Grundzüge einer Theorie der Riemannschen Funktionenpaare.

Von

Robert König in Tübingen.

Einleitung.

In einem systematischen Aufbau der *Riemannschen Funktionentheorie* treten neben die *rationalen Funktionen* und deren Integrale zunächst die *multiplikativen Funktionen* *) und deren Integrale und dann die *Riemannschen Funktionenpaare* mit ihren Integralen (§ 1). Als Spezialfall enthalten sie die beiden erstgenannten Kategorien von Funktionen. Ihre Existenz sehen wir durch das „Riemannsche Problem" verbürgt an**), es handelt sich um eine Erforschung ihrer Eigenschaften.

In einem I. vorbereitenden Abschnitt wird nächst der *Definition* der Begriff der *reduzierten Exponenten*, der fundamentale Unterschied zwischen *Exponenten* 1. *und* 2. *Art* aufgestellt, sowie nach dem Vorgang *Riemanns* eine *Klasseneinteilung* für die Funktionenpaare gemacht, wobei sich sämtliche Klassen zu Paaren, bestehend aus zwei zueinander *komplementären Klassen* zusammenordnen.

Im II. Abschnitt werden die Funktionen- und Differentialpaare einer Klasse untersucht. Erstere haben die Eigenschaft: 1. daß mit zwei Paaren auch ihre Summe in der Klasse vorkommt; 2. daß das Produkt eines Paares mit einer beliebigen rationalen Funktion ebenfalls vorkommt; 3. daß die Ableitung nach der unabhängigen Variablen gleichfalls der

---

*) Dieselben sind als einfachster Spezialfall ($p = 0$) enthalten in meiner Arbeit: „Arithmetische Theorie der verzweigten multiplikativen Funktionen", Crelles Journal, Bd. 146, S. 161—184.

**) S. J. Plemelj, „Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe", Monatshefte f. Math. u. Phys. Wien, 19. Jahrg. S. 211—245. Vgl. auch L. Schlesinger, Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig 1909, S. 56ff. und O. Haupt, Zur Theorie der Prymschen Funktionen 1. und *N*. Ordnung, Math. Ann. 77 (1916), S. 24ff.

Klasse angehört, was wir zusammen die „*Klasseneigenschaft*" nennen. In speziellen Fällen, z. B. im allgebraischen Fall (§ 17), kann neben Summe und Differenz auch Produkt und Quotient zweier Paare wieder der Klasse angehören, also „*Körpereigenschaft*" statthaben.*) Es zeigt sich nun, daß die meisten Sätze in der Lehre von den algebraischen Funktionen nicht auf ihrer Körpereigenschaft, sondern schon auf ihrer Klasseneigenschaft beruhen. Und es bildet *den Zielpunkt dieses Abschnittes, für eine beliebige Klasse das zu erreichen, was für die Klasse der hyperelliptischen Funktionen bekannt ist und zwar so, daß dieser Spezialfall wirklich genau umfaßt wird.*

Es handelt sich zunächst um die wirkliche Herstellung einer Basis für die Funktionenpaare der ganzen Klasse, für ein Ideal innerhalb derselben und schließlich für die Multipla eines Divisorenpaares. Hierbei ist es eine wesentliche Aufgabe, zu definieren, wann ein *Funktionenpaar Multiplum eines Divisorenpaares* heißt (§ 7). Als Folgerung ergibt sich ein **Theorem I über die Determinante der Basis eines Ideals** — die Verallgemeinerung des *Kroneckerschen* Diskriminantensatzes — die wichtige Gleichung (12), sowie Aufschluß über das Vorhandensein von Exponenten (§ 9). Wir gelangen zur Einführung des Begriffes: **Geschlecht der Klasse** als genaue Verallgemeinerung der Geschlechtszahl p im algebraischen Fall und erkennen damit, welche Rolle die Zahl p als Klasseninvariante spielt. Die Durchführung der zu Beginn des Absatzes genannten Aufgabe für die komplementäre Klasse — wobei auf die Festsetzung (15) zu achten ist — führt zu dem grundlegenden **Theorem II,** worin die *Verallgemeinerung des Verzweigungsteilers* bei den hyperelliptischen Funktionen auftritt.

Alles bisher über die Funktionenpaare Gesagte gilt — mutatis mutandis — auch für ihre Integrale oder die zugehörigen *Differentialpaare,* welche die *Verallgemeinerung der Abelschen Differentiale* darstellen. Auch für sie können wir jetzt eine Basis herstellen und zwar der Reihe nach für die Differentialpaare der ganzen Klasse, für ein Ideal und weiter für die Multipla eines beliebigen Divisorenpaares innerhalb der Klasse, z. B. als speziellsten Fall eine Basis für die „überall endlichen" Differentiale. Hierbei war es wieder eine wesentliche Aufgabe, in zweckmäßiger Weise zu definieren, wann ein *Differentialpaar Multiplum eines Divisorenpaares* heißen soll (S. 82).

Die Gegenüberstellung von Funktionen- und Differentialpaaren führt zu dem **Theorem III,** welches die **Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes** darstellt, sowie zu **drei weiteren eleganten Reziprozitätstheoremen** (§ 15); das erste gibt eine Beziehung zwischen den

*) Wozu Eigenschaft 3. tritt.

Geschlechtern, das zweite zwischen den Funktionen und das dritte zwischen den Differentialen zweier zueinander komplementären Klassen. Das letzte kann als *die Verallgemeinerung des Brill-Noetherschen Reziprozitätssatzes* angesehen werden.

Im III. Abschnitt wird schließlich gezeigt, wie die gewöhnliche Theorie der algebraischen (hyperelliptischen) Funktionen und Differentiale wirklich als Spezialfall unserer allgemeinen Theorie herauskommt. Hierbei sind noch die Sätze in § 17. § 18 wesentlich.

Was die Literatur anbetrifft, so wurde der Gegenstand zuerst und in sehr allgemeiner Weise von E. Ritter*) in Angriff genommen. Stellen wir uns auf unser Gebiet (d. h. $p = 0$, $n = 2$), so betrachtet Ritter statt Funktionen „Formen" verschiedener „Grade" ($\delta \neq 0$). Dagegen ist es unbedingt nötig, — und wenn man nur die einfachsten Spezialfälle: die Paare rationaler oder multiplikativer Funktionen oder den hyperelliptischen Fall einordnen will — eine exakte Definition des Multiplums 1. Art für Funktionen und Differentiale aufzustellen und zwar in so allgemeiner Weise, wie wir es getan haben. Das fehlt noch bei Ritter und äußert sich z. B. am Riemann-Rochschen Satz, der — auf das vorliegende Gebiet übertragen — erst durch wiederholte Spezialisierung aus unserm Theorem hervorgeht und insbesondere für die Klasse der hyperelliptischen Funktionen nicht das gewöhnliche Riemann-Rochsche Theorem umfassen würde.

Für den algebraischen Fall vergleiche man das Werk von Hensel-Landsberg (Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, Leipzig 1902), dessen Methoden und Bezeichnungen wir uns bedienen.

*) Über Riemannsche Formenscharen auf einem beliebigen algebraischen Gebilde. Math. Ann. 47 (1895), S. 157—221.