

**IX. Ueber das Verhältniss der Cauchy'schen  
Theorie der Metallreflexion zu der Voigt'schen;  
von P. Drude.**

---

Es ist schon oft bemerkt, dass die Anwendung der Cauchy'schen und Voigt'schen Formeln für Metallreflexion zu den gleichen Resultaten führt. Es muss dies deshalb auffallend erscheinen, weil die beiden Theorien zu Grunde liegenden Annahmen durchaus verschiedene sind. Eine nähere Untersuchung über ihr gegenseitiges Verhältniss zeigt nun Folgendes:

Die allgemeinsten Voigt'schen Formeln<sup>1)</sup> für Metallreflexion stimmen nicht mit den Cauchy'schen überein. Für eine gewisse, in den Anwendungen stets gebrauchte und sich als zulässig erwiesene Specialisirung<sup>2)</sup> der Voigt'schen Formeln gehen dieselben analytisch identisch in die Cauchy'schen über. Macht man noch von einer weiteren Näherung<sup>3)</sup> Gebrauch, so erhält man angenäherte Cauchy'sche Formeln, wie sie Hr. Quincke<sup>4)</sup> für die relative Verzögerung und das relative Amplitudenverhältniss des senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Lichtes zu dem in derselben polarisirten gegeben hat.

Ich möchte zunächst zeigen, wie die Identität der Formeln beider Theorien schon aus den Annahmen, durch welche den Cauchy'schen Grenzbedingungen<sup>5)</sup> genügt wird, folgt.

Eine Begründung der Cauchy'schen Formeln ist von Beer<sup>6)</sup> und Eisenlohr<sup>7)</sup> gegeben. Da letzterer aber von vornherein speciellere Annahmen über die Amplituden der longitudinalen Wellen macht, welche nicht näher begründet werden, so habe ich mich in der Bezeichnungsweise mehr

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **23**. p. 104. 1884.

2) W. Voigt, l. c. p. 120.

3) P. Drude, Gött. Nachr. **11**. p. 284. 1888.

4) G. Quincke, Pogg. Ann. **128**. p. 551. 1866.

5) A. Cauchy, Compt. rend. **8**. p. 969. 1839.

6) A. Beer, Pogg. Ann. **92**. p. 402. 1854.

7) F. Eisenlohr, Pogg. Ann. **104**. p. 346. 1858.

an Beer angeschlossen, dabei aber complexe Grössen benutzt, da sie die Rechnung erheblich abkürzen und übersichtlicher gestalten.

Es soll vorausgesetzt werden, dass das Medium 0 durchsichtig und isotrop, das Medium 1 absorbirend und isotrop sei. Beide Medien sollen in einer Ebene, der  $xy$ -Ebene, aneinander grenzen, die  $z$ -Axe, d. h. die Normale der Begrenzungsfläche soll positiv nach dem Medium 1 zu gerechnet werden; die  $xz$ -Ebene sei die Einfallsebene. Es mögen im Medium 0 ebene Wellen nach der Grenze hin einfallen. Die Elongationen der Aethertheilchen aus der Ruhelage mögen sein:

in der einfallenden Welle  $u_e, v_e, w_e$ ,

in der reflectirten Welle  $u_r, v_r, w_r$ ,

in der gebrochenen Welle  $u_1, v_1, w_1$ .

Um den Cauchy'schen Grenzbedingungen zu genügen, muss man noch sogenannte longitudinale Wellen, d. h. Wellen, für die nicht die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

besteht, einführen, sie mögen bezeichnet werden:

als reflectirte Welle mit  $u_r, v_r, w_r$ ,

als gebrochene Welle mit  $u_1, v_1, w_1$ .

Es soll zunächst der Fall betrachtet werden, dass die Schwingungen parallel der Einfallsebene stattfinden. Dann ist  $v = 0$  zu setzen. Bezeichnet man den reellen Theil einer complexen Grösse  $A$  mit  $[A]$ , so kann man setzen:

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} u_e = \left[ \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} E_p e^{\frac{i}{\tau}(t - (\alpha x + \gamma z))} \right], & u_r = \left[ \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} E_p e^{\frac{i}{\tau}(t - (\alpha x + \gamma z))} \right], \\ u_r = \left[ \frac{-\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} R_p e^{\frac{i}{\tau}(t - (\alpha x - \gamma z))} \right], & w_r = \left[ \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} R_p e^{\frac{i}{\tau}(t - (\alpha x - \gamma z))} \right], \\ u_r = \left[ -i\chi e^{\frac{i}{\tau}(t - (\alpha x + i c z))} \right], & w_r = \left[ \delta e^{\frac{i}{\tau}(t - (\alpha x + i c z))} \right], \\ u_1 = \left[ D_p e^{\frac{i}{\tau}(t - (\alpha x + \gamma_1 z))} \right], & w_1 = \left[ D'_p e^{\frac{i}{\tau}(t - (\alpha x + \gamma_1 z))} \right], \\ u_1 = \left[ -i\chi' e^{\frac{i}{\tau}(t - (\alpha x - i c' z))} \right], & w_1 = \left[ \delta' e^{\frac{i}{\tau}(t - (\alpha x - i c' z))} \right]. \end{array} \right.$$

Dabei bedeutet  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\tau = 2\pi/T$ , wo  $T$  die Schwingungsdauer bezeichnet;  $t, \alpha, \gamma, c, c'$  sind reelle Grössen,  $E_p, R_p, D_p, D'_p, \gamma_1, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}, \mathfrak{z}'$  sind complexe Grössen. Die Ausdrücke für die longitudinalen Wellen sind nach Beer <sup>1)</sup> gebildet, nur mit dem Unterschiede, dass  $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}, \mathfrak{z}'$  hier complex angenommen sind, während sie bei Beer reell sind. Es wird sich aber zeigen, dass die hier getroffene Verfügung, falls man keine weitere Annahme über  $E_p$  macht, nothwendig ist, um den Grenzgleichungen zu genügen. Es ist  $E_p$  auch als complex angenommen, d. h. es soll elliptisch polarisirtes Licht einfallen.

Werden die Werthe, welche  $u, w$ , resp.  $\partial u/\partial x, \partial u/\partial z, \partial w/\partial x, \dots$  an der Grenzfläche  $z=0$  annehmen, durch  $\bar{u}, \bar{w}, \partial \bar{u}/\partial x$  etc. bezeichnet, so sind die Cauchy'schen Grenzbedingungen folgende:

$$(2) \left\{ \begin{array}{ll} \bar{u}_e + \bar{u}_r + \bar{u}_t = \bar{u}_1 + \bar{u}_1, & \bar{w}_e + \bar{w}_r + \bar{w}_t = \bar{w}_1 + \bar{w}_1, \\ \frac{\partial (\bar{u}_e + \bar{u}_r + \bar{u}_t)}{\partial z} = \frac{\partial (\bar{u}_1 + \bar{u}_1)}{\partial z}, & \frac{\partial (\bar{w}_e + \bar{w}_r + \bar{w}_t)}{\partial z} = \frac{\partial (\bar{w}_1 + \bar{w}_1)}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Setzt man in diese Gleichungen die Werthe für  $u, w, u, w$  aus den Gleichungen (1) ein und berücksichtigt, dass die Grenzbedingungen (2) für alle Werthe der Zeit  $t$  stattfinden müssen, so folgt:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} (E_p - R_p) \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} = D_p + i(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'), \\ (E_p + R_p) \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} = D'_p - (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'), \\ (E_p + R_p) \frac{\gamma^2}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} = \gamma_1 D_p - (c\mathfrak{z} + c'\mathfrak{z}'), \\ (E_p - R_p) \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} = -\gamma_1 D'_p + i(c\mathfrak{z} + c'\mathfrak{z}'). \end{array} \right.$$

Jede dieser Gleichungen ist zweien äquivalent, da sie sowohl für die reellen, wie für die imaginären Theile bestehen müssen.

Durch Elimination von  $E_p, R_p, D_p$  gewinnt man aus (3) folgende Gleichung:

1) A. Beer, l. c. p. 405.

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & \gamma, & -i(\xi - \xi') \\ -\alpha, & 0, & \alpha, & -D_p' + \beta - \beta' \\ \gamma^2, & \gamma_1, & -\gamma^2, & c\xi + c'\xi' \\ 0, & 0, & \alpha\gamma, & \gamma_1 D_p' - i(c\beta + c'\beta') \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwicklung der Determinante gibt:

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha(c\xi + c'\xi') + \gamma^2(\beta - \beta') + i\gamma_1(\alpha(\xi - \xi') - (c\beta + c'\beta')) \\ + (\gamma_1^2 - \gamma^2) D_p' = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man die erste der Gleichungen (3) mit  $\alpha$  und subtrahirt davon die vierte, so entsteht:

$$(5) \quad \alpha D_p + \gamma_1 D_p' = i[\alpha(\xi - \xi') - (c\beta + c'\beta')],$$

subtrahirt man von der dritten die zweite, nachdem man sie mit  $\alpha$  multiplicirt hat, so entsteht:

$$(6) \quad (E_p + R_p) \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} = \gamma_1 D_p - \alpha D_p' + \alpha(\beta - \beta') - (c\xi + c'\xi').$$

Nimmt man nun an, dass zwischen den Verhältnissen der  $\xi$ ,  $\xi'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  folgende zwei Gleichungen bestehen:

$$(7) \quad \alpha(\xi - \xi') = c\beta + c'\beta', \quad c\xi + c'\xi' = \alpha(\beta - \beta'),$$

so kann man nach der Gl. (5) setzen:

$$D_p = \frac{\gamma_1}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} A_p, \quad D_p' = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} A_p.$$

Die Gl. (6) und die erste der Gleichungen (3) werden so:

$$(8) \quad \begin{cases} (E_p + R_p) \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} = A_p \sqrt{\alpha^2 + \gamma_1^2}, \\ (E_p - R_p) \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} = A_p \frac{\gamma_1}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma_1^2}} + i(\xi - \xi'). \end{cases}$$

Nach Gl. (4) muss ausserdem sein:

$$(9) \quad c\xi + c'\xi' = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \cdot \frac{\gamma_1^2 - \gamma^2}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma_1^2}} A_p.$$

Hieraus folgt, dass  $\xi$ ,  $\xi'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  complex sein müssen (cf. p. 510).

Nach Cauchy hat man nun zu setzen:

$$(10) \quad \begin{cases} \xi = \alpha \frac{K'}{K} \sigma, & \xi' = \alpha \frac{K}{K'} \sigma, \\ \beta = \sqrt{K^2 + \alpha^2} \cdot \frac{K'}{K} \sigma, & \beta' = -\sqrt{K'^2 + \alpha^2} \cdot \frac{K}{K'} \sigma, \\ c = \sqrt{K^2 + \alpha^2}, & c' = \sqrt{K'^2 + \alpha^2}. \end{cases}$$

Hier sollen  $K$ ,  $K'$  reell sein,  $\sigma$  bestimmt sich aus Gl. (9). Diese Werthe für  $\xi$ ,  $\xi'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  erfüllen in der That die Glei-

chungen (7), und es sind so die Cauchy'schen Grenzbedingungen in der Form der Gleichungen (8) gewonnen.

Hierbei sei wohl bemerkt, dass diese Form durchaus nicht durch die Bedingung erhalten ist, dass die vier Grenzbedingungen (2) miteinander verträglich sein sollen, letzteres spricht sich nur in der Gl. (4) aus, welche über die Verhältnisse der Grössen  $\varkappa, \varkappa', \beta, \beta'$  untereinander gar nichts aussagt, sondern sie nur mit  $D_p'$  oder mit  $E_p$ , d. h. der Amplitude des einfallenden Lichtes verknüpft. Man kann der Gl. (4) durch Werthe der  $\varkappa, \varkappa', \beta, \beta'$  genügen, die sehr verschiedene Formen der Grenzbedingungen hervorrufen. Um gerade die Form (8) zu gewinnen, muss man über die gegenseitigen Verhältnisse der  $\varkappa, \varkappa', \beta, \beta'$  noch die Annahmen (7) machen. Durch diese letzteren Gleichungen werden die drei gegenseitigen Verhältnisse noch nicht bestimmt, sodass die Cauchy'schen Formen (10) hieraus noch nicht mit Nothwendigkeit abgeleitet werden können. Schliesslich sei bemerkt, dass die Gleichungen (7) auch nicht aus irgend welchen Differentialgleichungen der Bewegung des Aethers hergeleitet werden können. Es können nämlich aus ihnen wohl das Verhältniss  $\varkappa:\beta = V_1$  als Function gewisser Constanten des eines Mediums, und  $\varkappa':\beta' = V_2$  als Function gewisser Constanten des anderen Mediums abgeleitet werden. Da aber diese Constanten voneinander unabhängig sind, so kann nie eine Gleichung gewonnen werden, die  $V_1$  mit  $V_2$  verbindet. Die Gleichungen (7) sprechen aber eine solche aus, denn wollte man dieselben in zwei Gleichungssysteme spalten, von denen das eine sich nur auf das erste, das andere sich nur auf das zweite Medium bezieht, d. h. in die Gleichungen:

$$\alpha\varkappa = c\beta, \quad -\alpha\varkappa' = c'\beta', \quad c\varkappa = \alpha\beta, \quad c'\varkappa' = -\alpha'\beta',$$

so würde hieraus folgen:

$$\alpha^2 = c^2 = c'^2,$$

was anderen Annahmen widerspricht.

Die Beer'sche Ableitung<sup>1)</sup> der verschwindenden Strahlen aus den Differentialgleichungen bezieht sich in der That nur auf die Extinctionscoefficienten  $c, c'$ , während für  $\varkappa$  und  $\beta$  nur

1) A. Beer, Pogg. Ann. 92. p. 522. 1854.

die eine Relation  $c\gamma = \alpha\beta$  gewonnen wird<sup>1)</sup>, mit Hülfe deren man die Gleichungen (7) noch nicht herleiten kann.

Ich wende mich nun zu dem Falle, dass die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene stattfinden. Hier sind die Verhältnisse einfacher, da keine longitudinalen Strahlen eingeführt werden können und auch nicht nothwendig sind, um die Grenzbedingungen miteinander verträglich zu machen. Setzt man:

$$v_e = \left[ E_s e^{\frac{i}{\tau} (t - (\alpha x + \gamma z))} \right], \quad v_r = \left[ R_s e^{\frac{i}{\tau} (t - (\alpha x - \gamma z))} \right],$$

$$v_1 = \left[ A_s e^{\frac{i}{\tau} (t - (\alpha x + \gamma_1 z))} \right],$$

so erhält man durch die Grenzbedingungen:

$$\overline{v_e} + \overline{v_r} = \overline{v_1}, \quad \frac{\partial (\overline{v_e} + \overline{v_r})}{\partial z} = \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial z}$$

die Gleichungen:

$$E_s + R_s = A_s, \quad \gamma(E_s - R_s) = \gamma_1 A_s.$$

Aus diesen und den Gleichungen (8) können die allgemeinen Cauchy'schen Gleichungen für Metallreflexion abgeleitet werden. Sie enthalten auch als speciellen Fall den in sich, dass das Medium 1 durchsichtig sei; dann wird  $\gamma_1$  reell, aus den letzten Formeln folgt, dass bei reellem  $E_s$ , d. h. linear polarisirtem einfallenden Lichte  $R_s$  und  $A$  reell werden, d. h. für diese Componenten keine Verzögerung eintritt, dass dies aber der Fall ist bei den Componenten  $R_p$  und  $A_p$ , da diese nach Formel (8) bei reellem  $E_p$  complex werden. Es gibt dies bekanntlich die Cauchy'sche Erklärung der elliptischen Polarisation, wie sie von Jamin bei Reflexion an durchsichtigen Medien entdeckt ist.

Die Grösse der in diesem Falle gültigen Ellipticität hängt von der Grösse von  $\gamma - \gamma'$  ab, wie Formel (8) lehrt. Cauchy macht nun die Annahme, dass bei Metallen die hierher rührende Verzögerung unmerklich ist gegen die durch die Absorption des Metalles hervorgerufene. Er setzt deshalb:

$$K = K',$$

dann wird in der That:  $\gamma = \gamma'$ .

1) A. Beer, l. c. p. 528.

Es ist wohl zu beachten, dass diese letzte Bedingung keineswegs mit der Annahme identisch ist, dass die sogenannten Extinctionscoëfficienten  $c, c'$  der longitudinalen Strahlen sehr gross seien. Sind sie beide unendlich gross, so muss man noch die Annahme  $c:c' = -1$  machen, um den Einfluss dieser Strahlen auf die Verhältnisse der Amplituden  $E_p, D_p, R_p$  zu vernichten.

Macht man diese Annahme, so gelten also nach Cauchy folgende Formeln:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (E_p + R_p) \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} = A_p \sqrt{\alpha^2 + \gamma_1^2}, \\ (E_p - R_p) \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} = A_p \frac{\gamma_1}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma_1^2}}, \\ E_s + R_s = A_s, \quad (E_s - R_s) \gamma = A_s \gamma_1. \end{array} \right.$$

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich die Voigt'schen Grenzbedingungen in complexer Form entwickelt. In den dort angewandten Bezeichnungen ist für isotrope absorbirende Mittel zu setzen:

$$A_1^o = \frac{E_p}{D_o}, \quad A_2^e = \frac{E_s}{D_s}, \quad \frac{A_1^o}{A_3^o} = \frac{E_p}{R_p}, \quad \frac{A_2^e}{A_4^e} = \frac{E_s}{R_s},$$

$$\sin \varphi = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \pi^2}}, \quad \sin \chi = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \pi_1^2}}, \quad \alpha = \frac{\mu^2 + \pi^2}{\mu^2 + \pi_1^2}.$$

Die dortige Formel (51) ergibt daher:

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{l} E_s + R_s = D_s, \quad (E_s - R_s) \pi = D_s \pi_1 \frac{\mu^2 + \pi^2}{\mu^2 + \pi_1^2}, \\ (E_p + R_p) \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \pi^2}} = D_p \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \pi_1^2}}, \\ (E_p - R_p) \frac{\pi}{\sqrt{\mu^2 + \pi^2}} = D_p \frac{\pi_1}{\sqrt{\mu^2 + \pi_1^2}}. \end{array} \right.$$

Das Formelsystem (11) geht nun identisch in das Formelsystem (11') über, wenn in (11) an Stelle der Grössen:

$$E_s, R_s, A_s, E_p, R_p, A_p, \alpha, \gamma, \gamma_1$$

resp. gesetzt wird:

$$E_p, R_p, D_p \frac{\sqrt{\mu^2 + \pi^2}}{\sqrt{\mu^2 + \pi_1^2}}, \quad E_s, R_s, D_s \frac{\sqrt{\mu^2 + \pi^2}}{\sqrt{\mu^2 + \pi_1^2}}, \quad \mu, \pi, \pi_1.$$

1) P. Drude, Wied. Ann. 32. p. 613. 1887. Formel 51.

Die Vertauschung der Indices  $s$  und  $p$  hat hier dieselbe Bedeutung, wie sie bei durchsichtigen Mitteln die Verknüpfung der Fresnel'schen mit der Neumann'schen Lichttheorie ergibt. Das Auftreten des Factors  $\sqrt{\mu^2 + \pi^2} / \sqrt{\mu^2 + \pi_1^2}$  bei  $D_p$  und  $D_s$  bedeutet, dass das Maass der Lichtintensität in dem Medium 1, d. h. der Factor, mit dem das Quadrat der Amplitude multiplicirt werden muss, um die Intensität zu erhalten, nach beiden Theorien ein verschiedenes ist. Es erklärt sich dies für durchsichtige Mittel bekanntlich durch die verschiedenen Annahmen Fresnel's und Neumann's hinsichtlich Elasticität und Dichtigkeit des Aethers. Dieser Factor hat übrigens auf die in praxi wohl fast nur vorkommenden Probleme, wo die von einem beliebigen Medium reflectirte oder durch ein solches hindurchgegangene Lichtintensität als Function der ursprünglich einfallenden Intensität zu bestimmen ist, keinen Einfluss.

Zum Nachweis der Identität der Formeln (11) und (11') ist nur noch nöthig zu zeigen, dass  $\gamma_1$  dieselbe Function von  $\alpha$  und  $\gamma$  ist, wie  $\pi_1$  von  $\mu$  und  $\pi$ .

Um uns an die Beer'sche Bezeichnungsweise anzulehnen, ist zu setzen:

$$\alpha = \frac{\sin \varphi}{\omega} = \frac{\sin r}{\omega_1},$$

$$\gamma = \frac{\cos \varphi}{\omega}, \quad \gamma_1 = \frac{\cos r}{\omega_1} - i \frac{d\lambda_1}{2\pi \omega_1}.$$

Hier bedeutet  $\varphi$  den Einfallswinkel,  $r$  den Brechungswinkel;  $\omega, \omega_1$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Setzt man:

$$\frac{\omega}{\omega_1} = v, \quad \frac{d\lambda}{2\pi} = \frac{d\lambda_1}{2\pi} v = \sigma,$$

so bezeichnet  $v$  den Brechungsindex,  $\sigma$  den Absorptionscoefficienten. Dieselben sind vom Einfallswinkel  $\varphi$  abhängig. Bezeichnen  $n$  und  $s$  die Werthe derselben für  $\varphi = 0$ , so setzt Cauchy:

$$(12) \quad v^2 - \sigma^2 = n^2 - s^2, \quad v\sigma \cos r = ns.$$

$n$  entspricht dem Voigt'schen Brechungsindex  $n$ , während  $s$  dem Absorptionscoefficienten  $n\kappa$  der Voigt'schen Theorie entspricht. Denn dort<sup>1)</sup> ist der Exponent von  $e$ :

1) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 109. 1884.



$\frac{-zz}{\tau\omega_1} = \frac{-2\pi\kappa}{\lambda_1} z$ , während er nach Cauchy ist:  $-dz = \frac{-2\pi s}{\lambda_1 n} z$ .<sup>1)</sup>

Multiplirt man die zweite der Gleichungen (12) mit  $2i$  und subtrahirt sie von der ersten, so erhält man die Gleichung:

$$\nu^2 \sin^2 r + \nu^2 \left( \cos r - \frac{i\sigma}{\nu} \right)^2 = (n - is)^2,$$

oder, da  $\nu = \omega : \omega_1$  ist:

$$(13) \quad \frac{\sin^2 r}{\omega_1^2} + \left( \frac{\cos r}{\omega_1} - i \frac{d\lambda_1}{2\pi\omega_1} \right)^2 = \alpha^2 + \gamma_1^2 = C,$$

wo  $C$  eine vom Einfallswinkel unabhängige complexe Grösse ist. Ganz dieselbe Gleichung, wie hier für  $\alpha$  und  $\gamma_1$ , besteht nun nach der Voigt'schen Theorie für  $\mu$  und  $\pi_1$ <sup>2)</sup>, sodass die Identität der sich aus beiden Theorien ergebenden Formeln erwiesen ist.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass die specielle Form von  $\nu$  und  $\sigma$  von der Gl. (13) aus gewonnen ist. Da bei absorbirenden Medien in den Amplituden der Aethertheilchen Exponentialfunctionen mit reellen Exponenten als Factoren auftreten müssen, so kann man dies aus den Differentialgleichungen der Bewegung der Aethertheilchen dadurch herleiten, dass man den Brechungsindex, d. h. die in den Differentialgleichungen auftretenden Coëfficienten complex annimmt. Man erhält dann die Gl. (13). Diesen Weg schlagen auch Eisenlohr<sup>3)</sup> und Beer<sup>4)</sup> bei der Herleitung der Cauchy'schen Formeln ein.

Ebenso sind vielleicht die speciellen Formen für die

1) Es ergibt sich hieraus, dass die das Metall charakterisirende Absorptionconstante  $s/n$  und nicht  $s$  ist.  $s$  muss also kleiner werden, wenn es berechnet wird aus der Reflexion in einer Substanz von grösseren Brechungsexponenten. Daher trifft die Bemerkung Hrn. Wüllner's (Exper. Phys. 2. p. 556. IV. Aufl. 1883), dass die Quincke'schen Beobachtungen in Wasser, Terpentinöl etc. nicht mit der Theorie stimmten, für  $\kappa_0$  wenigstens ( $\kappa_0$  entspricht hier  $s$ ) nicht zu. Berechnet man  $\kappa_0 : n_0$ , wo  $n_0$  der Brechungsexponent der Flüssigkeit ist, so erhält man Werthe, die nahezu mit den Quincke'schen Beobachtungen übereinstimmen.

2) P. Drude, l. c. p. 613. Formel 50.

3) F. Eisenlohr, Pogg. Ann. 104. p. 369. 1858.

4) A. Beer, Pogg. Ann. 92. p. 402. 1854.

Amplituden der longitudinalen Wellen, die, wie wir sahen (cf. p. 512), weder aus den Differentialgleichungen der Bewegung, noch aus den Grenzbedingungen herzuleiten sind, von Cauchy deshalb gewählt, um direct die Fresnel'schen Gleichungen nur mit darin auftretenden complexen Grössen zu erhalten.

Nimmt man diese Entstehung der Cauchy'schen Formeln an, so ist der Weg gerade umgekehrt zu dem, den die Voigt'sche Theorie gegangen ist.

Hr. Voigt<sup>1)</sup> stellt zunächst nach Principien der Mechanik die Differentialgleichungen der Bewegung auf und die Grenzbedingungen. Erst nachträglich<sup>2)</sup> hat sich gezeigt, dass durch eine gewisse, sich bis jetzt als gültig erwiesene Specialisirung die Neumann'schen für durchsichtige Medien gültigen Formeln in derselben Form auch auf absorbirende anwendbar sind, wenn man complexe Grössen einführt und deren Bedeutung geeignet definirt.

Da die aus den beiden Theorien sich ergebenden letzten Formeln complicirt sind, und ihre Identität nicht sofort zu sehen ist, so will ich letztere noch direct nachweisen. Entsprechend dem p. 515 Gesagten sind die Cauchy'schen Formeln, welche sich auf die Schwingungen senkrecht und parallel der Einfallsebene beziehen, zu vertauschen, um den Anschluss an die Voigt'sche Theorie zu gewinnen.

Setzt man nun:

$$\frac{R_p}{E_p} = \operatorname{tg} \psi_p e^{i\Delta_p}, \quad \frac{R_s}{E_s} = \operatorname{tg} \psi_s e^{i\Delta_s}, \quad \frac{R_s}{R_p} = \operatorname{tg} \psi e^{i\Delta},$$

so bedeuten  $\operatorname{tg} \psi$  die sogenannten Schwächungsverhältnisse,  $\Delta$  die Verzögerungen, und es ist für  $E_s = E_p$ , d. h. für unter dem Azimuth  $45^\circ$  polarisirtes einfallendes Licht:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \psi_s}{\operatorname{tg} \psi_p}, \quad \Delta = \Delta_s - \Delta_p.$$

Nach der Cauchy'schen Theorie ist dann<sup>3)</sup>:

- 
- 1) W. Voigt, Wied. Ann. **23**. p. 104. 1884.  
 2) P. Drude, Wied. Ann. **32**. p. 584. 1887.  
 3) A. Cauchy, Compt. rend. **8**. p. 560. 1839 u. **26**. p. 87. 1848;  
 A. Beer, l. c. p. 410; Wüllner, Exper. Phys. **2**. p. 536. 4. Aufl. 1883.

$$(14) \quad \begin{cases} \cos 2\psi_p = \frac{\cos \varphi \sqrt{\nu^2 - \sin^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \nu^2 + \sigma^2} = \frac{2U \cos \varphi \cos u}{\cos^2 \varphi + U^2}, \\ \operatorname{tg} \Delta_p = \frac{2\sigma \cos \varphi}{1 - (\nu^2 + \sigma^2)} = \frac{2U \cos \varphi \sin u}{\cos^2 \varphi - U^2}, \end{cases}$$

wenn man  $U$  und  $u$  definiert durch:

$$U \sin u = \sigma, \quad U \cos u = \nu \cos r.$$

$U$  und  $u$  sind mit den  $n$  und  $\kappa$ , resp.  $a$  und  $a'^1$ ) der Voigt'schen Theorie verknüpft durch die Gleichungen:

$$(15) \quad \begin{cases} U^2 \sin 2u = 2n^2 \kappa = \frac{a'}{a^2 + a'^2}, \\ U^2 \cos 2u = n^2 (1 - \kappa^2) - \sin^2 \varphi = \frac{a}{a^2 + a'^2} - \sin^2 \varphi, \\ \text{d. h. } U^2 e^{-2iu} = \frac{1}{\alpha} - \sin^2 \varphi, \quad \text{für } \alpha = a + ia'. \end{cases}$$

Führt man nun noch den Hülfswinkel  $p$  ein, definiert durch:

$$\operatorname{tg} p = \frac{\cos \varphi}{U},$$

so wird nach (14):

$$\cos 2\psi_p = \cos u \cdot \sin 2p, \quad \operatorname{tg} \Delta_p = \sin u \cdot \operatorname{tg} 2p.$$

Setzt man nun:

$$\frac{1 - \frac{R_p}{E_p}}{1 + \frac{R_p}{E_p}} = \operatorname{tg} P_p \cdot e^{-iQ_p}, \quad \text{so wird } 2):$$

$$(16) \quad \cos 2\psi_p = \cos Q_p \sin 2P_p, \quad \operatorname{tg} \Delta_p = \sin Q_p \operatorname{tg} 2P_p.$$

Wir haben nur zu zeigen, dass hier  $P$  und  $Q$  identisch sind mit  $p$  und  $u$ . Bildet man nun nach der Voigt'schen Theorie  $R_p/E_p^3$ ), so erhält man:

$$\operatorname{tg} P_p e^{-iQ_p} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\frac{1}{\alpha} - \sin^2 \varphi}}.$$

Aus Formel (15) folgt daher, dass  $p$  mit  $P$ ,  $u$  mit  $-Q$  identisch ist, und da es auf das Vorzeichen nicht ankommt, (vorausgesetzt, dass man ein Zeichen consequent durchführt),

1) P. Drude, Wied. Ann. 32. p. 616. 1887.

2) l. c. p. 612.

3) l. c. p. 613; hier ist  $E_p$  und  $E_s$  mit anderem Zeichen genommen.

so ist die Uebereinstimmung für  $\psi_p$  und  $\Delta_p$  nach beiden Theorien erwiesen.

Bilden wir nun die entsprechenden Formeln für  $\psi$  und  $\Delta$ . Aus der Voigt'schen Theorie folgt <sup>1)</sup>:

$$\frac{1 - \frac{R_s}{R_p}}{1 + \frac{R_s}{R_p}} = \frac{1}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi} \sqrt{\frac{1}{\alpha} - \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi} U \cdot e^{-iu},$$

und da auch hier für  $\psi$  und  $\Delta$  eine analoge Gleichung gilt wie (16), so folgt:

$$(17) \quad \begin{cases} \cos 2\psi = \cos u \cdot \sin \left( 2 \arctg \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{U} \right), \\ \operatorname{ctg} \Delta = -\sin u \cdot \operatorname{tg} \left( 2 \arctg \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{U} \right). \end{cases}$$

Dies ist aber, abgesehen vom Vorzeichen von  $u$ , dieselbe Formel, wie sie aus der Cauchy'schen Theorie abgeleitet wird.<sup>2)</sup>

Da die Identität der Formeln für  $\psi_p$ ,  $\Delta_p$ ,  $\psi$ ,  $\Delta$  erwiesen ist, so folgt daraus auch die für  $\psi_s$ ,  $\Delta_s$ .

Für den Haupteinfallswinkel  $\bar{\varphi}$  ist  $\Delta = \frac{1}{2}\pi$ , d. h.:

$$\bar{U} = \sin \bar{\varphi} \operatorname{tg} \bar{\varphi}, \quad 2\bar{\psi} = \bar{u}.$$

Nimmt man nun an, wie es Quincke<sup>3)</sup> thut, dass  $u$  und  $U$  vom Einfallswinkel unabhängig seien, so erhält man die Formeln:

$$(18) \quad \begin{cases} \cos 2\psi = \cos 2\bar{\psi} \sin \left( 2 \arctg \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\sin \bar{\varphi} \operatorname{tg} \bar{\varphi}} \right), \\ \operatorname{tg} \Delta = \sin 2\bar{\psi} \operatorname{tg} \left( 2 \arctg \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\sin \bar{\varphi} \operatorname{tg} \bar{\varphi}} \right). \end{cases}$$

Wie sich aus (15) ergibt, ist die Quincke'sche Annahme und damit die Formeln (18) zulässig, wenn  $\alpha$ , d. h. der Modull von  $\alpha$ , nämlich  $\sqrt{a^2 + a'^2}$ , klein gegen 1 ist. Ich habe früher<sup>4)</sup> Formeln für dieselbe Annäherung entwickelt, und es zeigt sich in der That, dass die dortigen Formeln identisch mit den Formeln (18) sind.

Es folgt aus Formel (18), dass das Minimum von  $\psi$  sich

1) P. Drude, l. c. p. 613. 614. Formel 52. 53.

2) Wüllner, Exper. Phys. 2. p. 549. 1883.

3) G. Quincke, Pogg. Ann. 128. p. 551. 1866.

4) P. Drude, Gött. Nachr. 11. p. 284. 1888.

zu  $\bar{\psi}$  ergibt. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn man die strengen Formeln benutzt. Es ist:<sup>1)</sup>

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right]_{\varphi = \bar{\varphi}} = \sin 4 \bar{\psi} \operatorname{ctg}^3 \bar{\varphi}.$$

Setzt man hier für  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\psi}$  Näherungswerthe<sup>2)</sup>, so erhält man:

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right]_{\varphi = \bar{\varphi}} = \frac{2\kappa}{n^3(1+\kappa^2)^{5/2}}.$$

Bei den meisten Metallen ist dies eine sehr kleine Grösse (z. B. bei Stahl<sup>3)</sup> für  $n = 2,5$ ,  $\kappa = 1,3$  zu 0,014, sodass die Abweichung von der Regel Brewster's, dass  $\psi$  zu einem Minimum für den Haupteinfallswinkel wird, unmerklich wird.

Ich stelle im Folgenden die Formeln für  $\psi$  und  $\Delta$  zusammen. Sie sind auf dem von mir früher<sup>4)</sup> angewandten Wege gewonnen, nur dass an Stelle der Constanten  $a, a'$ , hier  $n$  und  $\kappa$  substituirt sind, weil diese directe physikalische Bedeutung haben, während allerdings die Formeln dadurch nicht einfacher gestaltet werden.

Es ist allgemein:

(19)  $\cos 2\psi = \cos Q \sin 2P$ ,  $\operatorname{tg} \Delta = \sin Q \operatorname{tg} 2P$ ,  
die  $P$  und  $Q$  sind für die drei Fälle (Index  $p$ , Index  $s$  und kein Index) verschieden, ihre Werthe sind folgende:

Strenge Formeln:

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} P_p = \frac{\cos \varphi}{\sqrt[3]{n^4(1+\kappa^2)^2 - 2n^2(1-\kappa^2)\sin^2\varphi + \sin^4\varphi}}, \\ \operatorname{tg} 2Q_p = \frac{-2n^2\kappa}{n^2(1-\kappa^2) - \sin^2\varphi}, \\ \operatorname{tg} P_s = \frac{\cos \varphi n^2(1+\kappa^2)}{\sqrt[3]{n^4(1+\kappa^2)^2 - 2n^2(1-\kappa^2)\sin^2\varphi + \sin^4\varphi}}, \\ \operatorname{tg} 2Q_s = \frac{2\kappa(n^2(1+\kappa^2)^2 - 2\sin^2\varphi(1-\kappa^2))}{n^2(1+\kappa^2)^2(1-\kappa^2) - \sin^2\varphi(1-6\kappa^2+\kappa^4)}, \\ \operatorname{tg} P = \frac{\sqrt[3]{n^4(1+\kappa^2)^2 - 2n^2(1-\kappa^2)\sin^2\varphi + \sin^4\varphi}}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}, \\ \operatorname{tg} 2Q = \frac{2n^2\kappa}{n^2(1-\kappa^2) - \sin^2\varphi}. \end{array} \right.$$

1) P. Drude, Wied. Ann. 32. p. 614. 1887.

2) P. Drude Gött. Nachr. 11. p. 287. 1888.

3) R. Hennig, Gött. Nachr. 13. p. 377. 1887.

4) P. Drude, Wied. Ann. 32. p. 612. 613. 1887.

Setzt man voraus, dass  $1/(n^4(1+\kappa^2)^2)$  gegen 1 zu vernachlässigen ist, und in gewisser Annäherung auch  $1/(n^2(1+\kappa^2))$  (cf. p. 519), so erhält man folgende, für die Anwendung meist genügende

Näherungsformeln:

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} P_{p_1} = \frac{\cos \varphi}{n \sqrt{1+\kappa^2}}, \quad \operatorname{tg} P_{p_2} = \operatorname{tg} P_{p_1} \left( 1 + \frac{1}{2n^2} \frac{1-\kappa^2}{(1+\kappa^2)^2} \right), \\ \operatorname{tg} Q_{p_1} = -\kappa, \quad \operatorname{tg} Q_{p_2} = -\kappa \left( 1 + \frac{1}{n^2(1+\kappa^2)} \right), \\ \operatorname{tg} P_{s_1} = \cos \varphi n \sqrt{1+\kappa^2}, \quad \operatorname{tg} P_{s_2} = \operatorname{tg} P_{s_1} \left( 1 + \frac{1}{2n^2} \frac{1-\kappa^2}{(1+\kappa^2)^2} \right), \\ \operatorname{tg} Q_{s_1} = \kappa, \quad \operatorname{tg} Q_{s_2} = \kappa \left( 1 - \frac{1}{n^2(1+\kappa^2)} \right), \\ \operatorname{tg} P_1 = \frac{n \sqrt{1+\kappa^2}}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}, \quad \operatorname{tg} P_2 = \operatorname{tg} P_1 \left( 1 - \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{1-\kappa^2}{(1+\kappa^2)^2} \right), \\ \operatorname{tg} Q_1 = \kappa, \quad \operatorname{tg} Q_2 = \kappa \left( 1 + \frac{1}{n^2(1+\kappa^2)} \right). \end{array} \right. \quad 1)$$

Hier bezeichnen die mit den Indices 1 und 2 unterschiedenen Grössen (z. B.  $P_1$  und  $P_2$ ) Grenzwerte, zwischen denen die wahren Werthe ( $P$ ) liegen und nach dem Schema zu bilden sind:

$$P = P_1 + (P_2 - P_1) \sin^2 \varphi.$$

Es ist  $\psi_p, \psi_s, \psi$  beständig positiv,  $\Delta_p$  negativ,  $\Delta_s$  und  $\Delta$  positiv zu nehmen. Bei streifender Incidenz, d. h.  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ , sind alle  $\psi = \frac{1}{4}\pi$ , alle  $\Delta = 0$ .

Die Formeln dienen zur Berechnung der  $\psi$  und  $\Delta$  aus den optischen Constanten. Um letztere umgekehrt aus den Beobachtungen zu berechnen, dienen die Gött. Nachr. 11. p. 284. 1888 gegebenen Formeln. Es sind dort nur das relative Azimuth  $\psi$  und die relative Verzögerung  $\Delta$  berücksichtigt, weil dieselben bequemer zu beobachten sind, als die absoluten Azimuthe, resp. Verzögerungen  $\psi_p, \psi_s, \Delta_p, \Delta_s$ .

Wird die Reflexion anstatt in Luft in Flüssigkeit vom Brechungsexponenten  $n_0$  beobachtet, so ist in den Formeln (20). (21)  $n/n_0$  für  $n$  zu substituieren, während  $\kappa$  ungeändert bleibt.

1) Die vier letzten Formeln sind schon in Gött. Nachr. 11. p. 286. 1888 gegeben.

Ich gebe schliesslich noch die Formeln für  $D_o$  und  $D_s$  an, beschränke mich aber nur auf den ersten Grenzwert, da die Formeln hier complicirter sind. Setzt man:

$$(22) \quad \frac{D_p}{E_p} = \operatorname{tg} \psi^{(p)} e^{iA^{(p)}}, \quad \frac{D_s}{E_s} = \operatorname{tg} \psi^{(s)} e^{iA^{(s)}}, \quad \frac{D_p}{D_s} = \operatorname{tg} \psi^{(o)} e^{iA^{(o)}},$$

so erhält man folgende Näherungsformeln:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \psi^{(p)} = \frac{2n\sqrt{1+\kappa^2} \cos \varphi}{\sqrt{n^2(1+\kappa^2) + 2n \cos \varphi + \cos^2 \varphi}}, \\ \operatorname{tg} A^{(p)} = -\frac{\kappa \cos \varphi}{n(1+\kappa^2) + \cos \varphi}, \\ \operatorname{tg} \psi^{(s)} = \frac{2n\sqrt{1+\kappa^2} \cos \varphi}{\sqrt{1+2n \cos \varphi + n^2(1+\kappa^2) \cos^2 \varphi}}, \\ \operatorname{tg} A^{(s)} = \frac{-\kappa}{1+n(1+\kappa^2) \cos \varphi}, \\ \operatorname{tg} \psi^{(o)} = \frac{\sqrt{n^2(1+\kappa^2) \cos^2 \varphi + 2n \cos \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi}}{n\sqrt{1+\kappa^2}}, \\ \operatorname{tg} A^{(o)} = \frac{\kappa \sin^2 \varphi}{1+n(1+\kappa^2) \cos \varphi}. \end{array} \right.$$

Wenn man berücksichtigt, dass die Intensität des einfallenden Lichtes gleich der Summe der Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichtes, letzteres gemessen unmittelbar an der Grenzfläche, sein muss, so erhält man, wenn man  $\sin \chi = \sqrt{\alpha} \cdot \sin \varphi$  <sup>1)</sup> setzt, und mit  $\chi'$  den zu  $\chi$  conjugirten Werth bezeichnet, folgende Verhältnisse für die Intensitäten des einfallenden, reflectirten und gebrochenen Lichtes:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} (E_p^2 + E_p'^2) : (R_p^2 + R_p'^2) : (D_p^2 + D_p'^2) \frac{\sin(\chi + \chi')^2}{\sin 2\varphi}, \\ (E_s^2 + E_s'^2) : (R_s^2 + R_s'^2) : (D_s^2 + D_s'^2) \frac{\sin 2\chi + \sin 2\chi'}{2 \sin 2\varphi}. \end{array} \right.$$

Es ist hier auffallend und bildet zu den für durchsichtige Medien gültigen Formeln einen Gegensatz, dass der Factor von  $D^2 + D'^2$  verschieden ist für die parallel und

1) P. Drude, Wied. Ann. 32. p. 613. 1887.

2) Es ist  $E = E + iE$ ,  $R = R + iR$ ,  $D = D + iD$  gesetzt.

senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente. Es hängt dies damit zusammen, dass die Aetherbewegung in beiden Fällen eine verschiedene ist, im ersten Falle ist sie elliptisch und nicht rein transversal, im zweiten geradlinig transversal.

Wendet man auf die Formeln (24) die bekannte Näherung an, so ergibt sich für den ersten Grenzwert allgemein für  $p$  und  $s$ :

$$(E^2 + E'^2) : (R^2 + R'^2) : (D^2 + D'^2) \cdot \frac{1}{n(1 + \kappa^2) \cos \varphi},$$

die zweiten Grenzwerte werden:

$$(25) \quad \begin{cases} (E_p^2 + E_p'^2) : (R_p^2 + R_p'^2) : (D_p^2 + D_p'^2) \cdot \frac{1}{n(1 + \kappa^2) \cos \varphi} \left( 1 - \frac{1}{2n^2(1 + \kappa^2)} \right), \\ (E_s^2 + E_s'^2) : (R_s^2 + R_s'^2) : (D_s^2 + D_s'^2) \cdot \frac{1}{n(1 + \kappa^2) \cos \varphi} \left( 1 - \frac{1 - 3\kappa^2}{2n^2(1 + \kappa^2)^2} \right). \end{cases}$$

In Verbindung mit den Formeln (23) wird das Verhältniss der Intensitäten des gebrochenen und des einfallenden Lichtes als erster Grenzwert:

$$(26) \quad \begin{cases} \left[ \frac{J_D}{J_E} \right]_p = \frac{4n \cos \varphi}{n^2(1 + \kappa^2) + 2n \cos \varphi + \cos^2 \varphi}, \\ \left[ \frac{J_D}{J_e} \right]_s = \frac{4n \cos \varphi}{n^2(1 + \kappa^2) \cos^2 \varphi + 2n \cos \varphi + 1}. \end{cases}$$

Die Formeln zeigen, dass die Intensität des gebrochenen Lichtes, welches senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, stets grösser ist, als die des in derselben polarisirten; nur für senkrechte, resp. streifende Incidens werden sie gleich, nämlich 1 oder 0. Umgekehrt ist das Verhältniss bekanntlich für die reflectirte Intensität.

Göttingen, im Juli 1888.