QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES RELATIVES AU CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES;

par M. **Michel Petrovitch**, à Belgrade (Serbie).

Adunanza del 23 maggio 1897.

1. Soient $F_1(u)$, $\Phi_1(u)$, $F_2(u)$, $\Phi_2(u)$ fonctions de u, développables en séries de Taylor

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
F_1(u) &= \sum_1^\infty A_m u^m \\
\Phi_1(u) &= \sum_1^\infty a_m u^m \\
F_2(u) &= \sum_1^\infty B_m u^m \\
\Phi_2(u) &= \sum_1^\infty b_m u^m
\end{aligned}
$$

convergentes pour $0 \leqq |u| \leqq 1$. Désignons par

(2)
$\lambda_1(\alpha, \beta)$ le coefficient de i dans $F_1(\alpha + \beta i)$
$\mu_1(\alpha, \beta)$ le coefficient de i dans $\Phi_1(\alpha + \beta i)$
$\lambda_2(\alpha, \beta)$ la partie réelle de $F_2(\alpha + \beta i)$
$\mu_2(\alpha, \beta)$ la partie réelle de $\Phi_2(\alpha + \beta i)$

et nous aurons

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1}{2i}[F_1(e^{zi}) - F_1(e^{-zi})] = \lambda_1(\cos z,\ \sin z)\\
&\frac{1}{2}[F_2(e^{zi}) + F_2(e^{-zi})] = \lambda_2(\cos z,\ \sin z)\\
&\frac{1}{2i}[\Phi_1(e^{(z-x)i}) - \Phi_1(e^{-(z-x)i})] = \mu_1[\cos(z-x),\ \sin(z-x)]\\
&\frac{1}{2}[\Phi_2(e^{(z-x)i}) + \Phi_2(e^{-(z-x)i})] = \mu_2[\cos(z-x),\ \sin(z-x)].
\end{aligned}
$$

Si l'on pose alors

$$
(4)\qquad f(z) = \lambda_1(\cos z,\ \sin z) + \lambda_2(\cos z,\ \sin z)
$$

$$
(5)\qquad \varphi(z) = \mu_1(\cos z,\ \sin z) + \mu_2(\cos z,\ \sin z)
$$

et si l'on y remplace λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 par leurs valeurs (3), on trouve

$$
(6)\qquad f(z) = \sum_1^\infty (A_m \sin mz + B_m \cos mz)
$$

$$
(7)\qquad \varphi(z) = \sum_1^\infty (a_m \sin mz + b_m \cos mz).
$$

Envisageons l'intégrale définie

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
J = \int_0^{2\pi} &[\lambda_1(\cos z,\ \sin z) + \lambda_2(\cos z,\ \sin z)]\{\mu_1[\cos(z-x),\ \sin(z-x)]\\
&+ \mu_2[\cos(z-x),\ \sin(z-x)]\}\,dz
\end{aligned}
$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$
J = \int_0^{2\pi} f(z)\varphi(z-x)\,dz.
$$

En développant $\varphi(z-x)$ en série trigonométrique d'après la formule (7), on aura

$$J=\sum_1^{\infty} a_m \int_0^{2\pi} f(z) \sin m(z-x)\, dz + \sum_1^{\infty} b_m \int_0^{2\pi} \cos m(z-x)$$

ou encore

$$(9)\qquad \begin{aligned} J = &\sum_1^{\infty} a_m \cos mx \int_0^{2\pi} f(z) \sin mz . dz \\ - &\sum_1^{\infty} a_m \sin mx \int_0^{2\pi} f(z) \cos mz . dz \\ + &\sum_1^{\infty} b_m \cos mx \int_0^{2\pi} f(z) \cos mz . dz \\ + &\sum_1^{\infty} b_m \sin mx \int_0^{2\pi} f(z) \sin mz . dz . \end{aligned}$$

Mais en vertu de la formule (6) on a

$$(10)\qquad \int_0^{2\pi} f(z) \sin mz . dz = \pi A_m$$

$$(11)\qquad \int_0^{2\pi} f(z) \cos mz . dz = \pi B_m$$

et par conséquent

$$(12)\qquad J = \sum_1^{\infty} (P_m \sin mx + Q_m \cos mx)$$

où

$$(13)\qquad \begin{aligned} P_m &= (b_m A_m - a_m B_m)\pi \\ Q_m &= (a_m A_m + b_m B_m)\pi . \end{aligned}$$

On a ainsi l'intégrale définie (8) développée en série de Fourier. Pour $x=0$ on a

$$(14)\qquad J = \pi \sum_1^{\infty} (a_m A_m + b_m B_m).$$

Si $b_m = 0$, $B_m = 0$, on a

$$J = \pi \sum_1^\infty a_m A_m. \tag{15}$$

La formule (8) devient alors

$$\int_0^{2\pi} \lambda_1(\cos\zeta, \sin\zeta)\mu_2(\cos\zeta, \sin\zeta)\,d\zeta = \pi \sum_1^\infty a_m A_m. \tag{16}$$

Ces formules générales permettent de calculer un grand nombre d'intégrales définies soit en terme fini, soit en les développant en série.

2. On peut tirer p. ex. de la formule (16) la conséquence suivante. Soient

$$F_i(u) = \sum_1^\infty \chi_i(m)\, u^m \qquad (i = 1, 2) \tag{17}$$

des fonctions développables en série de Taylor convergentes pour

$$0 \leqq |u| \leqq 1;$$

soit en général $\lambda_i(\alpha, \beta)$ le coefficient de i dans $F_i(\alpha + \beta i)$ et posons pour abréger

$$\lambda_i(\cos\zeta, \sin\zeta) = \Omega_i; \tag{18}$$

d'après la formule (16) on aura

$$\int_0^{2\pi} \Omega_1 \Omega_2\, d\zeta = \pi \sum_1^\infty \chi_1(m)\chi_2(m). \tag{19}$$

En particulier si

$$F_1(u) = F_2(u)$$

on aura

$$\int_0^{2\pi} (\Omega_1)^2\, d\zeta = \pi \sum_1^\infty [\chi_1(m)]^2. \tag{20}$$

En remplaçant dans (17) u par xu, où le module de x est plus petit que le rayon de convergence de la série (17), en désignant par $\lambda(\alpha, \beta)$ le coefficient de i dans $F(\alpha + \beta i)$, et en posant pour abréger

$$\Omega = \lambda(x \cos z, \ x \sin z),$$

on aura

$$(21) \qquad \int_0^{2\pi} (\Omega)^2 \, dz = \pi \sum_1^{\infty} [\chi(m)]^2 x^{2m}.$$

Si p. ex. on a

$$\chi(m) = \frac{1}{m!},$$

on aura

$$F(u) = e^{xu} - 1,$$

$$\lambda(x \cos z, \ x \sin z) = e^{x \cos z} \sin (x \sin z)$$

et en le remplaçant dans (21) on trouve

$$(22) \qquad \int_0^{2\pi} e^{2x \cos z} [\sin (x \sin z)]^2 \, dz = \pi \sum_1^{\infty} \frac{x^{2m}}{(m!)^2}$$

ou, en changeant x en $x^{\frac{1}{2}}$,

$$(23) \qquad \int_0^{2\pi} e^{2x^{\frac{1}{2}} \cos z} [\sin (x^{\frac{1}{2}} \sin z)]^2 \, dz = \pi \sum_1^{\infty} \frac{x^m}{(m!)^k}.$$

3. Si dans la formule (16) on fait

$$A_m = \frac{x^m}{m!},$$

on aura

$$F(u) = e^{xu} - 1,$$

d'où

$$\lambda(\cos z, \ \sin z) = e^{x\cos z} \sin(x \sin z)$$

et la formule (16) deviendra

$$(24) \qquad \int_0^{2\pi} e^{x\cos z} \sin(x\sin z) . \mu(\cos z, \ \sin z)\, dz = \pi \sum_1^{\infty} \frac{a_m x^m}{m!},$$

où $\mu(\alpha, \beta)$ est la partie réelle de $\Phi(u)$.

De la formule (16) on peut déduire le résultat suivant :

Etant donnée une fonction $\Phi(z)$, *s'annulant avec* $z = 0$ *et développable en série de* T a y l o r *convergente pour* $|z| < 1$, *si l'on désigne par* $\mu(\alpha, \beta)$ *le coefficient de* i *dans* $\Phi(\alpha + \beta i)$, *l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin z}{1 - 2x\cos z + x^2} \mu(\cos z, \ \sin z)\, dz$$

sera égale à $\pi \Phi(x)$ *pour* $|x| < 1$.

Car si l'on fait

$$A_m = x^m,$$

on aura

$$F(u) = \frac{xu}{1 - xu},$$

d'où

$$\lambda(\cos z, \ \sin z) = \frac{x \sin z}{1 - 2x\cos z + x^2}$$

et en le remplaçant dans (16), on aura

$$(25) \quad \int_0^{2\pi} \frac{x \sin z}{1 - 2x\cos z + x^2} \mu(\cos z, \ \sin z)\, dz = \pi \sum_1^{\infty} a_m x^m = \pi \Phi(x)$$

formule valable pour $|x| < 1$.

Ainsi, lorsque

$$a_m = \frac{(-1)^{m-1} x^m}{m},$$

on aura

$$\Phi(u) = \log(1 + xu)$$

$$\mu(\cos z, \sin z) = \operatorname{arctg} \frac{x \sin z}{1 + x \cos z}$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin z}{1 - 2x \cos z + x^2} \operatorname{arctg} \frac{x \sin z}{1 + x \cos z} dz = \pi \log(x + 1).$$

Si l'on avait

$$a_m = \frac{x^m}{m!}$$

on aurait

$$\Phi(u) = e^{xu} - 1$$

$$\mu(\cos z, \sin z) = e^{x\cos z} \sin(x \sin z)$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\, e^{x\cos z} \sin z . \sin(x \sin z)}{1 - 2x \cos z + x^2} dz = \pi(e^x - 1).$$

Pour en faire d'autres applications immédiates, posons dans (20)

$$\chi(m) = \frac{(-1)^{m-1} x^m}{m},$$

d'où

$$F(u) = \log(1 + xu)$$

$$\lambda(\cos z, \sin z) = \operatorname{arctg} \frac{x \sin z}{1 + x \cos z}$$

et l'on aura

$$\int_0^{2\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x\sin z}{1+x\cos z}\right)^2 dz = \pi\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{2(m-1)}x^{2m}}{m^2};$$

l'intégrale, donc, s'exprime par la transcendante

$$\zeta(x)=\sum_1^{\infty}\frac{x^m}{m^2}.$$

Si dans (17) on fait

$$\chi(m)=\frac{(-1)^{m-1}x^m}{m},$$

on aurait

$$\Omega=\frac{x\sin z}{1-2x\cos z+x^2};$$

et en le remplaçant dans (20), on aura

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{x\sin z}{1-2x\cos z+x^2}\right)^2 dz=\frac{\pi x^2}{1-x^2},$$

formule valable pour $|x|<1$.

Si l'on fait

$$A_m=\frac{(-1)^{m-1}x^m}{m},$$

on trouve

$$J=\int_0^{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{x\sin z}{1+x\cos z}.\mu(\cos z,\ \sin z)=\pi\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}a_m x^m}{m};$$

d'où, la somme $\sum_1^{\infty} a_m x^m$ étant égale à $\Phi(x)$, l'on tire

$$J=-\pi x\int_0^x\frac{\Phi(-x)\,dx}{x}, \tag{26}$$

formule générale, valable pour $|x|<1$.

Ainsi, lorsque

$$a_m = x^m,$$

on aura

$$\Phi(x) = \frac{x}{1 - x}$$

$$\mu(\cos z,\ \sin z) = \frac{x \sin z}{1 - 2x \cos z + x^2};$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin z}{1 - 2x \cos z + x^2} \operatorname{arctg} \frac{x \sin z}{1 + x \cos z} dz = -\pi x \log(x + 1).$$

4. Supposons maintenant que les développements de F_1 et F_2 soient de la forme

$$(27) \qquad \begin{aligned} F_1(u) &= \sum_1^\infty A_{2m} u^{2m} \\ F_2(u) &= \sum_1^\infty B_{2m} u^{2m}; \end{aligned}$$

on aurait alors

$$(28) \qquad f(z) = \sum_1^\infty (A_{2m} \sin 2mz + B_{2m} \cos 2mz)$$

et pour l'intégrale J, définie par (8), on aurait l'expression

$$(29) \qquad J = \sum_1^\infty (P_{2m} \sin 2mx + Q_{2m} \cos 2mx)$$

avec

$$(30) \qquad \begin{aligned} P_{2m} &= (b_{2m} A_{2m} - a_{2m} B_{2m})\pi \\ Q_{2m} &= (a_{2m} A_{2m} + b_{2m} B_{2m})\pi. \end{aligned}$$

Pour $x = 0$, $b_{2m} = 0$, $B_{2m} = 0$, on aurait

$$J = \pi \sum_1^\infty a_{2m} A_{2m} \tag{31}$$

et des formules analogues à (16), (19), (20), (21), (25), (26).

On aurait aussi des formules analogues en supposant que

$$F_1(u) = \sum_1^\infty A_{2m-1} u^{2m-1}$$

$$F_2(u) = \sum_1^\infty B_{2m-1} u^{2m-1}.$$

En faisant p. ex.

$$A_{2m} = \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!},$$

on aura

$$F(u) = \cos xu - 1,$$

$$\lambda(\cos z, \sin z) = \frac{e^{-x\sin z} - e^{x\sin z}}{2} \sin(x\cos z)$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} (e^{x\sin z} - e^{-x\sin z}) \sin(x\cos z) . \mu(\cos z, \sin z) dz = -2\pi \sum_1^\infty \frac{(-1)^m a_m x^{2m}}{(2m)!}. \tag{32}$$

En faisant

$$A_m = \frac{(-1)^{m-1} x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

on aura

$$F(u) = \sin xu,$$

$$\lambda(\cos z, \sin z) = \frac{e^{x\sin z} - e^{-x\sin z}}{2} \cos(x\cos z)$$

et par conséquent

$$(33)\quad \int_0^{2\pi}(e^{x\sin z}-e^{-x\sin z})\cos(x\cos z).\mu(\cos z,\ \sin z)dz=2\pi\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}a_m x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

5. Je signalerai ici comment les formules précédentes permettent de développer en séries les intégrales de la forme

$$J=\int_0^{2\pi}f(z)\varphi(z-x)\,dz$$

et

$$J=\int_0^{2\pi}f(z)\varphi(z)\,dz,$$

lorsque $\varphi(z)$ est une fonction méromorphe doublement périodique, ayant une période égale à 2π, ou une fonction auxiliaire, $f(z)$ étant une fonction développable en série de Fourier

$$f(z)=\sum_1^{\infty}(A_m\sin mz+B_m\cos mz)$$

pour les valeurs de z comprises entre 0 et 2π.

En remplaçant successivement $\varphi(z)$ p. ex. par les fonctions auxiliaires

$$\theta_1(z)=2\sum_1^{\infty}(-1)^{m-1}e^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\lambda}\cos mz$$

$$\theta_3(z)-1=2\sum_1^{\infty}e^{m^2\lambda}\cos mz$$

(où λ est une quantité imaginaire à partie réelle négative), on aura les formules

$$(34)\quad \int_0^{2\pi}f(z)\theta_1(z-x)dz=2\sum_1^{\infty}(-1)^{m-1}e^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\lambda}(A_m\sin mz+B_m\cos mz)$$

$$(35)\qquad \int_0^{2\pi}f(z)\theta_1(z)\,dz=2\sum_1^{\infty}(-1)^{m-1}e^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\lambda}B_m$$

$$(36)\quad \int_0^{2\pi} f(z)[\theta_3(z-x)-1]\,dz = 2\sum_1^{\infty} e^{n^2\lambda}(A_m \sin mx + B_m \cos mx)$$

$$(37)\quad \int_0^{2\pi} f(z)[\theta_3(z)-1]\,dz = 2\sum_1^{\infty} e^{n^2\lambda} B_m.$$

En remplaçant $\varphi(z)$ par la fonction

$$D\log\theta_1(z) - \frac{\pi}{2}\cot\frac{z}{2} = 2\sum_1^{\infty}\frac{e^{2m\lambda}}{1-e^{2m\lambda}}\sin mz,$$

on aura les formules

$$(38)\quad \int_0^{2\pi} f(z)\left[D\log\theta_1(z-x) - \frac{\pi}{2}\cot\frac{z-x}{2}\right]dz$$

$$= 2\sum_1^{\infty}\frac{e^{2m\lambda}}{1-e^{2m\lambda}}(A_m\cos mx + B_m \sin mx),$$

$$(39)\quad \int_0^{2\pi} f(z)\left[D\log\theta_1(z) - \frac{\pi}{2}\cot\frac{z}{2}\right]dz = 2\sum_1^{\infty}\frac{e^{2m\lambda}A_m}{1-e^{2m\lambda}}.$$

Soit maintenant $F(z)$ une fonction méromorphe doublement periodique à période 2π, n'ayant que des pôles simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. On aura alors

$$F(z) = H + \sum_1^{\infty} K_h D\log\theta_1(z-\alpha_h)$$

où H et les K_h sont des constantes. Envisageons l'intégrale

$$J = \int_0^{2\pi} f(z)\left[F(z) - \frac{\pi}{2}\sum_{h=1}^{h=n} K_h \cot\frac{z-\alpha_h}{2}\right].$$

On aura

$$J = \sum_{h=1}^{h=n}\int_0^{2\pi} f(z)\,D\log\theta_1(z-\alpha_h) + H\int_0^{2\pi} f(z)\,dz.$$

Mais comme l'on a

$$\int_0^{2\pi} f(z)\,dz = 0$$

(puisque le développement trigonométrique de $f(z)$ ne contient pas le terme absolu), on aura, d'après la formule (38),

$$J = 2 \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{e^{2m\lambda}}{1 - e^{2m\lambda}} (A_m \cos m\alpha_h - B_m \sin m\alpha_h)$$

et l'on aurait facilement des développements analogues dans les cas où $F(z)$ aurait des pôles multiples.

Je signale le principe des développements précédents, permettant d'obtenir un grand nombre d'intégrales définies en termes finis ou sous la forme des séries.

Belgrade, 6 avril 1897.

MICHEL PETROVITCH.