# Beitrag zur Theorie der Modulgruppe.

Von **Wladimir Lewicki** in Tarnopol.

1. Wie bekannt, haben die Transformationen der Modulgruppe eine zweifache Gestalt: [1])

$$(1) \qquad Uz = TS^{a_n}\, TS^{a_{n-1}}\, T \ldots TS^{a_1} z$$

oder:

$$(2) \qquad Uz = S^{a_n}\, TS^{a_{n-1}}\, T \ldots TS^{a_1} z$$

wo die Transformationen:

$$Sz = z + 1, \quad Tz = -\frac{1}{z} \qquad (z = x + iy)$$

F u n d a m e n t a l t r a n s f o r m a t i o n e n sind.

Wie es evident ist, kann man diese Transformationen als Kettenbrüche folgender Form darstellen:

$$(1') \qquad Uz = -\cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n-2} - \ddots - \cfrac{1}{a_1 + z}}}$$

und

$$(2') \qquad Uz = a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \ddots - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_1 + z}}}}.$$

2. Wir werden eben trachten von all diesen Transformationen folgenden Typus:

$$Uz = -\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \ddots - \cfrac{1}{a + z}}}} = -\varphi_n(z),$$

wo $a$ $n$-mal vorkommt, d. i.

[1]) Vgl. Klein-Fricke: Elliptische Modulfunctionen Bd. I.; vid. auch meine Abhandlung: „Einleitung zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen.“ Prace mat. fiz. Bd. VIII. Warschau.

$$-\varphi_n(z) = TS^a\, TS^a \ldots TS^a\, z,$$

in eine möglichst kurze, symmetrische Form, die leicht zu berechnen wäre, zu bringen.

Um das zu erzielen, wählen wir einen folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{\varphi_n\,\varphi_{n-1}\,\varphi_{n-2}\cdots\varphi_1} = F_n(z); \tag{3}$$

nun ist es aber:

$$\varphi_{n+1}(z) = \frac{1}{a - \varphi_n(z)},$$

also:

$$a\,\varphi_{n+1} - \varphi_{n+1}\,\varphi_n = 1$$

und da:

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}\,\varphi_n\cdots\varphi_2} = F_{n+1}(z),$$

so gelangen wir leicht zur folgenden Relation:

$$a\,F_n(z) - F_{n-1}(z) = F_{n+1}(z). \tag{4}$$

Um die Form der Function $F_n(z)$ sicher zu stellen, legen wir

$$F_n(z) = C\,\alpha^n\,\psi(z), \tag{5}$$

wo $C, \alpha, \psi$ vollkommen unbekannte Größen sind.[1] — Da weiter die Gestalt der Functionen $F_{n-1}, F_{n-2}, \ldots$ nur von der Gliederanzahl der Functionen $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \ldots$ abhängt, so ist es klar, dass auch analog

$$\begin{aligned} F_{n-1}(z) &= C\,\alpha^{n-1}\,\psi(z) \\ F_{n+1}(z) &= C\,\alpha^{n+1}\,\psi(z) \end{aligned} \tag{6}$$

sein müssen.

Die Relation (4) muss auf Grund von (5) und (6) in folgende Relation übergehen:

$$a\,\alpha - 1 = \alpha^2$$

oder:

$$\alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Da nun dieser Ausdruck einen doppelten Wert besitzt (den Fall $a = 2$ werden wir später behandeln), so können wir im allgemeinen die Function $F_n(z)$ in folgender Form niederschreiben:

---

[1]) Diese Annahme, die eigentlich a priori gemacht wurde, kann man durch Entwicklung des Productes $F_n(z)$ begründen; das aber will ich hier übergehen.

$$(7)\quad F_n(z) = C\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n \psi(z) + C'\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n \psi(z).$$

Jetzt müssen wir Größen $C$, $C'$, wie auch $\psi$ berechnen.
Für $n=1$ ist

$$F_1(z) = \frac{1}{\varphi_1} = a+z,$$

oder auf Grund von (7):

$$(8)\quad a+z = \frac{a}{2}\psi(C+C') + \frac{\psi}{2}\sqrt{a^2-4}\,(C-C').$$

Für $n=2$ ist:

$$F_2(z) = \frac{1}{\varphi_2\cdot\varphi_1} = a(a+z)-1,$$

oder auf Grund von (7):

$$(9)\quad a(a+z)-1 = \psi\left(\frac{a^2}{2}-1\right)(C+C') + \frac{a}{2}\sqrt{a^2-4}\,\psi\,(C-C').$$

Aus den Gleichungen (8) und (9) bekommen wir sehr leicht:

$$C+C' = \frac{1}{\psi(z)}$$

$$C-C' = \frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\,\frac{1}{\psi(z)}$$

und

$$(10)\quad \begin{cases} C = \dfrac{1}{2\psi(z)}\left(1+\dfrac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right) \\ C' = \dfrac{1}{2\psi(z)}\left(1-\dfrac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right) \end{cases}.$$

Die Function $F_n(z)$ hat nun die Gestalt:

$$(11)\quad \begin{aligned} F_n(z) = {} & \frac{1}{2}\left(1+\frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n + \\ & + \frac{1}{2}\left(1-\frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Da aber

$$\varphi_n(z) = \frac{F_{n-1}(z)}{F_n(z)},$$

so ist es jetzt

$$(12)\quad \varphi_n(z) = 2\,\frac{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n-1} + (\sqrt{a^2-4}-a-2z)\,(a-\sqrt{a^2-4})^{n-1}}{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n} + (\sqrt{a^2-4}-a-2z)\,(a-\sqrt{a^2-4})^{n}}.$$

Diese Formel erlaubt uns also sehr leicht die Transformation:

$$Uz = -\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \ddots - \cfrac{1}{a+z}}} = TS^a\, TS^a \ldots TS^a z$$

zu berechnen. Sie gibt uns auch die Möglichkeit, Kettenbrüche von oberer Form direct und ohne Anwendung der Näherungswerte zu berechnen.

Für $a = 2$ gibt sie uns aber $\varphi_n(z) = \frac{0}{0}$, d. i. eine totale Unbestimmtheit, in dem Falle ist sie also außer Gebrauch; den Fall werden wir weiter allein für sich behandeln.

3. Ganz analog kann man auch die andere Transformation:

$$Uz = S^a\, T S^a \ldots T S^a z = a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \ddots - \cfrac{1}{a+z}}} = a - \varphi_{n-1}(z)$$

in folgende Form bringen:

$$Uz = \tag{13}$$
$$= \frac{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n-2}(a^2+a\sqrt{a^2-4}-2)+(\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n-2}(a^2-a\sqrt{a^2-4}-2)}{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n-1}+(\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n-1}}.$$

4. Jetzt trachten wir die Giltigkeit der oberen Form an Beispielen zu erproben.

Nehmen wir zum Beispiel

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1+z}}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1+z}{z}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z}{z-1-z}} = \frac{1}{1+z}.$$

Und nun auf Grund der Formel (12) ($n = 4$) kommen wir, wie es leicht zu constatieren ist, zum selben Resultat:

$$2\frac{(\sqrt{-3}+1+2z)(1+\sqrt{-3})^3+(\sqrt{-3}-1-2z)(1-\sqrt{-3})^3}{(\sqrt{-3}+1+2z)(1+\sqrt{-3})^4+(\sqrt{-3}-1-2z)(1-\sqrt{-3})^4} =$$
$$= \frac{-32\sqrt{-3}}{-32\sqrt{-3}(1+z)} = \frac{1}{1+z}.$$

Zum Beispiel

$$\cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3+z}} = \frac{3+z}{8+3z}$$

und auf Grund der Formel (12)

$$2\,\frac{(\sqrt{5}+3+2z)(3+\sqrt{5})+(\sqrt{5}-3-2z)(3-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+3+2z)(3+\sqrt{5})^2+(\sqrt{5}-3-2z)(3-\sqrt{5})^2}=$$
$$=\frac{8\sqrt{5}(3+z)}{8\sqrt{5}(8+3z)}=\frac{3+z}{8+3z},$$

dasselbe Resultat wie oben; zum Beispiel

$$\frac{1}{4-\cfrac{1}{4+z}}=\frac{4+z}{15+4z}$$

und auf Grund der Formel (12) bekommen wir:

$$\frac{8\sqrt{12}(4+z)}{8\sqrt{12}(15+4z)}=\frac{4+z}{15+4z}$$

und desgleichen.

5. Für $\lim n=\infty$ d. i. bei unendlich vielfacher Iteration bekommen wir den folgenden Wert dieser Iterationen (beziehungsweise der Kettenbrüche):

$$\lim_{n=\infty}\varphi_n(z)=2,$$

und die zweite Transformation:

$$\lim_{n=\infty} Uz=a-2$$

d. h.: Jede Modultransformation, die aus unendlich vielen Iterationen der Fundamentaltransformationen $S^a z$ und $Tz$ zusammengestellt ist, bringt jeden Punkt der positiven Halbebene in die unendlich nahe Umgebung des Punktes $-2$ (also auf der negativen Halbhauptachse), wenn ihre letzte Iteration $T$, oder in die unendlich nahe Umgebung des Punktes $a-2$ $(a \gtrless 2)$, wenn ihre letzte Iteration $S^a$ ist. In diesen Punkten verliert also die Modulgruppe ihre Discontinuität; da aber $a$ eine jede reelle Zahl (2 ausgenommen) sein kann, so sehen wir, dass die Modulgruppe auf der ganzen reellen Achse (Punkt 2 ausgenommen) discontinuierlich ist, eine Thatsache, die in der Theorie der Modulgruppe bekannt ist.

6. Es bleibt uns noch der Fall $a=2$ zu erübrigen. In dem Fall ist, wie es vollkommen klar:

$$F_1(z)=2+z$$
$$F_2(z)=2(2+z)-1.$$

Nun haben wir auf Grund der Relation (4):

$$(14)\qquad \begin{cases} 2F_{n-1} - F_{n-2} = F_n \\ 2F_{n-2} - F_{n-3} = F_{n-1} \\ 2F_{n-3} - F_{n-4} = F_{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2F_2 \quad - F_1 \quad = F_3 . \end{cases}$$

Indem wir alle diese Gleichungen (die erste ausgenommen) mit 2 multiplicieren und addieren, so bekommen wir folgende Gleichung:

$$F_{n-2} + 2F_2 - 2F_1 = F_n .$$

Da aber

$$2(F_2 - F_1) = 1\,(2+z),$$

so haben wir

$$F_{n-2} + 2\,(1+z) = F_n,$$

oder da

$$F_n = 2F_{n-1} - F_{n-2},$$

$$\text{Analog:}\qquad (15)\qquad \begin{cases} F_{n-2} + (1+z) = F_{n-1} . \\ \\ F_{n-3} + (1+z) = F_{n-2} \\ F_{n-4} + (1+z) = F_{n-3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_2 \quad + (1+z) = F_3 \end{cases}$$

Addieren wir die Gleichungen (15), so bekommen wir

$$F_2 + (n-3)(1+z) = F_{n-1},$$

oder im allgemeinen:

$$F_2 + (n-2)(1+z) = F_n .$$

Da aber

$$F_2 = 2\,(2+z) - 1$$

ist, so ist

$$(16)\qquad F_n = 2\,(2+z) - 1 + (n-2)(1+z) .$$

Es ist also

$$(17)\qquad \varphi_n = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \dots - \cfrac{1}{2+z}}} = \frac{2(2+z) - 1 + (n-3)(1+z)}{2(2+z) - 1 + (n-2)(1+z)} = \frac{(n-1)z + n}{nz + (n-1)} =$$

$$= -\,TS^2\,TS^2 \dots TS^2 z .$$

Und analog ist

$$(18)\qquad S^2TS^2 \dots TS^2 z = 2 - \varphi_{n-1} = \frac{2(2+z) - 1 + (n-1)(1+z)}{2(2+z) - 1 + (n-2)(1+z)} .$$

Zum Beispiel:

$$\frac{1}{2-\frac{1}{2+z}}=\frac{2+z}{3+2z},$$

und aus der Formel (17) folgt für $n=2$

$$\frac{2(2+z)-1-(1+z)}{2(2+z)-1}=\frac{2+z}{3+2z}.$$

Z. B.

$$\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2+z}}}=\frac{3+2z}{4+3z}$$

und dasselbe folgt aus der Formel (17)

$$\frac{2(2+z)-1}{2(2+z)-1+1+z}=\frac{3+2z}{4+3z}.$$

Z. B.

$$\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2+z}}}}=\frac{4+3z}{5+4z},$$

und aus der Formel (17)

$$\frac{2(2+z)-1+1+z}{2(2+z)-1+2+2z}=\frac{4+3z}{5+4z}.$$

7. Für $n=\infty$ haben wir

$$\lim_{n=\infty}\varphi_n=1$$

$$\lim_{n=\infty}(2-\varphi_{n-1})=1,$$

d. h. jede Modultransformation, die aus unendlich vielen Iterationen $S^2 z$ und $Tz$ zusammengesetzt ist, bringt **jeden** Punkt der positiven Halbebene in die unendlich nahe Umgebung des Punktes $-1$ beziehungsweise $+1$ (je nachdem die letzte Iteration $T$ oder $S^2$ ist). Die Modulrgruppe verliert also auch in dem Falle $(a=2)$ ihre Discontinuität.