii}^{(\nu+1)}}{\sum_i a_{ii}^{(\nu)}} = \varrho'.$$

Nun ist aber $\sum_i a_{ii}^{(\nu)}$ nichts anderes als die ν^{te} Potenzsumme der Wurzeln von $f(\varrho)$, und daher ist aus der Existenz des obigen Grenzwertes zu schließen, daß ϱ' jede andere Wurzel der charakteristischen Gleichung an absolutem Betrag übertrifft. Der Beweis ist wörtlich so zu führen wie in meiner Habilitationsschrift (Math. Ann. 64 pag. 50, Zeile 4 v. u. bis pag. 51, Zeile 5). In der gleichen Arbeit (pag. 47, Hilfssatz) ist außerdem gezeigt, daß ϱ' eine *einfache* Wurzel ist, und daher ergibt sich folgender

Satz: *Wenn alle a_{ik} reell und > 0 sind, so hat die charakteristische Gleichung eine einfache positive Wurzel, welche alle anderen Wurzeln an absolutem Betrag übertrifft.*

Obwohl dies ein rein algebraischer Satz ist, so ist mir doch sein Beweis mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln der Algebra nicht gelungen. Der Satz bleibt übrigens auch zu Recht bestehen, wenn die a_{ik} nur zum Teil positiv, die übrigen aber gleich Null sind, *sofern nur eine gewisse Potenz der Matrix A existiert, bei der kein Element mehr verschwindet.* Wenn nämlich für ein bestimmtes ν alle $a_{ik}^{(\nu)}$ größer als Null sind, so gilt dann das gleiche auch für jeden größeren Wert von ν. Sind also $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, so ist ϱ_1^ν positiv und absolut größer als die übrigen ϱ_λ^ν; ebenso ist $\varrho_1^{\nu+1}$ positiv, und daher auch ϱ_1 positiv und absolut größer als die übrigen ϱ_λ.

Es gilt daher der obige Satz und die Wurzel ϱ_1 kann somit nach der Methode von Gräffe oder auch nach der in § 4 auseinandergesetzten Methode berechnet werden.

Wir betrachten beispielsweise die Matrix

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & a_1 \\ 1 & 0 \cdots 0 & a_2 \\ 0 & 1 \cdots 0 & a_3 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots 1 & a_n \end{vmatrix},$$

deren charakteristische Gleichung lautet

$$f(\varrho) = \varrho^n - a_n \varrho^{n-1} - a_{n-1}\varrho^{n-2} - \cdots - a_2 \varrho - a_1 = 0.$$

Aus der Formel $A^{\nu+1} = A^\nu A$ geht jetzt hervor:

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha) \qquad a_{ik}^{(\nu+1)} = a_{i,\,k+1}^{(\nu)} \qquad (k = 1,\ 2 \cdots n-1) \\ &(\beta) \qquad a_{in}^{(\nu+1)} = a_{i1}^{(\nu)} a_1 + a_{i2}^{(\nu)} a_2 + \cdots + a_{in}^{(\nu)} a_n \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,\ 2, \cdots n).$$

Nun sei $a_1 > 0$, $a_n > 0$, die übrigen a_i nur $\geqq 0$; dann folgt aus (α)

$$a_{in}^{(1)} = a_{i1}^{(n)}, \qquad a_{in}^{(2)} = a_{i2}^{(n)}, \cdots, a_{in}^{(n-1)} = a_{i,\,n-1}^{(n)}.$$

Wenn daher

$$a_{in}^{(1)}, \qquad a_{in}^{(2)}, \cdots, a_{in}^{(n)}$$

alle verschwinden würden, so würde das gleiche von

$$a_{i1}^{(n)}, \qquad a_{i2}^{(n)}, \cdots, a_{in}^{(n)}$$

gelten; dies sind aber die Elemente der i^{ten} Zeile der Matrix A^n; also müßte die Determinante verschwinden, was nicht der Fall ist. Daher gibt es einen Index ν, für welchen $a_{in}^{(\nu)} > 0$ ist; nach (β) ist dann auch $a_{in}^{(\nu+1)} > 0$, folglich $a_{in}^{(\nu+2)} > 0$ etc. Nach (α) ist aber weiter $a_{in}^{(\nu)} = a_{ik}^{(\nu+k-n)}$, also von einem gewissen ν ab auch $a_{ik}^{(\nu)} > 0$. Somit gibt es eine Potenz von A, bei der kein Element mehr verschwindet, und wir erhalten den

Satz: *Wenn die Koeffizienten der Gleichung*

$$\varrho^n - a_n \varrho^{n-1} - \cdots - a_2 \varrho - a_1 = 0$$

den Ungleichungen genügen

$$a_1 > 0, \quad a_n > 0,$$
$$a_i \geqq 0 \quad \text{für } i = 2, 3, \cdots, n-1,$$

so existiert eine positive Wurzel, welche alle anderen Wurzeln an absolutem Betrag übertrifft.

Dieser spezielle Satz ist auch ganz leicht rein algebraisch einzusehen; er ist überdies auch ein Spezialfall von Satz IX meiner Habilitationsschrift (loc. cit. pag. 51). Man bemerke übrigens, daß der Satz nicht mehr allgemein richtig wäre, wenn man auch für a_n den Wert 0 zulassen wollte; denn beispielsweise hat die Gleichung

$$\varrho^n - a_1 = 0$$

lauter Wurzeln von *gleichem* absolutem Betrag. In der Tat ist auch leicht zu sehen, daß im Fall $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$ eine Potenz A^ν, bei der kein Element mehr verschwindet, nicht existiert.

München, 25. Juli 1906.