Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen. II.

Von

M. Noether in Erlangen.

(S. den I. Theil in diesem Bande, p. 417).

Zweiter Theil.

Die Abel'schen Functionen.

Das Ziel, welches ich hier verfolge, ist: denjenigen Theil des Jacobi'schen Umkehrproblems, welcher sich *aus den Differentialformeln selbst*, d. h. *ohne und vor Einführung der Periodicitätseigenschaften*, entwickeln lässt, einmal auszuscheiden und für sich durchzuführen. Ich zeige im Folgenden, dass man so nicht nur das ganze System von Relationen aufstellen kann, auf welchen die Umkehrung beruht, wie Abel'sches Theorem etc., sondern auch bis zu derjenigen Abel'schen Function

$$Al(V_1, V_2, \ldots, V_p)$$

und ihrer für alle endlichen Argumente gültigen Potenzentwicklung vordringen kann, auf welche (wenigstens im hyperelliptischen Falle) zuerst Herr Weierstrass die Umkehrung zurückgeführt hat, während deren Entwicklung nach periodischen Gliedern — als Function Θ — natürlich dem weiteren Gebiete angehört.

Die Aufnahme der Untersuchungen über das Abel'sche Theorem (§ 14) und über die Eindeutigkeit des Jacobi'schen Umkehrproblems (§ 15) war in diesem Sinne wegen der Modificationen nöthig, die sich daraus ergeben, dass ich das Abel'sche Theorem dabei nur in seinen Differentialgleichungen benutzen kann, also nicht bei allen solchen beliebigen Wegen, welche die Summe der Integrale erster Gattung zu Null machen. Denn von dem Satze, welcher den bezügl. Weierstrass'schen und Riemann'schen Betrachtungen zu Grunde liegt — dass, auf diesen selben Wegen genommen, die Summe der Integrale dritter Gattung eine algebraische Function der beiden Parameter des Integrals ist —, muss ich dort vollständig absehen, weil er bei denselben auf dem Nachweis beruht, dass eine eindeutige Function des Punktes x von $f=0$, deren Periodicitätsmoduln verschwinden, eine zu $f=0$ gehörige algebraische Function von x ist; dieser Satz lässt sich sogar auch aus § 15 nicht folgern, sondern könnte hier nur erst aus der Darstellung der algebraischen Functionen durch die $\mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ und dieser durch die Functionen $Al(V)$ (§§ 16—19) abgeleitet werden.

In Bezug auf den Weg zur Aufstellung der Function $Al(V)$ schlage ich im Wesentlichen dasjenige Verfahren ein, welches Herr Weierstrass in seiner Note in Cr. J. Bd. 47 „Zur Theorie der Abel'schen Functionen" (1853) für hyperelliptische Functionen skizzirt und für den allgemeinen Fall in seinen Vorlesungen ausgeführt hat: die Auffassung der Summe von Integralen 3ter Gattung als Function der Integralsummen erster Gattung. Dies bezieht sich sowohl auf deren Zerlegung in zwei nur von je p Argumenten abhängige Functionen (§ 16), als auch auf die Monodromieuntersuchung der so hergestellten Function $Al(V)$ (§ 19)*). Dass diese Ableitung in § 16 bedeutend einfacher ist, als die Zerlegung von $\mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ bei Clebsch-Gordan, welche diesen Ausdruck zuerst auf Functionen von je $p+1$ Punkten von $f=0$ (s. die Andeutung bei Riemann, Abel'sche Functionen, Nr. 25, Formel für $d\log\vartheta^{(1)}$) zurückführen, zeigt sich schon daraus, dass die letztere Zerlegung aus der ersteren sich unmittelbar ergiebt (§ 18), während der umgekehrte Uebergang zur Weierstrass'schen Definition viel umständlicher würde. Die beiden Definitionen von $\log Al(V)$ stehen so zu einander, wie die beiden Jacobi'schen Definitionen der elliptischen Θ-Function, deren Erweiterungen sie in der That sind: derjenigen (Fundamenta, Nr. 52, Formel (6)) für den logarithmischen Differentialquotienten der Θ-Function nach ihrem Argument durch ein Integral 2ter Gattung (Weierstrass), und derjenigen (ibid. Formel (7)) der Θ-Function selbst mittels eines Integrals 3ter Gattung, dessen Argument dem Parameter gleich ist (Clebsch-Gordan).

Zum engern Anschluss an das Clebsch-Gordan'sche Buch habe ich in § 17 noch deren Constantenbestimmung durch besondere untere Grenzpunkte aufgenommen. Die genaue Untersuchung der Ordnung des Verschwindens der Al-Function für den Fall, dass die zugehörigen Punkte $x_1, \ldots, x_p$ durch Curven φ verknüpft sind, wird hier nicht nöthig; ich gedenke aber auf eine Modification des von Riemann hierzu eingeschlagenen Weges (Cr. J., Bd. 65) an einer anderen Stelle einzugehen.

*) Für Beides s. auch Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionenlehre: Einige auf die Th. der analyt. Funct. mehrerer Veränderl. sich beziehende Sätze, §§ 4, 5.

Inhalt des II. Theils.

---

§ 13.

Integralformeln.

1. Als *Normalintegrale* erster Gattung werden genommen (§ 2, Nr. 4):

$$\int_y^x \Phi_\varkappa(x)\, d\omega_x \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p);$$

zweiter Gattung erster, bez. ν^{ter} Ordnung mit dem Parameter ξ (§ 7):

$$\int_y^x D_\xi P_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x = \int_y^x A_\xi(x)\, d\omega_x, \quad \text{bez.} \quad \int_y^x A_\xi^{(\nu)}(x)\, d\omega_x;$$

dritter Gattung mit den Parametern ξ, η (§ 6):

$$\int_y^x P_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x.$$

Als *kanonische* Integrale zweiter Gattung mit dem Parameter ξ (§ 9, Nr. 4 u. 5):

$$\int_y^x B_\xi(x)\, d\omega_x = \mathsf{X}_{xy}(\xi), \quad \text{bez.} \quad \int_y^x B_\xi^{(\nu)}(x)\, d\omega_x;$$

dritter Gattung mit Parametern ξ, η:

$$\int_y^x \int_\eta^\xi B_\xi(x)\, d\omega_x\, d\omega_\xi = \int_\eta^\xi \mathsf{X}_{xy}(\xi)\, d\omega_\xi = \int_y^x \mathsf{X}_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x.$$

Diesen Ausdruck möchte ich als „doppeltes Integral", nicht als „Doppelintegral", bezeichnen, da der ξ-Weg vom x-Weg hier unabhängig bleiben soll, was dem gewöhnlichen Begriff des Doppelintegrales, das keine Function der beiden oberen Grenzen ist, widerspricht.

Die Art des Unendlichwerdens dieser Integrale ist in § 6, Nr. 4 und § 7, Nr. 5 gegeben. Danach wird das Normal- und das kanonische Integral zweiter Gattung ν^{ter} Ordnung in $x = \xi$ zu ∞^ν wie

$$(\nu-1)!\, f_c(\xi)\,(c\eta\xi)^{\nu-2}\cdot\frac{(c\eta x)^\nu}{(c\xi x)^\nu},$$

das Normal- und das kanonische Integral dritter Gattung

$$\text{in } x=\xi:\ -\log(c\xi x);\quad \text{in } x=\eta:\ \log(c\eta x).$$

Die beiden Wege von y nach x und von η nach ξ sind willkürlich; nur wird man jenen diesen nicht schneiden lassen.

2. *Das kanonische Integral dritter Gattung lässt Vertauschung der beiden Grenzpunkte mit den beiden Parameterpunkten, unter Festhaltung der Wege, zu.*

Die Normal- und die kanonischen Integrale 2^{ter} Gattung hängen vom Parameter ξ algebraisch ab, und zwar sind sie algebraische Formen von ξ.

Ersteres folgt aus $B_\xi(x)=B_x(\xi)$. Das Letztere aus derselben Gleichung (oder den entsprechenden aus § 9, Nr. 5), durch Integration nach x:

$$(1)\quad \int_y^x A_\xi(x)\,d\omega_x=\int_y^x D_\xi P_{\xi\eta}(x;a_1,a_2,\ldots,a_p)\,d\omega_x=P_{xy}(\xi;a_1,\ldots,a_p)$$
$$+\sum_1^p{}_{\varkappa}\left\{\Phi_\varkappa(\xi)\int_y^x E_\varkappa(x)\,d\omega_x-E_\varkappa(\xi)\int_y^x\Phi_\varkappa(x)\,d\omega_x\right\},$$

$$(2)\quad \int_y^x B_\xi(x)\,d\omega_x=\int_y^x A_\xi(x)\,d\omega_x+\sum_\varkappa B_{a_\varkappa}(\xi)\int_y^x\Phi_\varkappa(x)\,d\omega_x$$
$$=P_{xy}(\xi;a_1,\ldots,a_p)+\sum_\varkappa\Phi_\varkappa(\xi)\int_y^x B_{a_\varkappa}(x)\,d\omega_x.$$

3. § 10 liefert durch Multiplication mit $d\omega_x$ und Integration nach x die Reduction aller algebraischen Integrale auf die Normalformen; so (2) voriger Nummer die Zurückführung eines beliebigen Integrals 2^{ter} Gattung mit Parameter ξ auf eine in diesem Punkte und in p weiteren Punkten unendlich werdende algebraische Function von x und auf p Integrale 2^{ter} Gattung erster Ordnung, welche je einen dieser Punkte zum Parameter haben. Der Integrationsweg ist dabei beliebig.

§ 11, Nr. 1 liefert analog die Darstellung des Logarithmus einer beliebigen algebraischen Function von ξ durch eine Summe von Integralen 3^{ter} Gattung mit der Grenze ξ, deren Parameterpunkte die Unendlichkeits- und Nullpunkte der Function sind, sowie durch eine Summe von Integralen erster Gattung nach ξ. Hierbei hängt der Werth des Logarithmus von dem Integrationsweg von η nach ξ ab.

§ 11, Nr. 2 und 3 liefern, indem man den Werth von $P_{\xi\eta}(x_l)$, bez. $P_{\xi\eta}^{(i)}(x_l)$ aus Formel (2) dieses Paragraphen einsetzt, unter Berücksichtigung der für die c_l, $c_{l,i}$ bestehenden Bedingungen:

$$\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} - \frac{\chi(\eta)}{\psi(\eta)} = \sum_l \sum_i c_{l,i} \int_\eta^\xi B_{x_l}^{(i)}(\xi)\, d\omega_\xi, \tag{3}$$

also die Darstellung der allgemeinsten algebraischen Function von ξ durch eine Summe von kanonischen Integralen zweiter Gattung, deren Parameter die Unendlichkeitspunkte der Function sind. Der Integrationsweg von η nach ξ ist hierbei wieder beliebig.

Auf die Darstellung von $\log\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ und auf die Integralformeln von § 12 komme ich in § 14, Nr. 6 und 7 zurück.

§ 14.

Die Differentialgleichungen des Abel'schen Theorems.

1. Nach § 11, Nr. 2 stellt sich die Differentialableitung D_ξ irgend einer algebraischen Function von ξ,

$$\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)},$$

die in den Punkten $\xi = x_1, x_2, \ldots, x_r$ je zu ∞^1 werden soll, durch die kanonischen oder Normal-Formen 2ter Gattung erster Ordnung mit den Argumenten x_l und mit demselben Parameter ξ so dar:

$$D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \sum_1^r {}^l c_l B_\xi(x_l) = \sum_1^c {}^l c_l D_\xi P_{\xi\eta}(x_l), \tag{1}$$

wo die

$$c_l = \chi(x_l)\left[\frac{d\omega_\xi}{d\psi(\xi)}\right]_{\xi=x_l} \tag{2}$$

die p Gleichungen erfüllen:

$$\sum_1^r {}^l c_l \varphi_\varkappa(x_l) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p). \tag{3}$$

Lässt man ferner die c_l diesen p Gleichungen (3) genügen, *im Uebrigen aber völlig willkürlich*, so bedeutet die rechte Seite von (1) immer das D_ξ einer algebraischen Function von ξ, die höchstens in $x_1, \ldots, x_r$ zu je ∞^1 wird.

Sei jetzt allgemeiner λ der Werth, den eine algebraische Function $\frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ in $\xi = x_1, \ldots, x_r$ annehme; so werden die Relationen (1)—(3), angewendet auf die Function $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi) - \lambda\chi(\xi)}$, welche daselbst zu ∞^1 werde:

$$(1') \qquad D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)-\lambda\chi(\xi)} = \sum_1^r {}_i\, c_i' B_\xi(x_i) = \sum_1^r {}_i\, c_i' D_\xi P_{\xi\eta}(x_i),$$

$$(2') \qquad c_i' = \chi(x_i)\left[\frac{d\omega_\xi}{d\psi(\xi)-\lambda d\chi(\xi)}\right]_{\xi=x_i},$$

$$(3') \qquad \sum_i c_i' \varphi_\varkappa(x_i) = 0.$$

Aendert man λ um $d\lambda$, so erhält man eine $(x_1, \ldots, x_r)$ benachbarte Punktgruppe $(x_1 + dx_1, \ldots, x_r + dx_r)$ auf f, in welcher $\frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ den Werth $\lambda + d\lambda$ annimmt; dafür wird

$$\psi(x_i) - \lambda \ \chi(x_i) = 0,$$
$$d\psi(x_i) - \lambda d\chi(x_i) = \chi(x_i)\, d\lambda.$$

Man darf also in (2′) bei gegebener Function $\frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ setzen:

$$(4) \qquad c_i' = \frac{d\omega_{x_i}}{d\lambda},$$

d. h.

Bedeuten die $d\omega_{x_i}$ diejenigen zusammenhängenden Werthe der Differentialform $d\omega_x$, welche an den r Stellen x_i, wo eine algebraische Function $\frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ irgend einen gegebenen Werth λ annimmt, durch Aenderung von λ um $d\lambda$ entstehen, so bestehen die p Gleichungen für die $d\omega_{x_i}$:

$$(5) \qquad \sum_1^r {}_i\, \varphi_\varkappa(x_i)\, d\omega_{x_i} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p),$$

und man hat

$$(6) \qquad D_\xi \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)-\lambda\chi(\xi)} = \sum_1^r {}_i\, B_\xi(x_i) \frac{d\omega_{x_i}}{d\lambda} = \sum_1^r {}_i\, D_\xi P_{\xi\eta}(x_i) \frac{d\omega_{x_i}}{d\lambda}.$$

2. Aber dieser Satz lässt sich auch umkehren. Nahm man nämlich alle algebraischen Functionen von ξ, welche in $x_1, \ldots x_r$ zu λ (je in 1ter Ordnung) werden, so erhielt man alle möglichen Werthsysteme der $c_1', \ldots, c_r'$, welche die p Gleichungen (3′) befriedigen können. Dabei kann man auch $d\lambda$ noch einen willkürlichen festen, unendlich kleinen Werth geben. Daher werden auch die aus algebraischen Functionen berechneten $d\omega_{x_i} = c_i' d\lambda$ keinen weiteren Bedingungen unterliegen, als den Gleichungen (5), und man kann somit den Satz aussprechen:

Sind r Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_r$ von f gegeben und bedeutet $d\omega_{x_1}, \ldots, d\omega_{x_r}$ irgend ein Werthsystem der Differentialform $d\omega_x = \frac{(c\,x\,dx)}{f_c(x)}$ in diesen *r Punkten, für welches die p Gleichungen* (5) *bestehen, so existirt eine algebraische Function* $\frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ *von* ξ, *welche höchstens in jenen Punkten* $x_1 \ldots x_r$ *einen beliebig gegebenen Werth* λ (*je in* 1[ter] *Ordnung*), *in den Punkten* $x_1 + dx_1, \ldots, x_r + dx_r$ *den dem* λ *benachbarten, sonst beliebig gegebenen Werth* $\lambda + d\lambda$ *annimmt. Diese Function ist durch* (6) *gegeben, d. h. durch*

$$(7) \qquad \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi) - \lambda\chi(\xi)} - \frac{\chi(\eta)}{\psi(\eta) - \lambda\chi(\eta)} = \sum_1^r{}^l P_{\xi\eta}(x_l)\frac{d\omega_{x_l}}{d\lambda}$$

$$= \int_\eta^\xi d\omega_\xi\left[\sum_1^r{}^l B_\xi(x_l)\frac{d\omega_{x_l}}{d\lambda}\right],$$

wo der Weg von η nach ξ beliebig ist, wenn er nur die Punkte x_l nicht enthält.

Mit anderen Worten:

Die Gleichungen (5) *stellen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dar, dass die Punktgruppe*

$$x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2, \ldots, x_r + dx_r$$

der Punktgruppe

$$x_1, x_2, \ldots, x_r$$

corresidual sei.

3. Durch den Satz von Nr. 2 ist die *vollständige Integration des Systems von p Differentialgleichungen*

$$(5) \qquad \sum_1^r{}^l \varphi_\varkappa(x_l)\,d\omega_{x_l} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

geleistet. In diesem Sinne lässt sich derselbe so fassen:

Die allgemeinste Lösung des Systems (5) *ist gegeben durch diejenigen Punktgruppen*

$$x_1, x_2, \ldots, x_r,$$

welche irgend einer gegebenen Punktgruppe

$$y_1, y_2, \ldots, y_r$$

corresidual sind.

Als Integrationsconstanten sind dabei, wenn die willkürlich gegebene Gruppe $(y_1, \ldots, y_r)$ einer ∞^ϱ-Schaar angehört, in der $y_1, y_2, \ldots, y_\varrho$ beweglich sind, die Werthe von $y_{\varrho+1}, y_{\varrho+2}, \ldots, y_r$ anzusehen. Es ist $\varrho = r - p + \sigma$, wenn σ die Bedeutung von Nr. 2, § 11 hat, dass σ linear unabhängige Curven φ durch die Gruppe $(y_1 \ldots y_r)$, also auch durch $(x_1, \ldots, x_r)$, gehen.

Man kann natürlich für diese Lösung nach (5) auch schreiben:

$$(8)\qquad \sum_1^r{}^l \int_{y_l}^{x_l} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p);$$

aber in diesen Integralausdrücken sind die Integrationswege von den y_l nach den x_l durch (5) bestimmt, d. h. derart, dass die Integralsummen von (8) bei gegebenen y_l und variablen x_l *fortwährend* gleich 0 bleiben sollen. Hierbei bleiben nur die Wege von ϱ der Variablen, etwa die von $y_1, y_2, \ldots, y_\varrho$ ausgehenden, willkürlich; die übrigen $r-\varrho$ Wege sind durch diese (endlich vieldeutig) bestimmt: die Summen (8) sind über „corresiduale Wegsysteme" genommen, wie ich sagen will.

Der Satz dieser Nummer spricht das *Abel'sche Differentialtheorem für die Formen erster Gattung aus.*

Es wird kaum nöthig sein, hier darauf hinzuweisen, dass dieser Satz verschieden ist von der Umkehr des Abel'schen Theorems für *Integrale erster Gattung*; da die letztere aussagt, dass ein Gleichungssystem der Art (8), wo jedoch die Wege von den y_l nach den x_l nichtcorresiduale sind, d. h. *nicht* der Bedingung unterworfen werden, bei festen y_l und variablen x_l die Integralsummen fortwährend zu 0 zu machen — wo also Gleichungen (5) nicht existiren —, doch nur auf eine Gruppe $(x_1, \ldots, x_r)$ führt, die zur Gruppe $(y_1, \ldots, y_r)$ corresidual ist. Dieses letztere Theorem ist hier als specieller Fall des sog. Umkehrproblems zu behandeln (s. § 15, Nr. 4); in den Anwendungen jedoch wird nur das Differentialtheorem benutzt werden.

Zu dem Vorigen ist noch zu bemerken, dass die Anwendung der Gleichung (1), Nr. 1 verlangte, dass die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_r$ endlich von einander verschieden sind. Dies tritt in der That in der Formel (1') ein, da zu diesem Zwecke der Werth λ nur genügend allgemein zu nehmen ist. Wenn dann in der oberen Grenze von (8) auch einige der x_l zusammenfallen sollten, so bleiben die Sätze von Nr. 2 und Nr. 3 doch bestehen, da dieselben bei *beliebigem* Grenzübergange zu diesen Stellen existiren.

4. Dem Theorem von Nr. 3 stellt sich *das Abel'sche Differentialtheorem für Formen zweiter Gattung erster Ordnung* an die Seite, das, unter den Bedingungen (5), in den Gleichungen (6) ausgesprochen ist; oder in Integralform, indem man (6) nach λ, von $\lambda = \lambda_0$ bis $\lambda = \lambda_1$, wobei

$$\begin{aligned} \psi(y_l) - \lambda_0\chi(y_l) &= 0 \\ \psi(x_l) - \lambda_1\chi(x_l) &= 0 \end{aligned} \qquad (l = 1, 2, \ldots, r),$$

integrirt:

(9)
$$\sum_1^r {}_l \int_{y_l}^{x_l} D_\xi P_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x = \sum_1^r {}_l \int_{y_l}^{x_l} B_\xi(x)\, d\omega_x$$
$$= D_\xi \lg \frac{\psi(\xi) - \lambda_0 \chi(\xi)}{\psi(\xi) - \lambda_1 \chi(\xi)} = \frac{1}{r}(\lambda_1 - \lambda_0) \frac{(f\psi\chi)_{x=\xi}}{[\psi(\xi) - \lambda_0\chi(\xi)]\,[\psi(\xi) - \lambda_1\chi(\xi)]}.$$

Die Integrationswege von den y_l nach den x_l sollen dabei ein corresiduales System bilden.

Setzt man insbesondere $\lambda_0 = \infty$, $\lambda_1 = 0$; wird also die Function $\frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}$ in den $\xi = y_l$ zu 0, in den $\xi = x_l$ zu ∞, so hat man

(9′)
$$\sum_1^r {}_l \int_{y_l}^{x_l} D_\xi P_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x = \sum_1^r {}_l \int_{y_l}^{x_l} B_\xi(x)\, d\omega_x$$
$$= D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} = \frac{1}{r} \frac{(f\psi\chi)}{\psi(\xi)\chi(\xi)}.$$

Das entsprechende *Theorem für die Formen* 3^{ter} *Gattung* entsteht hieraus durch Integration nach ξ auf irgend einem die Wege von den y_l nach den x_l nicht schneidenden Wege von η nach ξ. Sei, wie in § 13:

(10)
$$\int_\eta^\xi B_\xi(x)\, d\omega_\xi = \int_\eta^\xi B_x(\xi)\, d\omega_\xi = \mathrm{X}_{\xi\eta}(x),$$

so wird aus (9)

(11)
$$\sum_1^r {}_l \int_{y_l}^{x_l} P_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x = \sum_1^r {}_l \int_{y_l}^{x_l} \mathrm{X}_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x$$
$$= \lg \left\{ \frac{\psi(\chi) - \lambda_0\chi(\xi)}{\psi(\xi) - \lambda_1\chi(\xi)} \cdot \frac{\psi(\eta) - \lambda_1\chi(\eta)}{\psi(\eta) - \lambda_0\chi(\eta)} \right\}.$$
$$= \lg \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda' - \lambda_1} \cdot \frac{\lambda'' - \lambda_1}{\lambda'' - \lambda_0},$$

wenn

$$\psi(\xi) - \lambda'\chi(\xi) = 0,$$
$$\psi(\eta) - \lambda''\chi(\eta) = 0;$$

oder aus (9′), für $\lambda_0 = \infty$, $\lambda_1 = 0$, zu

(11′)
$$\sum_1^r {}_l = \lg \frac{\chi(\xi)\cdot\psi(\eta)}{\psi(\xi)\cdot\chi(\eta)} = \lg \frac{\lambda''}{\lambda'},$$

wo der für den Logarithmus zu nehmende Werth noch von dem Wege von η nach ξ, d. h. von λ'' nach λ' abhängt.

Endlich wird das (9′) entsprechende *Theorem für die Formen* 2^{ter} *Gattung* ν^{ter} *Ordnung, aus* (9′):

$$(12)\quad \sum_1^r{}^l \int_{y_l}^{x_l} \mathsf{A}_\xi^{(\nu)}(x)\, d\omega_x = \sum_1^r{}^l \int_{y_l}^{x_l} B_\xi^{(\nu)}(x)\, d\omega_x = \Delta_\xi^{(\nu-1)} D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}\,.$$

5. Um das Abel'sche Differentialtheorem für eine *beliebige algebraische Form*

$$\frac{\mathsf{M}(x)}{\mathsf{N}(x)}$$

zu erhalten, welche die Punkte $x = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ zu Unendlichkeitspunkten von den bez. Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ habe, wird man diese Form nach § 3 und § 10 in Normalformen zerlegen, und erhält dann nach Nr. 4 dieses Paragraphen eine Darstellung (für $\lambda_0 = \infty$, $\lambda_1 = 0$):

$$(13)\qquad \sum_1^r{}^l \int_{y_l}^{x_l} \frac{\mathsf{M}(x)}{\mathsf{N}(x)}\, d\omega_x = \sum_1^s{}^j \sum_1^{\nu_j-1}{}^i \gamma_{ji} \cdot \Delta_{\xi_j}^{(i-1)} D_{\xi_j} \lg \frac{\chi(\xi_j)}{\psi(\xi_j)} + \sum_1^s{}^j \gamma_j \lg \frac{\chi(\xi_j)}{\psi(\xi_j)},$$

wo

$$(13')\qquad \sum_1^s{}^j \gamma_j = 0,$$

wo ferner die Integrationswege von den y_l nach den x_l ein corresiduales System bilden sollen und die Werthe der einzelnen Logarithmen von den Wegen zwischen dem beliebig gewählten Punkte η und den Punkten ξ_j abhängen, Wege, die bis auf die Bedingung, die von den y_l nach den x_l nicht zu schneiden, beliebig sind.

Besonders einfach wird die rechte Seite der Gleichung (13) in dem ganz speciellen Falle, dass in dem Curvenbüschel

$$\psi(\xi) - \lambda\,\chi(\xi) = 0,$$

eine Curve existirt, welche zugleich durch die Parameterpunkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ hindurchgeht, d. h. wenn $\frac{\psi(\xi)}{\chi(\xi)}$ in $\xi_1, \ldots, \xi_s$ denselben Werth λ' annimmt. Alsdann verschwindet nämlich, wegen (13′), die Summe der logarithmischen Glieder; aber auch die Summe der von den verschiedenen Werthen dieser Logarithmen herrührenden Unbestimmtheiten. Um dies letztere zu sehen, braucht man nur die Formel, aus welcher (13) durch Integration nach λ entstand, also die (7) analoge Formel für

$$\sum_1^r{}^l \frac{\mathsf{M}(x_l)}{\mathsf{N}(x_l)}\, d\omega_{x_l},$$

ins Auge zu fassen; in welcher Summe der bezügliche Theil zu

$$\sum_j \gamma_j P_{\xi_j \eta}(x_l)\, d\omega_{x_l} = d\lambda\left(\frac{1}{\lambda' - \lambda} - \frac{1}{\lambda'' - \lambda}\right)\sum_j \gamma_j = 0$$

wird, wegen (13'). Hat die Curve $\psi(\xi) - \lambda'\chi(\xi) = 0$ die weitere Eigenschaft, in den Punkten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ die Grundcurve bez. in den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ zu treffen, so wird zugleich

$$\Delta_{\xi_j}^{(i-1)} D_{\xi_j} \frac{\chi(\xi_j)}{\psi(\xi_j)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \nu_j - 1 \\ j = 1, 2, \ldots, s \end{pmatrix}.$$

Man hat also den Satz:

Existirt in dem Curvenbüschel

$$\psi(\xi) - \lambda\chi(\xi) = 0,$$

dessen Curven die Grundcurve f in ∞^1 Gruppen von je r Punkten treffen, von welchen Gruppen eine (für $\lambda = \infty$) aus den y_l, eine zweite (für $\lambda = 0$) aus den x_l besteht, eine Curve, welche zugleich durch die Parameterpunkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ hindurchgeht, derart, dass $(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ einen Theil einer der ∞^1 Gruppen bildet, so wird die Summe der Integrale (13) *zu einem algebraischen Ausdruck in den ξ_j:*

$$\sum_1^s{}^j \sum_1^{\nu_j - 1}{}^i \gamma_{ji} \Delta_{\xi_j}^{(i-1)} D_{\xi_j} \lg \frac{\chi(\xi_j)}{\psi(\xi_j)}.$$

*Trifft diese Curve die Grundcurve in den Punkten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ bez. ν_1-, ν_2-, $\ldots$, ν_s-punktig, derart, dass $\left(\xi_1^{\nu_1}, \ldots, \xi_s^{\nu_s}\right)$ einen Theil einer der ∞^1 Gruppen bildet, so wird jene Integralsumme zu Null.**)

6. Die Formel (11') für

$$\lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} \cdot \frac{\psi(\eta)}{\chi(\eta)}$$

führt mit Hülfe von Vertauschung von Parameter und Argument auf die Darstellung

$$(14) \qquad \lg \frac{\chi(\xi)\cdot\psi(\eta)}{\psi(\xi)\cdot\chi(\eta)} = \sum_1^r{}^l \int_\eta^\xi \mathrm{X}_{x_l y_l}\, d\omega_\xi = \sum_1^r{}^l \int_\eta^\xi \int_{y_l}^{x_l} B_\xi(x)\, d\omega_\xi\, d\omega_x$$
$$= \sum_l \int_\eta^\xi P_{x_l y_l}(\xi; a_1, \ldots, a_p) + \sum_i \lambda_i \int_\eta^\xi \Phi_i(\xi)\, d\omega_\xi;$$

---

*) Einen ähnlichen allgemeinen Satz findet man schon bei H. Humbert, Sur le théorème d'Abel etc., Nr. 10—12, Journ. de Mathémat. Sér. IV, t. III, 1887; mit dem Unterschiede, dass sich derselbe nicht auf die Unendlichkeitspunkte der *Form* $\frac{\mathsf{M}(x)}{\mathsf{N}(x)}$, sondern auf die Nullpunkte von $\mathsf{N}(x)$ bezieht. In dieser nichtinvarianten Gestalt lässt er daher Ausnahmen zu, während unser Satz *ausnahmslos* gültig ausgesprochen ist.

wo nach (2), § 13:

$$\lambda_i = \sum_l \int_{y_l}^{x_l} B_{a_i}(x)\, d\omega_x = \left[D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)}\right]_{\xi=a_i}$$

(nach (9′) dieses Paragraphen).

Dies ist die aus § 11, Nr. 1 durch Integration nach ξ für den Fall $\nu_l = \mu_{l'} = 1$ hervorgehende Darstellung. Dabei wurde aber das Abel'sche Theorem für Formen dritter, bez. zweiter Gattung doppelt angewandt; und in Folge dessen liefert umgekehrt die Formel von § 11, Nr. 1 vermöge des Vertauschungssatzes nicht schon die Formel (11′) dieses Paragraphen, auch nicht unter Anwendung des Abel'schen Theorems für Integrale erster Gattung ((8) dieses Paragraphen).

In der That schreibt sich jene Formel § 11, Nr. 1 nach (1) des § 13 und (8) dieses Paragraphen so:

$$(15)\quad D_\xi \lg \frac{\chi(\xi)}{\psi(\xi)} - \sum_l \int_{y_l}^{x_l} D_\xi P_{\xi\eta}(x; a_1, \ldots, a_p)\, d\omega_x$$
$$= \sum_1^p {}_i\, \Phi_i(\xi) \cdot \left\{D_{a_i} \lg \frac{\chi(a_i)}{\psi(a_i)} - \sum_l \int_{y_l}^{x_l} E_i(x)\, d\omega_x\right\}.$$

Die linke Seite von (15), ist, nach § 7, Nr. 2, d) und (8) dieses Paragraphen, von den $a_1, \ldots, a_p$ unabhängig, und diese Gleichung sagt nur aus, dass ihre linke Seite eine ganz beliebige φ-Form sei, ohne einen Schluss auf das identische Verschwinden dieser Form zu bieten.

7. Um die Formeln von § 12, Nr. 2 in Integralformeln umzusetzen, denke ich in den beiden corresidualen Gruppen

$$(x;\ x_1, \ldots, x_p),$$
$$(\xi;\ \xi_1, \ldots, \xi_p)$$

die erste als gegeben, von der zweiten ξ als beweglich; so dass $\xi_1, \ldots, \xi_p$ Functionen von ξ werden, für welche nach dem Abel'schen Theorem (5):

$$(16)\qquad \sum_1^p {}_i\, \varphi_\varkappa(\xi_i)\, d\omega_{\xi_i} + \varphi_\varkappa(\xi)\, d\omega_\xi = 0,$$

also

$$(16')\qquad \frac{d\omega_{\xi_i}}{d\omega_\xi} = D_\xi \omega_{\xi_i} = -\Phi_i(\xi;\ \xi_1, \ldots, \xi_p).$$

Somit hat man als Integralgleichung von (6), § 12, wenn auch $(\eta;\ \eta_1, \ldots, \eta_p)$ corresidual zu $(x;\ x_1, \ldots, x_p)$:

$$(17)\qquad \sum_1^p {}^i \int_{\eta_i}^{\xi_i} B_x(\xi)\, d\omega_\xi = -\sum_1^p {}^i \Phi_i(x; x_1, \ldots, x_p) \int_\eta^\xi B_{x_i}(\xi)\, d\omega_\xi,$$

also auch, nach § 12, (8) und (8')

$$(18)\qquad \sum_1^p {}^i \int_{\eta_i}^{\xi_i} B_x(\xi)\, d\omega_\xi + \int_\eta^\xi B_x(\xi)\, d\omega_\xi = P_{\xi\eta}(x; x_1, \ldots, x_p),$$

in welch' letzterer Gleichung (nicht in (17)) die Ausdrücke $B_x(\xi)$ auch durch $D_x P_{xy}(\xi;\ a_1, \ldots, a_p)$ ersetzt werden dürfen.

Diese Darstellung der algebraischen Function $P_{\xi\eta}(x; x_1, \ldots, x_p)$ von ξ unterscheidet sich von der in § 13, (3) gegebenen dadurch, dass hier in allen Integralen 2ter Gattung ein und derselbe Unstetigkeitspunkt als Parameter auftritt, dafür aber die Grenzpunkte verschieden werden; während dort umgekehrt die Grenzpunkte dieselben, die Parameter verschieden waren.

§ 15.

Eindeutigkeit des Jacobi'schen Umkehrproblems.

1. Das Jacobi'sche Umkehrproblem fordert, aus den p Gleichungen

$$(1)\qquad \sum_1^p {}^i \int_{c_i}^{x_i} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = u_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

wo die $c_1, c_2, \ldots, c_p$ feste Punkte sind, das System der p Punkte

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$

von $f = 0$ als Function der p unabhängig-veränderlichen Argumente

$$u_1, u_2, \ldots, u_p$$

zu definiren.

Man gehe vom System

$$(u_1, \ldots, u_p) = (0, \ldots, 0),$$
$$(x_1, \ldots, x_p) = (c_1, \ldots, c_p)$$

aus und auf einem bestimmten Wege U_0 zum System $(u_1, \ldots, u_p)$ hin, so gelange man zu einem System $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$, das mit einem auf *irgend* einem andern Wege U von $(0, \ldots, 0)$ nach $(u_1, \ldots, u_p)$ erlangten Endwerthsystem der $(x_1, \ldots, x_p)$ zu vergleichen ist.

Zu dem Zwecke sei zunächst angenommen, dass das gegebene Werthsystem $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ ein *nicht-singuläres* sei, nämlich ein solches, für welches die Determinante $\sum \pm \varphi_1(c_1) \ldots \varphi_p(c_p)$ der p Gleichungen

$$(2)\qquad \sum_1^p{}^i \varphi_\varkappa(x_i)\, d\omega_{x_i} = du_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

nicht verschwindet; d. h. dass die p Punkte $c_1, c_2, \ldots, c_p$ nicht durch eine Curve φ verknüpft und von einander endlich verschieden seien.

Aus den Gleichungen

$$(3)\qquad \sum_1^p{}^i \int_{c_i}^{y_i} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = v_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

wird man dann die Coordinaten der Punkte y_i (oder gegebene Functionen derselben) nach ganzen positiven aufsteigenden Potenzen der $v_1, v_2, \ldots, v_p$ entwickeln können, gültig in einem Convergenzgebiet G, für das die absoluten Werthe der $v_\varkappa$ unterhalb gewisser endlicher Grössen sind. Innerhalb dieses endlichen Gebiets G sind die y_i eindeutig durch die $v_\varkappa$ bestimmt, unabhängig vom Wege von (0) nach den $(v_\varkappa)$, wenn derselbe nur ebenfalls innerhalb G fällt.

Nun bestimme man*) eine ganze positive Zahl r, so gross, dass

$$v_\varkappa = \frac{u_\varkappa}{r}$$

innerhalb G fällt, während $u_\varkappa$ an irgend einer Stelle der beiden Wege U_0, U oder am Endpunkt $(u_1, \ldots, u_p)$ sich befindet. So erhält man zwei Wege V_0, V innerhalb G; aber zum Endsystem beider, $(v_1 \ldots v_p)$, zugehörig aus (3) nur *ein* Werthsystem $(y_1^0, \ldots, y_p^0)$. Längs dieser Wege wird überall aus (2) und (3):

$$(4)\qquad \sum_1^p{}^i \varphi_\varkappa(x_i)\, d\omega_{x_i} - r \sum_1^p{}^i \varphi_\varkappa(y_i)\, d\omega_{y_i} = 0,$$

und

$$(5)\qquad \sum_1^p{}^i \int_{c_i}^{x_i^0} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x - r \sum_1^p{}^i \int_{c_i}^{y_i^0} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = 0 \quad (\text{längs } V_0,\ U_0),$$

$$(5')\qquad \sum_1^p{}^i \int_{c_i}^{x_i} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x - r \sum_1^p{}^i \int_{c_i}^{y_i^0} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = 0 \quad (\text{längs } V,\ U),$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, p).$$

Die Gleichungen (4) sagen aber, wenn man dieselben erst durch die beiden Systeme

---

*) S. Weierstrass in § 4 seiner Abhandlung „Theorie der Abel'schen Functionen", Cr. J. Bd. 52.

$$r\sum_1^p{}^i\varphi_\varkappa(y_i)\,d\omega_{y_i}+\sum_1^p{}^i\varphi_\varkappa(z)\,d\omega_z=0,$$

$$\sum_1^p{}^i\varphi_\varkappa(x_i)\,d\omega_{x_i}+\sum_1^p{}^i\varphi_\varkappa(z)\,d\omega_z=0\quad(\varkappa=1,2,\ldots,p)$$

ersetzt, und das Abel'sche Differentialtheorem für Formen erster Gattung (§ 14, Nr. 3) doppelt anwendet, aus, dass ein oberes Grenzsystem der $(x_1,\ldots,x_p)$ *existirt*, und zwar, dass sich dasselbe aus dem Grenzsystem $(y_1^0,\ldots y_p^0)$ *algebraisch* ergiebt; nämlich: *zur r-fach gezählten Gruppe der* $(y_1^0,\ldots,y_p^0)$ *nehme man als corresidual die Gruppe bestehend aus der* $(r-1)$*-fach gezählten* $(c_1,\ldots,c_p)$ *und der Gruppe* $(x_1,\ldots,x_p)$.

Die auf dem Wege U *gefundene Gruppe* $(x_1,\ldots,x_p)$ *kann sich daher von der auf dem Wege* U_0 *gefundenen Gruppe* $(x_1^0,\ldots,x_p^0)$ *höchstens dadurch unterscheiden, dass jene dieser corresidual ist. Sind insbesondere* $(x_1^0,\ldots,x_p^0)$ *durch keine Curve* φ *verbunden, so ist die Gruppe* $(x_1,\ldots,x_p)$ *eindeutig durch die* $(u_1,\ldots,u_p)$ *bestimmt. Gehören zu* $(x_1^0,\ldots,x_p^0)$ ∞^α *dieser Gruppe corresiduale Gruppen von je* p *Punkten, so kann man durch geeignete Wege von* $(0,\ldots,0)$ *nach* $(u_1,\ldots,u_p)$ *jedes dieser* ∞^α *Systeme erreichen.*

Die Gruppe $(x_1,\ldots,x_p)$*, oder vielmehr die zugehörige Corresidualschaar, hängt von dem System* $(u_1,u_2,\ldots,u_p)$ *eindeutig ab, für alle endlichen Werthe der* $u_1,u_2,\ldots,u_p$.

Dieser Beweis liefert also die analytische Fortsetzung der symmetrischen Functionen der p Punkte $x_1,\ldots,x_p$ von $u_1,\ldots,u_p$ über das ganze endliche u-Gebiet hin.

2. Der bezügliche Beweis im § 52 der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan zeigt nur, dass dasjenige singuläre Gebiet Γ des u-Raums, für dessen Punkte die symmetrischen Functionen der $x_1,\ldots,x_p$ unbestimmt werden, indem die Determinante $\sum\pm\varphi_1(x_1)\ldots\varphi_p(x_p)$ verschwindet, aus dem u-Raum durch 2 Bedingungen ausgeschieden wird; und dass ausserdem für die symmetrischen Functionen der $x_1,\ldots,x_p$ keine singuläre Stelle existirt. Aber er zeigt nicht, ob die Beschaffenheit von Γ erlaubt, durch analytische Fortsetzung jede Stelle $(u_1,\ldots,u_p)$ zu erreichen, oder, wenn so, ob die *verschiedenen* Wege von $(0,\ldots,0)$ nach $(u_1,\ldots,u_p)$ zum selben Werthe jener Functionen führen.

Diese Lücke lässt sich nun wieder durch das Abel'sche Differentialtheorem für Formen erster Gattung unmittelbar ausfüllen. Denn sei $(u_1',\ldots,u_p')$ eine Stelle von Γ, $(x_1',\ldots,x_p')$ irgend eine Gruppe aus der zugehörigen Corresidual-Schaar der $(x_1,\ldots,x_p)$; so bestimme man p beliebige feste Punkte $a_1,\ldots,a_p$ und p bewegliche Punkte $y_1,\ldots,y_p$ so, dass die beiden Gruppen von je $2p$ Punkten

$$(a_1, \ldots, a_p, \quad x_1', \ldots, x_p'),$$
$$(c_1, \ldots, c_p, \quad y_1, \ldots, y_p)$$

einander corresidual werden, und dass die Gruppe $(y_1, \ldots, y_p)$, welche $(x_1', \ldots, x_p')$ dabei zugehört, nicht durch eine Curve φ verknüpft ist.

Dies geht immer, da man von beliebigen p Punkten $y_1, \ldots, y_p$ *ausgehen* und dazu $a_1, \ldots, a_p$ bestimmen könnte. Man hat dann

$$(6) \quad \sum_1^p {}_i\, \varphi_\varkappa(y_i)\, d\omega_{y_i} = \sum_1^p {}_i\, \varphi_\varkappa(x_i)\, d\omega_{x_i} = du_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p).$$

Da nun für die symmetrischen Functionen der $y_1, \ldots, y_p$ die Stelle $(u_1', \ldots, u_p')$ keine singuläre ist, so kann man den u-Weg diese Stelle beliebig überschreiten lassen, ohne die Eindeutigkeit jener Functionen zu stören. Von diesen hängen aber die symmetrischen Functionen der $x_1, \ldots, x_p$ algebraisch und rational ab; so dass sich dieselben über die Stelle $u_1', \ldots, u_p'$, hinweg analytisch beliebig fortsetzen lassen.

3. Man könnte übrigens jene Lücke auch noch anders ausfüllen, indem sich mit Hülfe des Riemann-Roch'schen Satzes nachweisen liesse, dass das Gebiet Γ in der Nähe jeder Stelle $(u_1', \ldots, u_p')$ desselben nicht mehr als ∞^{p-3} benachbarte singuläre Stellen enthalten kann, also in der That nur $p-2$ Dimensionen besitzt. Im ebenen Raum von $2p$ Dimensionen (für die u als *complexe* Variabeln), mit einem singulären Gebiet Γ von nur $2(p-2)$ Dimensionen, kann aber zwischen irgend zwei Stellen ausserhalb Γ eine Γ nicht treffende Curve gezogen werden, und irgend zwei Curven dieser Art zwischen denselben festen Endpunkten können ohne Berührung von Γ in einander übergeführt werden.

Während der Beweis von Nr. 2 dem noch hinzufügt, dass Γ auch durchsetzt werden darf ohne Störung der Monodromie, zeigt diese Betrachtung von Nr. 3 den eigentlichen Grund der Eindeutigkeit des Jacobi'schen Umkehrproblems. Die Thatsache, dass das singuläre Gebiet um 4 Dimensionen kleiner als das ganze ebene Gebiet, hört nämlich auf, sobald man, statt (1) zu betrachten, ein analoges Problem mit p Integralen 1ter Gattung und p' Variablen x_i hat, für das

4. Aus der Thatsache, dass die Gleichungen (1) eine und nur eine corresiduale Schaar von Lösungen $(x_1, \ldots, x_p)$ zulassen, schliesst man, dass dasselbe für

$$(7) \quad \sum_1^Q {}_i \int^{x_i} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = u_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

eintritt, wenn $Q > p$ ist. Man braucht zu diesem Zwecke nur

$Q-p$ der Grössen x_i willkürlich anzunehmen; oder man wird p Grössen y aus

$$\sum_1^p {}_i \int_{a_i}^{y_i} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = u_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p) \tag{8}$$

bestimmen, und aus dem Abel'schen Theoreme, wegen

$$\sum_1^Q {}_i\, \varphi_\varkappa(x_i)\, d\omega_{x_i} - \sum_1^p {}_i\, \varphi_\varkappa(y_i)\, d\omega_{y_i} = 0, \tag{8'}$$

die x-Schaar. Ferner muss dasselbe für $Q < p$ eintreten, wenn überhaupt eine Lösung existirt; man wird dann entweder $p - Q$ Integrale, je zwischen gleichen festen Grenzen, zu (7) zufügen, oder wieder aus (8), (8') diese Schaar finden. Ist insbesondere $u_\varkappa = 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$, so genügt den Gleichungen (7) für jeden Werth von Q die Lösung

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2, \ldots, x_Q = c_Q;$$

also hat (7) keine anderen Lösungen, als die der Gruppe $(c_1, \ldots, c_Q)$ corresiduale Schaar von Gruppen von je Q Punkten. Dieses ist die in § 14, Nr. 3 erwähnte *Umkehr des Abel'schen Theorems für Integrale erster Gattung.*

§ 16.

Die Transcendente $\mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ und die Function $\omega(v_1, v_2, \ldots, v_p)$.

1. *Definition der Transcendenten.* Es seien wieder die Gleichungen des Jacobi'schen Umkehrproblems, (1), § 15, vorgelegt

$$\sum_1^p {}_i \int_{c_i}^{x_i} \varphi_\varkappa(x)\, d\omega_x = u_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p), \tag{1}$$

und die zugehörigen Wege $c_i - x_i$ gegeben, oder bestimmt gedacht. Dann definire ich T durch

$$\mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c} \equiv \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x_1, x_2, \ldots, x_p}{c_1, c_2, \ldots, c_p} = \sum_1^p {}_i \int_{c_i}^{x_i} \mathsf{X}_{\xi\eta}(x)\, d\omega_x \tag{2}$$

$$\equiv \sum_1^p {}_i \int_\eta^\xi \mathsf{X}_{x_i c_i}(\xi)\, d\omega_\xi,$$

wo die Summe über die kanonischen Integrale dritter Gattung (§ 13, Nr. 1) erstreckt ist, und wo die Integrationswege $c_i - x_i$ diejenigen von (1) sein sollen, der Weg $\eta - \xi$ die Wege $c_i - x_i$ nicht schneiden soll, im Uebrigen beliebig ist.

Ferner (§ 13, Nr. 1):

$$(3)\qquad D_\xi \mathrm{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c} \equiv D_\xi \mathrm{T}_{\xi\eta}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_p \\ c_1, & c_2, & \ldots, & c_p \end{pmatrix} = \sum_1^p {}_i \int_{c_i}^{x_i} B_\xi(x)\, d\omega_x$$

$$= \sum_1^p {}_i \mathrm{X}_{x_i c_i}(\xi),$$

mit denselben Wegen $c_i - x_i$.

Man hat

$$(4)\qquad \mathrm{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c} = \mathrm{T}_{\xi\zeta}\binom{x}{c} - \mathrm{T}_{\eta\zeta}\binom{x}{c}$$

bei geeigneter Wahl der Wege $\zeta - \xi,\ \zeta - \eta$.

Die Transcendente $\mathrm{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ ist, da das System $(x_1, \ldots, x_p)$ bei nicht-singulären Werthen der $u_1, \ldots, u_p$ sich eindeutig durch diese p Grössen bestimmt, als Function der $p+2$ Grössen $u_1, \ldots, u_p, \xi, \eta$ zu untersuchen. Für die Abhängigkeit von den $u_1, \ldots, u_p$ findet man:

$$(5)\qquad \frac{\partial \mathrm{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}}{\partial u_\varkappa} = \sum_1^p {}_i \mathrm{X}_{\xi\eta}(x_i)\frac{\partial \omega_{x_i}}{\partial u_\varkappa} \equiv \sum_1^p {}_i \frac{\partial \omega_{x_i}}{\partial u_\varkappa}\int_\eta^\xi B_{x_i}(\xi)\, d\omega_\xi.$$

Aber aus (1)

$$(6)\qquad \frac{\partial \omega_{x_i}}{\partial u_\varkappa} = \frac{1}{\Phi}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial(\varphi_\varkappa(x_i))} = \Phi_i(a_\varkappa;\ x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

wo

$$\Phi = \sum \pm \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_p(x_p);\quad \varphi_\varkappa(a_\varkappa) = 1,\quad \varphi_j(a_\varkappa) = 0 \text{ für } j \neq k.$$

Also

$$(7)\qquad \frac{\partial \mathrm{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}}{\partial u_\varkappa} = \sum_1^p {}_i \Phi_i(a_\varkappa;\ x_1, \ldots, x_p)\int_\eta^\xi B_{x_i}(\xi)\, d\omega_\xi$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, p).$$

2. *Uebergang zu Functionen von p Variablen.* Die Gleichungen (7), verbunden mit Gleichung (17) von § 14, führen dazu, aus den $p+1$ Variablen $x_1, \ldots, x_p, \xi$ p Combinationen derselben $\xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p}$, und Analoges in Bezug auf η, einzuführen, indem man annimmt, dass die 3 Gruppen von je $p+1$ Punkten

$$(a_\varkappa;\ x_1, x_2, \ldots, x_p),$$
$$(\xi;\ \xi_{\varkappa 1}, \xi_{\varkappa 2}, \ldots, \xi_{\varkappa p}),$$
$$(\eta;\ \eta_{\varkappa 1}, \eta_{\varkappa 2}, \ldots, \eta_{\varkappa p})$$

zu einander corresidual sind. So wird*)

*) S. Formel (32) der Weierstrass'schen Note in Cr. J. 47.

$$(8)\qquad \frac{\partial \mathrm{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}}{\partial u_\varkappa} = -\sum_1^p{}^i\int_{\eta_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\,d\omega_\xi.$$

wo die Wege rechts durch das Abel'sche Theorem bestimmt sind. Schreibt man das Abel'sche Theorem für die ersten beiden Gruppen in der Form

$$(9)\qquad \sum_1^p{}^i\int_{c_i}^{\xi_{\varkappa i}} \varphi_h(x)\,d\omega_x = u_h - \int_\zeta^\xi \varphi_h(x)\,d\omega_x + \int_\zeta^{a_\varkappa} \varphi_h(x)\,d\omega_x$$

$$\equiv v_h + \int_\zeta^{a_\varkappa} \varphi_h(x)\,d\omega_x \quad (h=1,2,\ldots,p),$$

für die erste und dritte Gruppe:

$$(9')\qquad \sum_1^p{}^i\int_{c_i}^{\eta_{\varkappa i}} \varphi_h(x)\,d\omega_x = u_h - \int_\zeta^\eta \varphi_h(x)\,d\omega_x + \int_\zeta^{a_\varkappa} \varphi_h(x)\,d\omega_x$$

$$\equiv w_h + \int_\zeta^{a_\varkappa} \varphi_h(x)\,d\omega_x \quad (h=1,2,\ldots,p),$$

so sieht man, dass der Differentialquotient (8) die Differenz zweier Functionen wird, von denen die eine nur von den p Grössen

$$(10)\qquad v_h = u_h - \int_\zeta^\xi \varphi_h(x)\,d\omega_x \quad (h=1,2,\ldots,p),$$

die andere von den p Grössen

$$(10')\qquad w_h = u_h - \int_\zeta^\eta \varphi_h(x)\,d\omega_x \quad (h=1,2,\ldots,p),$$

wo ζ ein beliebiger fester Punkt ist, abhängt; denn auch die Wege rechts in (8) setzen sich aus den Wegen $c_i - \xi_{\varkappa i}$ und $\eta_{\varkappa i} - c_i$ von (9) und (9') genau zusammen. Diese Zerlegung geht also weiter als die durch Gleichung (4) angezeigte.

Aus (8) folgt:

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial u_h}\sum_1^p{}^i\int_{\eta_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\,d\omega_\xi = \frac{\partial}{\partial u_\varkappa}\sum_1^p{}^i\int_{\eta_{h i}}^{\xi_{h i}} B_{a_h}(\xi)\,d\omega_\xi.$$

Hier kommen die mit den u sich ändernden Grössen nur in den oberen und unteren Grenzen der Integrale vor; da nun zwei Integrale

$$\int_{\alpha}^{z} \psi(\xi)\, d\omega_\xi, \quad \int_{\beta}^{z} \psi(\xi)\, d\omega_\xi$$

bei derselben oberen Grenze z, aber mit verschiedenen unteren Grenzen oder auf verschiedenen Wegen genommen, sich nur um eine von z unabhängige Grösse unterscheiden können, so kann man, wenn man einführt

$$(12) \qquad Q_\xi = \frac{\partial}{\partial u_\varkappa} \sum_1^p{}_i \int_{\alpha_i}^{\xi_{hi}} B_{a_h}(\xi)\, d\omega_\xi - \frac{\partial}{\partial u_h} \sum_1^p{}_i \int_{\alpha_i}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\, d\omega_\xi,$$

wo die α_i beliebige feste Punkte und die Wege beliebig sind, die Gleichung (11) auch so schreiben:

$$(13) \qquad Q_\xi = Q_\eta,$$

d. h. *Q_ξ ist von ξ unabhängig:*

$$(13') \qquad D_\xi Q_\xi = 0.$$

Diese Gleichung führt aber auch unmittelbar zur Bestimmung der Abhängigkeit von Q_ξ von den $u_1, \ldots, u_p$. Wegen (10) schreibt sich (12) zunächst:

$$(14) \quad Q_\xi = \frac{\partial}{\partial v_\varkappa} \sum_1^p{}_i \int_{\alpha_i}^{\xi_{hi}} B_{a_h}(\xi)\, d\omega_\xi - \frac{\partial}{\partial v_h} \sum_1^p{}_i \int_{\alpha_i}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\, d\omega_\xi \equiv F(v_1, \ldots, v_p);$$

also aus (13') und (10):

$$\sum_1^p{}_i \frac{\partial F(v_1, \ldots, v_p)}{\partial v_i} D_\xi v_i = -\sum_1^p{}_i \frac{\partial F(v_1, \ldots, v_p)}{\partial v_i} \varphi_i(\xi) = 0.$$

Da man nun auch die $v_1, \ldots, v_p$, ξ als unabhängige Variable betrachten darf, und da zwischen den $\varphi_i(\xi)$ keine lineare Relation besteht, so wird

$$\frac{\partial F(v_1, \ldots, v_p)}{\partial v_i} \equiv \frac{\partial Q_\xi}{\partial v_i} = 0,$$

d. h. *Q_ξ ist auch von den v_i, also den u_i, unabhängig.* Setzt man $u_h = u_{\varkappa}$, so zeigt sich, dass

$$(15) \qquad Q_\xi \equiv 0.^{*)}$$

3. *Einführung der Functionen von p Argumenten.* Die Gleichung (15) giebt, wenn man Q_ξ in der Form (14) schreibt, Anlass zur Einführung einer solchen Function von $v_1, \ldots, v_p$, welche einen Theil der in Nr. 2 genannten Zerlegung des Differentialquotienten (8), also auch von

*) S. Weierstrass in Cr. J. Bd. 49, Formel (33).

$$\frac{\partial \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}}{\partial v_k},$$

bildet. Ich setze

$$(16)\qquad -\sum_{1}^{p}{}_{i}\int_{\alpha_i}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\, d\omega_\xi = \omega_\varkappa(v_1, v_2, \ldots, v_p) \equiv \omega_\varkappa(v),$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, p),$$

bei willkürlichem festem Punkte ζ von (10), willkürlichen festen Punkten α_i und willkürlichen Wegen $\alpha_i - \xi_{\varkappa i}$. Die Gleichung (15) sagt dann aus, *dass*

$$\omega_1(v)\, dv_1 + \omega_2(v)\, dv_2 + \cdots + \omega_p(v)\, dv_p$$

das vollständige Differential einer Function

$$\omega(v_1, \ldots, v_p) \equiv \omega(v)$$

von den p Grössen

$$v_1, v_2, \ldots, v_p$$

ist.

Die so zu erhaltende Function $\omega(v)$ hängt aber, ausser von den p Argumenten v, auch noch von dem festen Punkte ζ ab. Denn lässt man die v constant, ändert aber ζ, so muss man nach (10) entweder die $x_1, \ldots, x_p$ oder ξ ändern, also jedenfalls die $\xi_{\varkappa i}$ und damit, nach (16), die $\omega_\varkappa(v)$. Die $\omega_\varkappa(v)$ hängen ferner von den festen Punkten α_i ab, aber nach (16) nur je in einer additiven Constanten; $\omega(v)$ also in einem Gliede von der Form

$$\sum_\varkappa \psi_\varkappa(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)\, v_\varkappa.$$

Endlich hängt auch $\omega(v)$ von den p festen Punkten $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ ausserhalb der p Argumente v ab.

Alle diese Vorkommnisse lassen sich nun, wie im folgenden Paragraphen gezeigt wird, heben, wenn man diejenige Transformation der Argumente v vornimmt, welche im Clebsch-Gordan'schen Werke eingeführt ist, und auch die unteren Grenzen α_i in (16) entsprechend ändert, also die $\omega_\varkappa(v)$ um Constanten, was ihre Eigenschaft als partielle Differentialquotienten einer Function nicht stört.

Die durch (8) direct angezeigte Zurückführung von $\mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ auf diese Function (oder auf $\omega(v)$), und die Untersuchung des Charakters dieser Function wird erst nachher ausgeführt werden.

§ 17.

Die Function $\Omega(V_1, V_2, \ldots, V_p)$.

1. *Transformation der Argumente* $v_\varkappa$. Der erste Gesichtspunkt ist der, dass man in Gleichungen (10) des § 16 die unteren Grenzpunkte c_i der u_h so von ξ abhängig macht, dass die v_h, bei gegebenen $\xi, x_1, \ldots, x_p$, von ξ unabhängig werden; d. h. dass

$$(1)\qquad \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{c_i'} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \int_{\xi}^{\xi'} \varphi_h(x)\, d\omega_x = 0,$$

wenn die c' so von ξ' abhängen, wie die c_i von ξ. Hiernach soll sein:

$$(\xi;\ c_1', \ldots, c_p') \text{ corres. zu } (\xi';\ c_1, \ldots, c_p),$$

was auf die allgemeinste Weise geschehen kann, indem man $p+1$ willkürliche Punkte $\eta, C_1, \ldots, C_p$ von f annimmt, die Geraden $(\eta\xi)$ und $(\eta\xi')$ legt mit den bezügl. weiteren Schnittpunkten $s_1, \ldots, s_{m-2}$ und $s_1', \ldots, s_{m-2}'$ und dann die c, c' dadurch bestimmt, dass man die s, C, c durch eine zu f adjungirte Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, die s', C, c' durch eine zweite solche verbindet. Dann hängen bei gegebenen v die $\omega_\varkappa(v)$ nicht mehr von ξ ab, wenn man die α_i beliebig fest annimmt; wohl aber von den Punkten $\eta, C_1, \ldots, C_p$.

Man lasse aber η an ξ heranrücken, ziehe also in ξ die Tangente von f, und bestimme auch die C so als Functionen von ξ, dass die Punkte c_i bez. den Punkten C_i benachbart werden; d. h. man lege durch die $m-2$ weiteren Schnittpunkte t_j der Tangente in ξ eine zu f adjungirte Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche f in noch p Punkten berühre. Solcher Curven giebt es eine endliche Anzahl, wenn die p Punkte durch keine Curve φ verknüpft sein sollen; es sei eine solche „eigentliche" Berührungscurve gewählt, bei der keiner der p Punkte mit ξ zusammenfällt, und solche p besonderen Punkte $c_i = C_i$ seien mit

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$$

bezeichnet. Diese Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_p$ hängen nur von ξ ab. Bestimmt man jetzt die $\xi_1', \ldots, \xi_p'$ so nach (1), dass

$$(\xi;\ \xi_1', \ldots, \xi_p') \text{ corres. zu } (\xi';\ \xi_1, \ldots, \xi_p),$$

so werden auch die $\xi_1', \ldots, \xi_p'$ die Berührungspunkte einer eigentlichen adj. Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche noch durch die weiteren $m-2$ Schnittpunkte t_j' der Tangente in ξ' geht; Punkte, die also zwar eindeutig aus $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_p$ sich ergeben, aber doch von ξ' allein (vieldeutig) abhängen. In der That folgt aus (1) und aus

$$2\int_{\xi}^{\xi'} \varphi_h(x)\, d\omega_\varkappa + \sum_1^{m-2}{}_j \int_{t_j}^{t_j'} \varphi_h(x)\, d\omega_x = 0$$

auch:

$$2\sum_1^p{}_i\int_{\zeta_i}^{\zeta_i'}\varphi_h(x)\,d\omega_x+\sum_1^{m-2}{}_j\int_{t_j}^{t_j'}\varphi_h(x)\,d\omega_x=0.$$

[Es ist dabei vom invarianten Standpunkt aus selbstverständlich, dass man auch, ohne Aenderung des Resultats, definiren könnte: man nehme irgend eine f in ζ berührende Curve φ; durch deren $2p-4$ weitere Schnittpunkte t_j eine eigentliche $\Phi^{(2)}$, welche f in noch p Punkten $\zeta_1,\ldots,\zeta_p$ berühre, analog für ζ'; so gilt (1) für

$$c_i=\zeta_i,\quad c_i'=\zeta_i'$$

und alles Uebrige. Die Punkte $(\zeta,\ t_j,\ \zeta_i)$ bilden dann die $3(p-1)$ Berührungspunkte einer überall berührenden $\Phi^{(3)}$. Aus einer ∞^{2p-3}-Schaar solcher Berührungsgruppen, die ein System bilden, sind die hier vorkommenden p Punkte $\zeta_1,\ldots,\zeta_p$ offenbar dadurch ausgezeichnet, dass sie sich mit ∞^{p-2} (statt ∞^{p-3}) Gruppen von je $2p-3$ Punkten zu Gruppen des Systems ergänzen, nämlich mit den zu $(\zeta,\ t_1,\ldots,t_{2p-4})$ corresidualen Gruppen, d. i. mit den Gruppen, welche die durch ζ gehenden φ aus f ausschneiden*). Man kann auch sagen: die p Punkte $\zeta_1,\ldots,\zeta_p$, doppelt gezählt, bilden eine Gruppe von $2p$ Punkten, welche corresidual ist zur Gruppe $(\zeta\zeta l_1,\ldots,l_{2p-2})$, wo die $l_1,\ldots,l_{2p-2}$ der Schnitt von f mit irgend einer φ-Curve sind.]

Wir setzen nun, statt der u und v von (1) und (10) des § 16:

$$(2)\quad U_h=\sum_1^p{}_i\int_{\zeta_i}^{x_i}\varphi_h(x)\,d\omega_x,$$

$$(3)\quad V_h=\sum_1^p{}_i\int_{\zeta_i}^{x_i}\varphi_h(x)\,d\omega_x-\int_{\zeta}^{\xi}\varphi_h(x)\,d\omega_x=U_h-\int_{\zeta}^{\xi}\varphi_h(x)\,d\omega_x$$

$$=\sum_1^p{}_i\int_{\xi_i}^{x_i}\varphi_h(x)\,d\omega_x,$$

$$(h=1,2,\ldots,p),$$

wenn $(\xi;\ \zeta_1,\ldots,\zeta_p)$ corres. zu $(\zeta;\ \xi_1,\ldots,\xi_p)$.

Die Argumente V_h sind jetzt von ζ unabhängig geworden. Die linke Seite von (16), § 16, wird daher ebenfalls von ζ unabhängig und eine Function der $V_1,\ldots,V_p$; hängt aber immer noch von den $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ und den $a_1,\ldots,a_p$ ab. Die x_i und ξ dagegen treten nur in der Verbindung der $V_1,\ldots,V_p$ ein; diese aber, wie die ξ_{xi}, also

*) S. die Bemerkung von Frobenius, Gött. Nachr. vom 29. März 1888.

die linke Seite von (16), § 16, ändern sich nicht, wenn man die x_i, ξ durch solche $p+1$ Punkte x_i', ξ' ersetzt, für welche

$$(\xi';\ x_1, \ldots, x_p) \text{ corresidual zu } (\xi;\ x_1', \ldots, x_p').$$

2. *Einführung der* $\Omega_\varkappa(V)$ *und von* $\Omega(V)$. Nach (10), § 16 hat man auch:

$$(4)\qquad V_h = \sum_1^p {}^i \int_{\zeta_i}^{\xi_{\varkappa i}} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{a_\varkappa} \varphi_h(x)\, d\omega_x$$

$$= \sum_1^p {}^i \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} \varphi_h(x)\, d\omega_x,$$

wenn

$$(a_\varkappa;\ x_1 x_2, \ldots, x_p) \text{ corres. zu } (\xi;\ \xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p}),$$
$$(a_\varkappa;\ \zeta_1 \zeta_2, \ldots, \zeta_p) \quad ,, \quad ,, \quad (\xi;\ a_{\varkappa 1}, \ldots, a_{\varkappa p}),$$

also auch

$$(a_\varkappa;\ \xi_1 \xi_2, \ldots, \xi_p) \quad ,, \quad ,, \quad (\xi;\ a_{\varkappa 1}, \ldots, a_{\varkappa p}),$$

wo also die $a_{\varkappa 1}, \ldots, a_{\varkappa p}$ nur von $a_\varkappa$ abhängen. (Die Wege $a_{\varkappa i} - \xi_{\varkappa i}$ hängen nach dem Abel'schen Theorem ab von den Wegen $\zeta_i - x_i$). Man schafft daher aus der linken Seite von (16), § 16 die $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ weg und führt sie *in eine Function der* $V_1, \ldots, V_p$, *und ausserdem nur von* $a_\varkappa$, dadurch über, dass man dort setzt

$$\alpha_i = a_{\varkappa i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

So führen wir die folgende, von $\omega_\varkappa(v)$ um eine Constante verschiedene Function ein

$$(5)\qquad \Omega_\varkappa(V_1, \ldots, V_p) \equiv \Omega_\varkappa(V) = -\sum_1^p {}^i \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\, d\omega_\xi.$$

Diese Summe von kanonischen Integralen zweiter Gattung, mit dem gemeinsamen Parameter $a_\varkappa$ und mit den Wegen von (4), ist bei nicht speciellem ξ endlich, da keiner der Punkte $a_{\varkappa 1}, \ldots, a_{\varkappa p}$ wegen der Annahme über die zu ζ gehörige Berührungscurve mit $a_\varkappa$ zusammenfällt.

Setzt man $\varkappa = 1, 2, \ldots, p$, so erhält man in (5) p Functionen der Argumente $V_1, \ldots, V_p$, welche sonst nur bezüglich von $a_1, \ldots, a_p$ abhängen und welche die partiellen Differentialquotienten *einer* Function von $V_1, \ldots, V_p$ sind, die ich mit $\Omega(V)$ bezeichne:

$$(6)\qquad \Omega_1(V)\, dV_1 + \Omega_2(V)\, dV_2 + \cdots + \Omega_p(V)\, dV_p = d\Omega(V_1, \ldots V_p)$$
$$\equiv d\Omega(V).$$

Dass diese Function von $a_1, \ldots, a_p$ überhaupt nicht abhängt, wird sich in Nr. 2 des folgenden Paragraphen zeigen. $\Omega(V)$ ist durch (6) bis auf eine additive Constante bestimmt, welche man dazu benutzen kann, $\Omega(0,\ldots,0)$ einen beliebigen numerischen Werth zu ertheilen.

3. *Die $\Omega_\varkappa(V)$ sind ungerade Functionen der Argumente $V_1,\ldots,V_p$:*

(7) $$\Omega_\varkappa(-V_1,\ldots,-V_p)=-\Omega_\varkappa(V_1,\ldots,V_p).$$

Zum Beweise sei

$$-V_h=\sum_1^p{}^i\int_{\xi_i}^{x_i'}\varphi_h(x)\,d\omega_x=\sum_1^p{}^i\int_{a_{\varkappa i}}^{\xi'_{\varkappa i}}\varphi_h(x)\,d\omega_x,$$

so wird, mittels (3) und (4):

$$\sum_1^p{}^i\int_{\xi_i}^{x_i}\varphi_h(x)\,d\omega_x+\sum_1^p{}^i\int_{\xi_i}^{x_i'}\varphi_h(x)\,d\omega_x=0,$$

$$\sum_1^p{}^i\int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}}\varphi_h(x)\,d\omega_x+\sum_1^p{}^i\int_{a_{\varkappa i}}^{\xi'_{\varkappa i}}\varphi_h(x)\,d\omega_x=0;$$

und da diese Gleichungen für alle Werthe der $x_1,\ldots,x_p$ gelten, so sieht man, dass

$$\begin{array}{lll}(x_1,\ldots,x_p,\;\; x_1',\ldots,x_p') & \text{corres. zu} & (\xi_1^2,\ldots,\xi_p^2),\\ (\xi_{\varkappa 1},\ldots,\xi_{\varkappa p},\;\; \xi'_{\varkappa 1},\ldots,\xi'_{\varkappa p}) & \;\;\;,,\quad ,, & (a_{\varkappa 1}^2,\ldots,a_{\varkappa p}^2).\end{array}$$

Die $x_1',\ldots,x_p'$ entstehen also aus den $x_1,\ldots,x_p$, indem man die Tangente f in ξ zieht und durch deren $m-2$ weitere Schnittpunkte und durch die $x_1,\ldots,x_p$ eine adjungirte Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung legt, welche dann f noch in den $x_1',\ldots,x_p'$ schneidet. Ich will sagen:

Gruppe $(x_1',\ldots,x_p')$ ist bezüglich ξ^2 zugeordnet zu Gruppe $(x_1,\ldots,x_p)$.

Ebenso ist

Gruppe $(\xi'_{\varkappa 1},\ldots,\xi'_{\varkappa p})$ bezüglich $a_\varkappa^2$ zugeordnet zu Gruppe $(\xi_{\varkappa 1},\ldots,\xi_{\varkappa p})$.

Bildet man nun die Summe

$$\Omega_\varkappa(V)+\Omega_\varkappa(-V)=-\sum_1^p{}^i\int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}}B_{a_\varkappa}(\xi)\,d\omega_\xi-\sum_1^p{}^i\int_{a_{\varkappa i}}^{\xi'_{\varkappa i}}B_{a_\varkappa}(\xi)\,d\omega_\xi,$$

so wird dieselbe zunächst, nach dem Abel'schen Theorem, (9), § 14, eine algebraische Function von $a_\varkappa$. Aber nach dem Satze von Nr. 5 des § 14 verschwindet diese Function identisch; denn in der Gesammtheit der bezüglich $a_\varkappa$ einander zugeordneten Gruppenpaare von $2p$ Punkten enthält jedes Paar, das einen Punkt in $a_\varkappa$ selbst hat, noch einen zweiten in $a_\varkappa$, indem es aus $(a_\varkappa^2, l_1,\ldots,l_{2p-2})$ besteht, wo $l_1,\ldots,l_{2p-2}$ der Schnitt von f mit einer Curve φ ist. —

Man hätte auch direct von der Forderung ausgehen können, statt der $\omega_\varkappa(v)$ ungerade Functionen aufzustellen, und wäre dann ohne Weiteres auf die in Nr. 2 gegebene Bestimmung der α_i und die in Nr. 1 enthaltene Transformation der Argumente v_i geführt worden.

4. *Zurückführung der* T *auf die* Ω. Man lasse ξ auf gegebenem Wege in η übergehen, und nehme

$$(\xi;\ \xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p}) \text{ corres. zu } (\eta;\ \eta_{\varkappa 1}, \ldots, \eta_{\varkappa p});$$

so erhält man auch ein Wegsystem von den $\xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p}$ zu den $\eta_{\varkappa 1}, \ldots, \eta_{\varkappa p}$, das identisch ist mit dem in Nr. 2 des § 16 betrachteten; und damit sei:

$$(7) \qquad W_h = U_h - \int_\xi^\eta \varphi_h(x)\, d\omega_x = \sum_1^p{}_i \int_{a_{\varkappa i}}^{\eta_{\varkappa i}} \varphi_h(x)\, d\omega_x,$$

$$(8) \qquad \Omega_\varkappa(W_1, \ldots, W_p) \equiv \Omega_\varkappa(W) = -\sum_1^p{}_i \int_{a_{\varkappa i}}^{\eta_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(\xi)\, d\omega_\xi.$$

Dann wird (8), § 16 zu

$$(9) \qquad \frac{\partial \mathrm{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}}{\partial u_\varkappa} = \frac{\partial \mathrm{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}}{\partial U_\varkappa} = \Omega_\varkappa(V) - \Omega_\varkappa(W).$$

Seien ferner die Werthe von $U_\varkappa$, $V_\varkappa$, $W_\varkappa$ für $x_1 = c_1, \ldots, x_p = c_p$ mit

$$U_\varkappa^0,\ V_\varkappa^0,\ W_\varkappa^0$$

bezeichnet, so liefert (9):

$$(10) \qquad \mathrm{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c} = \Omega(V) - \Omega(W) - \Omega(V^0) + \Omega(W^0).$$

§ 18.

Die Function $\Omega(V)$ als Function der $p+1$ Punkte $\xi, x_1, x_2, \ldots, x_p$.

1. *Die speciellen und die adjungirten Transcendenten* T. In den Abel'schen Functionen von Clebsch-Gordan, Abschnitt VII, werden zur Zerlegung der Transcendenten $\mathrm{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c}$ *zunächst* nicht Functionen der $V_1, \ldots, V_p$, sondern Functionen der $p+1$ Punkte $\xi, x_1, \ldots, x_p$ betrachtet: die sog. „speciellen" und „adjungirten" Transcendenten T. Dieselben werden sich hier als die Differentialableitungen unserer Function $\Omega(V)$ bez. nach $\xi, x_1, \ldots, x_p$ herausstellen.

$2p$ Punkte von f

$$x_1, \ldots, x_p, \ x_1, \ldots, x_p,$$

welche aus 2 Punkten ξ, ζ von f dadurch entstehen, dass man die Gerade $\xi\zeta$ legt und durch deren weitere $m-2$ Schnittpunkte eine zu

f adjungirte Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche f in jenen $2p$ Punkten trifft, will ich als „$\xi\zeta$ zugeordnet" bezeichnen. Einfacher: die $2p$ Punkte sind corresidual zu

$$(\xi, \zeta, l_1, \ldots, l_{2p-2}),$$

wo die l der Schnitt von f mit einer φ-Curve sind. Theilt man die $2p$ Punkte irgendwie in zwei Gruppen von je p:

$$(x_1, \ldots, x_p), \quad (x_1', \ldots, x_p'),$$

so nenne ich die beiden Gruppen „einander bezüglich $\xi\zeta$ zugeordnet". Es wird dann

$(\zeta, x_1, \ldots, x_p, x_1', \ldots, x_p')$ corres. zu $(\xi, \zeta_1, \ldots, \zeta_p, \zeta_1, \ldots, \zeta_p)$, wo die $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ die in § 17, Nr. 1 eingeführten von ζ allein abhängigen Punkte sind; d. h.:

$$(1) \qquad \sum_1^p {}_i \int_{\zeta_i}^{x_i'} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi} \varphi_h(x)\, d\omega_x = -\int_{\zeta_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x.$$

Die „specielle Transcendente $\mathsf{T}_{\xi\zeta}(x)$" sei nun definirt durch:

$$(2) \qquad \mathsf{T} \equiv \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) \equiv \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{2}\, \mathsf{T}_{\xi\zeta}\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_p \\ x_1', \ldots, x_p' \end{pmatrix};$$

so dass

$$\mathsf{T}_{\xi\zeta}(x') = -\mathsf{T}_{\xi\zeta}(x).$$

Um dieselbe durch Ω-Functionen auszudrücken, hat man in (10), § 17 zu setzen

$$U_h = \sum_1^p {}_i \int_{\zeta_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x, \quad V_h = U_h - \int_{\zeta}^{\xi} \varphi_h(x)\, d\omega_x,$$

$$W_h = U_h, \quad V_h^0 = -U_h, \quad W_h^0 = -V_h, \quad \text{(nach (1))},$$

wonach

$$(3) \qquad \mathsf{T} \equiv \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) = \Omega(V) - \Omega(U).$$

Also auch

$$(4) \qquad \mathsf{T}_{\xi\eta}(x) = \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) - \mathsf{T}_{\eta\zeta}(x).$$

Zugleich zeigt (10), dass

$$(4') \qquad \mathsf{T}_{\xi\zeta}\binom{x}{c} = \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) - \mathsf{T}_{\xi\zeta}(c),$$

wie auch aus der Definition (2) direct zu erschliessen ist.

Unter „einem System adjungirter Transcendenten $\mathsf{T}^{(\varkappa)}$" werden die speciellen Transcendenten

$$(5) \qquad \mathsf{T}^{(\varkappa)} \equiv \mathsf{T}_{x_\varkappa \zeta}(x_{\varkappa,1}, \ldots, x_{\varkappa,\varkappa-1}, \xi, x_{\varkappa,\varkappa+1}, \ldots, x_{\varkappa,p}),$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

verstanden, wo

$x_{\varkappa,\varkappa'}$; $x_{\varkappa'}$, $(\varkappa' = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots, p)$
die $2(p-1)$ Schnittpunkte einer φ-Curve $\Phi_\varkappa(x; x_1, \ldots, x_p)$ mit $f = 0$ sind. Die unteren Grenzpunkte

$$z_1, z_2, \ldots, z_p$$

von $\mathrm{T}^{(\varkappa)}$ sind dieselben für alle $\varkappa = 1, 2, \ldots, p$, und zwar diejenigen Punkte, für welche

$$(\zeta, x_1, \ldots, x_p) \text{ corresidual zu } (\xi, z_1, \ldots, z_p);$$

denn die $x_\varkappa \xi$ zugeordneten $2p$ Punkte

$$(x_{\varkappa,1}, \ldots, x_{\varkappa,\varkappa-1}, \; x_{\varkappa,\varkappa+1}, \ldots, x_{\varkappa,p}; \; \xi; \; z_1, \ldots, z_p)$$

sind ja corresidual zu $x_\varkappa$, ζ, verbunden mit dem Schnitt einer φ, also zu

$$(x_\varkappa, \zeta; \; x_{\varkappa,1}, \ldots, x_{\varkappa,\varkappa-1}, \; x_{\varkappa,\varkappa+1}, \ldots, x_{\varkappa,p}; \; x_1, \ldots, x_{\varkappa-1}, x_{\varkappa+1}, \ldots, x_p).$$

Somit ist auch

$$\mathrm{T}^{(\varkappa)} = -\mathrm{T}_{x_\varkappa \zeta}(z_1, \ldots, z_p). \tag{5'}$$

Nach (3) wird

$$\mathrm{T}^{(\varkappa)} = -\Omega(V^{(\varkappa)}) + \Omega(U^{(\varkappa)}),$$

wo

$$U_h^{(\varkappa)} = \sum_1^p{}_i \int_{\zeta_i}^{z_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x = U_h - \sum_1^p{}_i \int_{z_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x$$

$$(6') \qquad = U_h - \int_\zeta^\xi \varphi_h(x)\, d\omega_x = V_h;$$

$$V_h^{(\varkappa)} = V_h - \int_\zeta^{x_\varkappa} \varphi_h(x)\, d\omega_x,$$

also

$$\mathrm{T}^{(\varkappa)} = \Omega(V) - \Omega(V^{(\varkappa)}), \tag{6}$$

wo

$$V_h^{(\varkappa)} = V_h - \int_\zeta^{x_\varkappa} \varphi_h(x)\, d\omega_x \tag{6'}$$

unabhängig von $x_\varkappa$ ist.

2. Aus (3) und (6) hat man, da U_h von ξ, $V_h^{(\varkappa)}$ von $x_\varkappa$ unabhängig ist:

$$(7) \qquad \begin{cases} D_\xi\, \Omega(V) = \quad D_\xi\, \mathrm{T}_{\xi\zeta}(x_1, \ldots, x_p) \equiv D_\xi\, \mathrm{T}, \\ D_{x_\varkappa} \Omega(V) = -D_{x_\varkappa} \mathrm{T}_{x_\varkappa\zeta}(z_1, \ldots, z_p) \equiv D_{x_\varkappa} \mathrm{T}^{(\varkappa)}; \end{cases}$$

Die Ableitungen unserer Function $\Omega(V)$ *nach* ξ *und den* $x_\varkappa$ *sind die Ableitungen der speciellen Transcendenten* T, $\mathrm{T}^{(\varkappa)}$ *bezüglich nach*

Es ist dabei zu beachten, dass die Ableitung $D_\xi \mathsf{T}$ nach *allem* ξ gemeint ist, sowohl nach dem Parameter ξ, als nach dem in den unteren Grenzpunkten von T implicit enthaltenen ξ.

Daher stimmt die Function $\Omega(V)$ genau überein mit der von Clebsch-Gordan (§ 49) durch $U(x_1, \ldots, x_p; \xi)$ bezeichneten und daselbst noch weiter ausgerechneten Function.

Aus dem Umstande, dass $\Omega(V)$ auch durch die rechten Seiten von (7) definirt werden kann, diese aber von den Punkten $a_1, \ldots, a_p$ ganz unabhängig sind, schliesst man noch (s. § 17, Nr. 2):

$\Omega(V)$ *ist eine von den Hülfspunkten* $a_1, \ldots, a_p$ *unabhängige Function.*

3. *Formeln für die specielle Transcendente.* Die Formeln (7) schreiben sich:

$$(8)\quad D_\xi \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) = \sum_\varkappa \Omega_\varkappa(V)\,\frac{\partial V_\varkappa}{\partial \omega_\xi} = \sum_\varkappa \sum_i \varphi_\varkappa(\xi)\int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(x)\,d\omega_x.$$

$$(8')\quad -D_{x_h} \mathsf{T}_{x_h\zeta}(z) = \sum_\varkappa \Omega_\varkappa(V)\,\frac{\partial V_\varkappa}{\partial \omega_{x_h}} = -\sum_\varkappa \sum_i \varphi_\varkappa(x_h)\int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(x)\,d\omega_x.$$

Wir entnehmen zunächst der Gleichung (8), dass $D_\xi \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x)$, obwohl die unteren Grenzen von $\mathsf{T}_{\xi\zeta}(x)$ von ζ abhängen, selbst nicht mehr von ζ abhängig ist; was auch aus (4) zu schliessen ist.

Aus (8) folgt ferner, indem man $\xi = a_\varkappa$ setzt, wodurch $\xi_{\varkappa i} = x_i$ wird:

$$(9)\qquad D_{a_\varkappa} \mathsf{T}_{a_\varkappa\zeta}(x_1, \ldots, x_p) = \sum_i \int_{a_{\varkappa i}}^{x_i} B_{a_\varkappa}(x)\,d\omega_x.$$

Da hier beide Seiten ausser von $x_1, \ldots, x_p$ nur von dem willkürlichen Punkte $a_\varkappa$ abhängen, setze man ξ statt $a_\varkappa$, ersetze also die $a_{\varkappa i}$ durch diejenigen in § 17, Nr. 1 eingeführten, von ξ allein abhängigen Punkte ξ_i, für welche

$$(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_p) \text{ corresid. zu } (\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_p);$$

so wird:

$$(10)\qquad D_\xi \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) = \sum_i \int_{\xi_i}^{x_i} \xi(x)\,d\omega_x,$$

(mit den durch

$$V_h = \sum \int_{\xi_i}^{x_i} \varphi_h(x)\,d\omega_x$$

vorgeschriebenen Wegen, wenn auch (7) gelten soll).

Dies ist *eine neue Ausdrucksweise des D_ξ einer speciellen Transcendente mit Parameter* ξ; und es hat ein Interesse, dieselbe ohne den Durchgang durch die Functionen Ω direct abzuleiten. Zu dem Zwecke gehe ich von (4')

$$(4') \qquad \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) = \mathsf{T}_{\xi\zeta}\binom{x}{c} + \mathsf{T}_{\xi\zeta}(c)$$

aus und nehme dabei für die c_i ein gewisses System von p Punkten

$$C_1, C_2, \ldots, C_p$$

an, nämlich irgend ein solches, das, *doppelt* gezählt, $2p$ den ξ, ζ zugeordnete Punkte vorstellt, für welches also:

$$(11) \qquad 2\sum_1^p{}_i \int_{\zeta_i}^{C_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \int_\zeta^\xi \varphi_h(x)\, d\omega_x = 0.$$

Da man die Wege auf einer der beiden Seiten von (4') beliebig wählen kann, wird man dann setzen können

$$\mathsf{T}_{\xi\zeta}(C) = 0,$$

und erhält:

$$(12) \qquad \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) \equiv \frac{1}{2}\,\mathsf{T}_{\xi\zeta}\binom{x}{x'} = \mathsf{T}_{\xi\zeta}\binom{x}{C}.$$

Dies ist *eine neue Darstellung der speciellen Transcendente* $\mathsf{T}_{\xi\zeta}(x)$. Die Wege der beiden Seiten von (12) hängen nach dem Abel'schen Theorem von einander ab.

Um auf (10) zu kommen, hat man zunächst aus (12):

$$(13) \qquad D_\xi \mathsf{T}_{\xi\eta}(x) = \sum_1^p{}_i \int_{C_i}^{x_i} B_\xi(x)\, d\omega_x - \sum_1^p{}_i \mathsf{X}_{\xi\zeta}(C_i)\, \frac{d\omega_{C_i}}{d\omega_\xi}.$$

Hier mache man zwei Specialisirungen. Erstens lasse man rechts das willkürliche ζ an ξ heranrücken; wobei die C_i^2 zu $2p$ Punkten werden, die ξ^2 zugeordnet sind. Das zweite Glied der rechten Seite verschwindet dabei. Zweitens aber kann man für die C_i ein besonderes Punktsystem gewählt denken, für das, statt (11):

$$(11') \qquad \sum_i \int_\zeta^{C_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \frac{1}{2}\int_\zeta^\xi \varphi_h(x)\, d\omega_x = 0.$$

Dieses geht, wenn ζ an ξ rückt, continuirlich in das frühere zu ξ gehörige System $\xi_1, \ldots, \xi_p$ über. Somit geht dann (13) in (10) über.

Aus (8) und (10) ergiebt sich noch:

$$(14) \qquad \sum_i \int_{\xi_i}^{x_i} B_\xi(x)\, d\omega_x = \sum_\varkappa \sum_i \varphi_\varkappa(\xi) \int_{a_{\varkappa i}}^{\xi_{\varkappa i}} B_{a_\varkappa}(x)\, d\omega_x,$$

oder

$$(14') \qquad D_\xi \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x) = \sum_1^p {}_\varkappa\, \varphi_\varkappa(\xi)\, D_{a_\varkappa}\, \mathsf{T}_{a_\varkappa \zeta}(\xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p})$$

$$= - \sum_1^p {}_\varkappa\, \varphi_\varkappa(\xi)\, D_{a_\varkappa}\, \mathsf{T}_{a_\varkappa \zeta}(x'),$$

wo die ξ_i, $a_{\varkappa i}$, $\xi_{\varkappa i}$, in § 17, Nr. 1 und 2, die x' in § 18, Nr. 1 aus den ξ, $x_1, \ldots, x_p$ definirt sind. Diese *Relation zwischen* $p+1$ *speciellen Transcendenten*, d. h. die Relation (14), liesse sich zwar ebenfalls aus Relationen wie (2), § 13, und dem Abel'schen Theorem direct herleiten, aber nur durch weitläufige Rechnungen. Indess würde diese directe Herleitung dann nöthig, wenn man von der Clebsch-Gordan'schen Definition der Function

$$U(x_1, \ldots, x_p, \xi) \equiv \Omega(V_1, \ldots, V_p)$$

durch die Differentialquotienten nach den $x_1, \ldots, x_p$, ξ ausgehen und zur Weierstrass'schen Definition durch die Differentialquotienten nach den $V_1, \ldots, V_p$ gelangen wollte.

§ 19.

Nullpunkte und Monodromie der Function $Al(V) = e^{-\Omega(V)}$.

1. Es soll sich zunächst um die Unendlichkeitspunkte der Function

$$\Omega(V) \equiv U(x_1, \ldots, x_p;\ \xi)$$

als Function der Variablen $x_1, \ldots, x_p$, ξ handeln. Und zwar genügte es dabei, $\Omega(V)$ als Function von ξ zu behandeln; denn da V nur in $-V$ übergeht, $\Omega(V)$ also unverändert bleibt, wenn man ξ durch irgend einen Punkt η und $x_1, \ldots, x_p$ durch die bezüglich $\xi\eta$ zugeordnete Gruppe ersetzt, so braucht man nur ξ mit $x_\varkappa$ zu vertauschen, $x_1, x_2, \ldots, x_{\varkappa-1}, x_{\varkappa+1}, \ldots, x_p$ aber durch die $p-1$ Punkte $x_{\varkappa i}$ zu ersetzen, welche mit diesen durch eine φ verknüpft sind.

Als Function von ξ kann $\Omega(V)$, wie die Darstellung der Ableitung nach ξ in (10), § 18 lehrt, nur dann unendlich werden, wenn ξ mit einem der Punkte $x_1, \ldots, x_p$ zusammenfällt. Rückt ξ an $x_\varkappa$, ohne dass $x_i = x_\varkappa$ $\left(i \gtrless \varkappa\right)$, so verhält sich also, nach § 13, Nr. 1, $D_\xi \mathsf{T}_{\xi\zeta}(x)$ wie

$$\frac{f_c(x_\varkappa)}{(c\,\xi\, x_\varkappa)},$$

daher $\Omega(V)$ wie

$$\int^\xi \frac{f_c(x_\varkappa)}{(c\,\xi\, x_\varkappa)}\, d\omega_\xi = -\int^\xi \frac{(c x_\varkappa\, d\xi)}{(c x_\varkappa\, \xi)} = -\log(c x_\varkappa\, \xi)$$

Fallen aber zu gleicher Zeit $\varrho - 1$ weitere der Punkte x_i in $x_\varkappa$, so dass im Ganzen ϱ der Punkte $x_1, \ldots, x_p$ mit ξ zusammenrücken, so verhält sich, nach (10) § 18, $D_\xi \mathrm{T}_{\xi\zeta}(x)$ wie

$$\varrho \frac{f_c(x_\varkappa)}{(c\,\xi\, x_\varkappa)},$$

also $\Omega(V)$ wie

$$-\varrho \log (c x_\varkappa \xi);$$

d. h. *$\Omega(V)$ wird für $\xi = x_\varkappa$ unendlich wie $-\varrho$ mal dem Logarithmus einer einfach verschwindenden Grösse, wo ϱ eine positive ganze Zahl.*

Ausserdem kann $\Omega(V)$ nur unabhängig von ξ zu unendlich werden. Dies kann, nach (8), § 18, nur geschehen, wenn einer der Punkte $\xi_{\varkappa 1}, \ldots, \xi_{\varkappa p}$ mit $a_\varkappa$ zusammenfällt; d. h. wenn entweder $\xi = x_i$, was der vorhergehende Fall ist, oder *wenn $x_1, x_2, \ldots, x_p$ durch eine Curve φ verknüpft sind*, wobei zugleich einige dieser Punkte mit ξ zusammenrücken könnten.

Das Verhalten von $\Omega(V)$ in diesem allgemeinen Falle lässt sich mit Hülfe von Gleichung (10) des § 17 auf den ersteren Fall reduciren. Durch $x_1, \ldots, x_p$ mögen $\infty^{\alpha-1}$ Curven φ gehen. Sei ferner mit willkürlichen Punkten $\zeta, \xi', \xi'', \ldots, \xi^{(\alpha)}, \eta, \eta', \ldots, \eta^{(\alpha-1)}$:

$(x_1, \ldots, x_p, \xi)$ corres. zu $(y_1, \ldots, y_p, \eta)$;
$(y_1, \ldots, y_p, \xi')$ „ „ $(x_1', \ldots, x_p', \zeta)$ und $(y_1', \ldots, y_p', \eta')$;
$(y_1', \ldots, y_p', \xi'')$ „ „ $(x_1'', \ldots, x_p'', \zeta)$ „ $(y_1'', \ldots, y_p'', \eta'')$;
. . . .
$(y_1^{(\alpha-1)}, \ldots, y_p^{(\alpha-1)}, \xi^{(\alpha)})$ „ „ $(x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_p^{(\alpha)}, \zeta)$.

So wird durch successive Verbindung dieser Beziehungen:

$(x_1, \ldots, x_p, \xi', \xi'', \ldots, \xi^{(\alpha)})$ corres. zu $(x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_p^{(\alpha)}, \eta, \eta', \ldots, \eta^{(\alpha-1)})$.

Durch die $p + \alpha$ Punkte der ersten Gruppe geht, wegen der Willkürlichkeit der $\xi^{(i)}$, keine Curve φ mehr; diese Gruppe gehört daher einer ∞^α-Schaar an (in welcher die Punkte $\xi^{(i)}$ fest werden). In der zweiten genannten Gruppe dieser Schaar sind die α Punkte $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(\alpha-1)}$ ebenfalls willkürlich, diese Gruppe ist daher völlig bestimmt und $x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_p^{(\alpha)}$ gehören keiner Schaar an, d. h. *diese p Punkte sind durch keine φ verknüpft.*

Nun sei

$$V_h = \sum_i \int_{\xi_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi} \varphi_h(x)\, d\omega_x, \qquad V_h' = V_h - \int_{\xi}^{\eta} \varphi_h(x)\, d\omega_x,$$

dann ist auch:

$$V_h' = \sum_i \int_{\zeta_i}^{y_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x = \sum_i \int_{\zeta_i}^{x_i'} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi'} \varphi_h(x)\, d\omega_x,$$

ferner

$$V_h'' = V_h' - \int_{\xi'}^{\eta'} \varphi_h(x)\, d\omega_x = \sum_i \int_{\zeta_i}^{y_i'} \varphi_h(x)\, d\omega_x$$

$$= \sum_i \int_{\zeta_i}^{x_i''} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi''} \varphi_h(x)\, d\omega_x,$$

. . . .

$$V_h^{(\alpha)} = V_h^{(\alpha-1)} - \int_{\xi^{(\alpha-1)}}^{\eta^{(\alpha-1)}} \varphi_h(x)\, d\omega_x = \sum_i \int_{\zeta_i}^{x_i^{(\alpha)}} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi^{(\alpha)}} \varphi_h(x)\, d\omega_x;$$

und nach (10) des § 17:

$$\Omega(V) = \Omega(V') + \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c} + C,$$

$$\Omega(V') = \Omega(V'') + \mathsf{T}_{\xi'\eta'}\binom{x'}{c} + C',$$

. . . .

$$\Omega(V^{(\alpha-1)}) = \Omega(V^{(\alpha)}) + \mathsf{T}_{\xi^{(\alpha-1)}\eta^{(\alpha-1)}}\binom{x^{(\alpha-1)}}{c} + C^{(\alpha-1)},$$

wo die $C, C', \ldots, C^{(\alpha-1)}$ von den $x_1, \ldots, x_p$ unabhängig sind. Somit

$$\Omega(V) = \Omega(V^{(\alpha)}) + \mathsf{T}_{\xi\eta}\binom{x}{c} + \mathsf{T}_{\xi'\eta'}\binom{x'}{c} + \cdots$$
$$+ \mathsf{T}_{\xi^{(\alpha-1)}\eta^{(\alpha-1)}}\binom{x^{(\alpha-1)}}{c} + \sum C.$$

In dieser Reduction bezieht sich nun $\Omega(V^{(\alpha)})$ auf p Punkte $x_i^{(\alpha)}$, die auf keiner Curve φ liegen; $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(\alpha-1)}$ kann man nach dem Obigen wegen ihrer Willkürlichkeit so annehmen, dass sie bez. mit keinem der Punkte $x, x', \ldots, x^{(\alpha-1)}$ zusammenfallen. Daher folgt nach § 13, Nr. 1:

$\Omega(V)$ *wird nur dann unendlich, wenn in*

$$V_h = \sum_i \int_{\zeta_i}^{x_i} \varphi_h(x)\, d\omega_x - \int_{\zeta}^{\xi} \varphi_h(x)\, d\omega_x$$

ξ *mit einem der Punkte* x_i *zusammenfällt, oder unabhängig von* ξ

wenn nämlich durch $x_1, \ldots, x_p$ eine oder unendlich viele Curven φ gehen. Auch kann Beides zugleich eintreten. In jedem Falle wird dann $\Omega(V)$ unendlich wie eine endliche Summe von negativ genommenen Logarithmen von einfach verschwindenden Grössen.

Directer ergiebt sich dieses Verhalten in allen Fällen aus dem im Clebsch-Gordan'schen Werke entwickelten Ausdruck von

$$\Omega(V) = U(x_1, \ldots, x_p;\ \xi)$$

(s. § 50 dieses Werkes; es ist dabei nur $d\Pi_{\xi\eta}(x)$ durch $X_{\xi\eta}(x)\,d\omega_x$ zu ersetzen), der nur Integrale dritter Gattung und ein Glied

$$-\log \sum \pm \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_p(x_p)$$

enthält.

2. Aus $\Omega(V)$ werde definirt:

$$Al(V_1 \ldots, V_p) \equiv Al(V) = e^{-\Omega(V)}. \tag{1}$$

Aus dem in Nr. 1 Bewiesenen ergeben sich für diese Function folgende Eigenschaften:

$Al(V)$ ist eine für alle endlichen Werthsysteme der $V_1, \ldots, V_p$ endliche Function. Dieselbe verschwindet, und zwar immer in endlicher ganzzahliger Ordnung, nur für diejenigen Werthsysteme $V_1, \ldots, V_p$, für welche, wenn man

$$V_h = \sum_i \int_{\xi_i}^{x_i} \varphi_h(x)\,d\omega_x - \int_{\xi}^{\xi} \varphi_h(x)\,d\omega_x, \qquad (h = 1, 2, \ldots, p) \tag{2}$$

setzt, ξ mit einem der Punkte x_i zusammenfällt, oder $x_1, \ldots, x_p$ durch eine Curve φ verknüpft sind. Tritt der letztere Fall ein, so verschwindet $Al(V)$ als Function von ξ identisch; wenn nicht, als Function von ξ in den p Punkten $x_1, \ldots, x_p$ je einfach, bez. ϱ-fach an einer Stelle $\xi = x'$, mit der ϱ der Punkte $x_1, \ldots, x_p$ zusammenfallen.

3. *Monodromie.* Bewegt sich das Werthsystem der $V_1, \ldots, V_p$ von $(0, \ldots, 0)$ nach $(V_1, \ldots, V_p)$ hin auf einem bestimmten Wege, so ändern sich auch die $(x_1, \ldots, x_p)$ aus (2), d. h. aus

$$V_h = \sum_i \int_{\xi_i}^{x_i} \varphi_h(x)\,d\omega_x, \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

nach § 15, von den dort behandelten singulären Stellen abgesehen, eindeutig, und ebenso, nach dem Abel'schen Theorem, die $\xi_{\varkappa i}$, also die $\Omega_\varkappa(V)$ von § 17, und damit auch $\Omega(V)$ und $Al(V)$; und diese Aenderungen sind durchaus stetige. Betrachtet man zwei Wege der (V), welche zum selben Endsystem führen und ohne Ueberschreitung jener singulären Stellen in einander überführbar sind, so gelangt man nicht nur zum selben Endsystem der (x), also der $\xi_{\varkappa i}$, sondern nach der Definition von (5), § 17 auch zu denselben Endwerthen der $\Omega_\varkappa(V)$, und somit von $Al(V)$. Von den in § 15 angegebenen für die (x) singulären Stellen (V) kommen für die Function $Al(V)$, da sie ausserdem sicher endlich und stetig ist, nur diejenigen Stellen (V) in Betracht, für welche $\Omega(V)$ unstetig ist. Aber gerade diese Stellen — $x_i = \xi$, oder $x_1, \ldots, x_p$ durch Curven φ verknüpft — sind in Nr. 1, 2 untersucht: in ihnen verschwindet $Al(V)$, aber nur in endlicher positiver ganzzahliger Ordnung, ist also daselbst ebenfalls endlich und stetig (ohne unbestimmt zu werden, wie die (x), wenn sie eine Specialgruppe bilden). Daher bleibt $Al(V)$, wenn man die Wege der (V) über jene speciellen Werthsysteme (V) führt, doch eindeutig, d. h. *$Al(V)$ hat für kein endliches Werthsystem der (V) eine singuläre Stelle.*

Somit lässt sich, nach bekannten Sätzen, *$Al(V)$ in eine Potenzreihe nach ganzen positiven aufsteigenden Potenzen der $V_1, V_2, \ldots, V_p$ entwickeln, die für alle endlichen Werthsysteme der (V) convergirt.*

Mit diesem Satze ist auch das Ziel unserer hier anzustellenden Betrachtungen erreicht. Wie man die Formel (10) des § 17 benützen kann, um die kanonischen Integrale 3ter und 2ter Gattung auf die Functionen $Al(V)$ zurückzuführen oder, mit Hülfe des Abel'schen Theorems, die symmetrischen rationalen Functionen der p oberen Grenzpunkte und beliebige rationale Functionen der Coordinaten eines Punktes der Grundcurve durch Quotienten von Producten von Functionen $Al(V)$ auszudrücken, ist im Clebsch-Gordan'schen Werke über Abel'sche Functionen so ausführlich dargestellt, dass es nicht nöthig wird, von unserem Standpunkte aus darauf einzugehen.

Erlangen, Juli 1890.
