MÉMOIRE

SUR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES SURFACES DU SECOND ORDRE,

PAR Mr. CH. MERAY

Docteur-ès-Sciences.

AVERTISSEMENT.

Ce mémoire contient l'application des principes exposés par M. Chasles, dans son *Traité de géométrie supérieure*, à la théorie des surfaces du second ordre. Je l'ai divisé en huit paragraphes qui renferment, le premier : les propriétés des figures corrélatives sur les quelles s'appuyent mes raisonnements; le second: la génération des surfaces du second ordre, leur classification et la théorie des cônes; les trois suivants : les propriétés des pôles, plans polaires, centre, axes, génératrices rectilignes; le sixième : un second mode de génération des mêmes surfaces et les conséquences qui en résultent; les deux derniers enfin, la théorie des lignes focales et des surfaces homofocales.

§. I. *Exposition de quelques propriétés des figures corrélatives planes.*

1. Je vais rappeler quelques propriétés des figures corrélatives, dont je ferai souvent usage. On consultera pour plus de détails la *Géométrie supérieure* de M. Chasles.

Deux figures planes F, F' sont dites *corrélatives*, si, la première étant composée de points m, m_1 etc., et la seconde de droites M', M'_1 etc., à un quelconque m, des points de la première figure, correspond une droite M' de la seconde, et de telle sorte que le point m venant à décrire une droite quelconque M, la droite M' tourne autour d'un point fixe m' et forme ainsi un faisceau homographique à la division tracée par le point m sur la droite M. On pourra encore dire, si on veut donner un sens moins restreint à une expression employée par M. Chasles (*Principe de correspondence entre deux objets variables, Comptes rendus* Tome XLI), que le point m correspond *anharmoniquement* à la droite M' et réciproquement. On verra sans peine d'après la définition précédente, que les éléments m' et M se correspondent anharmoniquement.

Comme exemple de figures corrélatives, on peut citer deux figures contenues dans le même plan, et dont l'une est formée par les polaires des points de l'autre, par rapport à une même section conique; mais on se trouve alors dans un cas particulier.

2. Pour construire deux figures corrélatives F, F', il suffit généralement de con-

naître quatre points a, b, c, d, de la première, correspondants à quatre droites A', B', C', D', données dans la seconde.

Ces points et ces droites peuvent être pris à volonté, et dans tous les cas, la construction des figures dont ils doivent faire partie, n'offrira aucune difficulté; il faudra seulement, ce qui est évident, que des droites concourantes correspondent toujours à des points donnés en ligne droite.

3. La définition des figures corrélatives, entraine immédiatement les deux propositions suivantes :

Deux figures corrélatives à une troisième, sont homographiques.

Deux figures respectivement homographiques à deux figures corrélatives, sont également corrélatives.

4. Je nommerai *points associés,* deux points tels que m et m', faisant partie de deux figures corrélatives et dont chacun est située sur la droite corrélative de l'autre; et *droites associées* des droites M, M' dont chacune contient le point qui correspond à l'autre. Un point quelconque de l'une des figures, a une infinité d'associés en ligne droite; une droite quelconque a de même une infinité d'associées concourant au point qui lui correspond.

Nous pouvons faire dès à présent une remarque qui nous sera utile : si des points n, n' correspondent anharmoniquement à des droites associées M, M', ou même à des points associés, (c'est-à-dire s'ils sont homologues de ces points dans des figures homographiques), ils seront eux-mêmes associés; on fait aisément une remarque analogue, sur les lignes droites.

5. Il est facile d'écrire l'équation qui existe entre les coordonnées rectilignes des deux points associés m, m'; si on désigne en effet par x, y, les coordonnées du premier point, rapporté à deux axes pris à volonté dans la figure dont il fait partie; par x', y', les coordonnées du second obtenues de la même manière, et enfin par α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$, neuf constantes convenablement choisies, on aura l'équation connue:

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)x' + (\alpha' x + \beta' y + \gamma')y' + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'') = 0 \qquad (1)$$

Une équation toute semblable pourrait être obtenue entre les coordonnées tangentielles des deux droites associées.

6. Nous avons supposé jusqu'à présent, que les plans F, F' étaient situés d'une manière quelconque; s'ils viennent à se confondre, certains points pourront être situés sur leurs droites corrélatives; ces points qui se confondent ainsi avec un de leurs points associés seront nommés *points doubles.* On établit facilement sur les points doubles les propositions suivantes :

Le lieu des points associés doubles est une certaine section conique.

Nous désignerons à l'aide de la lettre ε cette conique qui se présentera souvent dans nos raisonnements.

L'enveloppe des droites associées doubles, que l'on définira comme les points doubles, est également une certaine section conique $\mathcal{E}$.

Les deux courbes ε et $\mathcal{E}$ ne coïncident généralement pas et peuvent d'ailleurs être réelles on imaginaires.

Pour avoir l'équation de la courbe ε en coordonnées rectilignes, il suffira de supposer que les deux systèmes d'axes coordonnés du N.º 5 se confondent, et de poser alors dans l'équation (1)

$$x = x', \quad y = y'.$$

On remarquera que les neuf coefficients de cette équation se réduisent à huit. On obtiendra de la même manière l'équation de la courbe $\mathcal{E}$ rapportée à des coordonnées tangentielles, et on en déduira si on veut, l'équation en coordonnées rectilignes.

7. On trouve au N.º 600 de la *Géométrie supérieure* de M. Chasles la démonstration du théorème suivant :

Etant donné dans un même plan deux figures corrélatives, il y a trois points et trois droites (deux des trois peuvent être imaginaires) dont les éléments corrélatifs pris successivement dans les deux figures se confondent.

Il peut arriver qu'un point quelconque du plan ait même droite corrélative dans les deux figures; les courbes ε et $\mathcal{E}$ cessent alors d'être distinctes, et les figures proposées sont nommées *polaires réciproques*, par rapport à la conique ε ou $\mathcal{E}$; les points que nous sommes convenus de nommer associés, deviennent ceux qu'on nomme *conjugués*, dans la théorie des polaires réciproques.

Pour que cette circonstance se présente il est nécessaire et suffisant, que le nombre des points dont les droites corrélatives prises dans les deux figures coïncident, soit supérieur à trois.

8. Nous avons dit au N.º 2, que quatre couples d'éléments correspondants suffisent pour construire complétement deux figures corrélatives; mais les figures que nous aurons à considérer dans la suite, ne nous seront pas toujours données de cette manière : nous devrons en construire, connaissant seulement un certain nombre de couples de points associés on de droites associées. Il importe donc de résoudre les problèmes suivants :

1.º *Combien faut-il connaître de couples de points associés pour pouvoir construire deux figures corrélatives ?*

2.º *Effectuer la construction à l'aide d'un nombre suffisant de données.*

L'équation (1) du N.º 5 fournit immédiatement la réponse à la première question; cette équation renfermant en effet neuf coefficients qui se réduisent à huit par la division, le nombre cherché est huit. La solution de la seconde question est loin d'être aussi simple, quand on la considère dans toute sa généralité, mais nous n'aurons besoin de la connaître que dans le cas où, les figures étant dans le même plan, les points associés que l'on donne, sont tous relatifs à un même point λ (nous nommons ainsi deux points associés en ligne droite avec ce point λ). On voit alors aisément que dans ces conditions, sept couples de points associés suffisent pour construire, non pas les figures corrélatives entières, mais seulement tous les couples de points associés relatifs au point λ, et en particulier la courbe ε lieu des points doubles. Nous avons en effet remarqué au N.º 6, que l'équation de la courbe ε contient seulement huit coefficients distincts réducibles à sept par la division, d'où il résulte que sept systèmes de valeurs simultanées des variables x, y, x', y', suffisent pour calculer ces paramètres. Nous verrons dans un autre paragraphe comment on peut construire géométriquement cette courbe, contentons nous pour le moment de voir ce qu'il faut faire, cette courbe une fois connue, pour construire tous les couples de points associés relatifs au point λ.

Il faut commencer par chercher les deux droites corrélatives L, L$'$ du point λ considéré comme appartenant à l'une et à l'autre des figures; désignons pour cela par (a, a'), (a_1, a'_1), deux des couples de points associés donnés, et par (φ, χ), (φ_1, χ_1), les intersections de la conique ε, que l'on suppose connue, avec les droites $\overline{a\,a'}$, $\overline{a_1\,a'_1}$.

Les points associés situés sur la droite $\overline{a\,a'}$, y tracent évidemment deux divisions homographiques, dont φ et χ sont les points doubles, et ces divisions homographiques sont complétement déterminées, puisqu'on en connait les points doubles φ, χ, ainsi que deux points homologues a, a'; on peut donc trouver les homologues l, l' du du point λ considéré comme appartenant à l'une et à l'autre de ces divisions; on construira de même les deux homologues l_1, l'_1, du point λ considéré comme faisant partie des divisions qui existent de la même manière sur la droite $\overline{a_1\,a'_1}$; et on voit sans peine que les droites cherchées ne sont autre chose que les droites $\overline{l\,l_1}$, $\overline{l'\,l'_1}$.

Maintenant que les droites désignées par L, L$'$ nous sont connues, rien n'est plus facile que de construire tous les points associés contenus sur une même droite quelconque Λ, passant par le point λ; il suffit pour cela, de construire les deux divisions homographiques dont les points doubles sont $\overline{\Lambda\varepsilon}$ (la notation $\overline{\Lambda\varepsilon}$ désignant les intersections des lignes Λ et ε), et dans les quelles, λ et ΛL$'$ forment un couple de points homologues.

La construction complète des figures corrélatives exigera, comme il est aisé de le reconnaître, que l'on se donne, outre les sept couples de points tels que (a, a'), la droite corrélative de l'un de ces points; on pourra d'ailleurs la prendre arbitrairement pourvu qu'elle contienne l'associé de ce point, et la construction des figures s'opérera de suite avec la plus grande facilité. Le mouvement de cette droite autour du point par lequel elle est assujétie à passer, influe seulement sur la forme et la gran deur de la conique désignée précédemment par $\mathcal{E}$.

Il est à remarquer que lorsque les droites L, L', cessent d'être distinctes, le points associés deviennent conjugués par rapport à la conique ε les figures ne son pas pour cela polaires réciproques, mais elle pourront le devenir si on choisit con venablement la droite arbitraire, dont la connaissance complète, comme on vient d le voir, la détermination des figures.

Tout ce qui vient d'être dit sur les points associés relatifs à un même point se reproduit sans modifications pour les droites associées relatives à une même droite c'est-à-dire, dont les points de concours se trouvent sur cette droite.

9. Si on joint par des lignes droites, un point fixe O à tous les points d'une fi gure plane F, et si on fait passer des plans par un autre point fixe O', et par toute les droites d'une figure F' corrélative à la première, on obtiendra deux faisceaux l'un de droites, l'autre de plans, qui traceront sur un plan quelconque deux figure corrélatives; nous nommerons *corrélatifs*, deux semblables faisceaux, et nous diron que les droites du premier correspondent anharmoniquement aux plans du second.

Ces faisceaux, de même que les figures corrélatives, peuvent donner lieu encor à un très grand nombre de propositions analogues à celles que l'on démontre sur le faisceaux et les divisions homographiques; ces développements, malgré leur impor tance, ne peuvent trouver place ici, où on se propose simplement de donner un idée des services que la géométrie peut encore rendre, à la théorie des surfaces du second ordre.

§. II. *Génération et classification des surfaces du second ordre.*

10. Concevons deux faisceaux corrélatifs dont les centres O, O', différent; un droite X du premier faisceaux coupe le plan x' qui lui correspond dans l'autre, en un point m dont la position varie avec la direction de la droite X, le lieu du poin m est une certaine surface ς dont il est facile de déterminer la nature.

Cette surface est du deuxième degré, car pour obtenir les points ou elle coupe une sécante quelconque S, il faudra supposer que la droite X s'appuye constammen sur cette sécante en un point mobile x, chercher le point d'intersection x' de la même sécante avec le plan X', et enfin construire les points doubles des divisions homo graphiques que tracent évidemment les points x, x' sur la droite S; le nombre de ces points doubles ne peuvant être supérieur à deux sans être indéterminé, on en conclut que la surface ς est du deuxième degré comme on l'avait annoncé (*).

(*) Pour arriver à la même conclusion, on cherchera encore, si on le veut, l'équation en coordonnées rectilignes du lieu décrit par le point m, recherche qui n'offre aucune difficulté.

Un plan quelconque s coupera donc cette surface suivant une section conique, qui ne sera pas autre chose, que la courbe ε relative aux deux figures corrélatives déterminées sur le plan s par les faisceaux o, o'.

On reconnaitra sans peine, que la surface ς contient les points o, o', et que les plans tangents en ces points sont: au point o, le plan ϖ qui correspond à la droite $\overline{oo'}$ rayon du faisceau o'; et au point o', le plan ϖ' qui correspond à la même droite considérée comme appartenant à l'autre faisceau.

11. On peut se demander si toutes les surfaces, qui rapportées à des coordonnées rectilignes, offrent des équations du second degré, peuvent être engendrées de la même manière que la surface ς. Nous allons répondre affirmativement à cette question, en prouvant, comme il suffit évidemment de le faire, que les faisceaux o, o' du n.° précédent étant convenablement choisis, donnent naissance à une surface contenant neuf points arbitraires.

Si on prend en effet deux points quelconques o, o', parmi les neuf points donnés, et si on les joint par des lignes droites aux sept autres, les quatorze droites ainsi obtenues, couperont un plan quelconque s, en des points qui seront deux à deux en ligne droite, avec le point d'intersection λ du plan s, par la droite $\overline{oo'}$; on pourra donc (n.° 8) considérer ces sept couples de points, comme associés relativement au point λ dans deux figures corrélatives; et les faisceaux corrélatifs formés par les droites qui joignent le point o aux différents points de l'une de ces figures, et par les plans qui contiennent outre le point o', les droites de l'autre figure, engendreront par les intersections mutuelles de leurs éléments correspondants, une surface du second ordre contenant les neuf points donnés.

Il me reste maintenant à indiquer la construction de la courbe ε, sur laquelle on a fait reposer au n.° 8, celle des figures corrélatives que doivent tracer dans le plan s les faisceaux générateurs o, o'; cette courbe, on le remarquera, est l'intersection du plan s par la surface qui contient les neuf points donnés.

On supposera, ce qui est permis, que le plan s contient trois des points donnés que nous désignerons par p, q, r; ces points appartiendront nécessairement à la section conique ε. Pour achever la construction de cette courbe, on peut employer simplement le procédé donné par M.r Chasles, pour trouver l'intersection d'une surface du second ordre dont on donné neuf points, avec le plan qui contient trois de ces points (*Principes de correspondance entre deux objets variables*); mais on peut aussi en modifiant légèrement cette méthode, ramener toutes les constructions dans un même plan, chose importante pour la solution du second problème posé au n.° 8. Voici en effet comment on y parviendra:

Désignons par $(a_1\, a'_1)$, $(a_2\, a'_2)$, $(a_3\, a'_3)$, $(a_4\, a'_4)$ les intersections du plan s par les droites qui joignent les centres o, o', aux quatre points donnés α_1, α_2, α_3, α_4, autres que les points p, q, r; ces huit points et les points p, q, r suffirent pour déterminer complétement la courbe ε; si donc on prend à volonté deux points Ω, Ω' en ligne droite avec le point λ, la surface du second ordre qui passe par les neuf points p, q, r, Ω, Ω', $\widehat{\overline{\Omega a_1}\,\overline{\Omega' a'_1}}$, . . . etc. contient ainsi la courbe ε. On voit aussi immédiatement que pour amener dans le plan s toute les figures à construire, il suffit d'y mettre les points Ω, Ω', en cherchant en même temps, ce que deviennent dans cette hypothèse les points α_1, α_2, α_3, α_4 et les intersections mutuelles des trois plans s, $\overline{\Omega\,\Omega'\alpha_1}$, $\overline{\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4}$, qu'il est nécessaire de connaître dans la construction de M. Chasles. Cette recherche n'offre aucune difficulté; les deux premiers plans se coupent suivant la droite $\overline{a_1\,a'_1}$; l'intersection du premier, et du troisième sera connue quand on en aura deux points; je vais donc montrer comment on peut en obtenir un, et on fera les mêmes constructions pour l'intersection du second et du troisième plan. Le point que je veux avoir est l'intersection de la droite $\overline{\alpha_2\,\alpha_3}$ et du plan s; j'observe pour cela que le point cherché étant la trace de $\overline{\alpha_2\,\alpha_3}$ sur le plan s, est l'intersection des traces $\overline{a_2\,a_3}$, $\overline{a'_2\,a'_3}$, des plans $\Omega\,\alpha_2\,\alpha_3$, $\overline{\Omega'\,\alpha_2\,\alpha_3}$ qui renferment la droite $\overline{\alpha_2\,\alpha_3}$. Quand on aura trouvé de la sorte deux points de chaque intersection, on opérera comme l'indique M. Chasles dans le Mémoire cité, toutes les figures à construire seront dans le plan s.

La conique ε une fois obtenue, fera connaître les droites L, L' du n.º 8, puis les figures corrélatives cherchées, lorsqu'on se sera donné arbitrairement la droite qui correspond à un point pris à volonté dans l'une ou l'autre figure; ces figures corrélatives serviront ensuite à construire autant de points qu'on le desirera de la surface cherchée. On obtiendrait également tout les points de cette surface, par les intérsections des couples de droites qui joignent les points o, o' à tous les couples de points associés relatifs au point λ.

11.*bis* Pour trouver deux faisceaux corrélatifs, dont les éléments correspondants se coupent sur une surface donnée du second ordre, on pourra employer un moyen plus simple que celui qui vient d'être indiqué. On prendra en effet sur cette surface deux points quelconque o, o', et on fera passer un plan quelconque s par l'intersection des plans tangents en ces points; le plan s coupe la surface suivant une certaine conique ε telle, que les deux faisceaux dont le premier a pour centre le point o, et pour rayons les droites menées de ce point aux différents points a, b, ... etc. du plan s, et dont le second a pour centre le point o', et se compose des plans qui contiennent les polaires A, B, ... etc. des points a, b, ... etc. prises dans la conique ε, répondent à la question.

12. Les considérations précédentes, permettent d'énoncer le théorème suivant, qui exprime la condition que doivent remplir dix points donnés pour se trouver sur une même surface du second ordre:

Pour que dix points appartiennent à une même surface du second ordre, il est nécessaire et suffisant que les seize points, traces des droites qui joignent deux quelconques o, o' des points donnés aux huit autres, soient deux à deux associées dans deux figures corrélatives relativement au point d'intersection de ce plan par la droite $\overline{oo'}$.

13. Avant de poursuivre l'étude générale des surfaces du second ordre, il est indispensable de s'arrêter un instant aux cônes. Si les points o, o' des faisceaux corrélatifs précédemment considérés, viennent à se confondre en un même point γ, la surface ς qu'ils engendrent se réduit à un cône de sommet γ, dont la base est la conique ε (n.º 6) relative aux deux figures F, F$'$, tracées sur un plan quelconque par les faisceaux générateurs du cône. Quand on remplace les figures F, F$'$, par deux figures polaires réciproques relativement à la conique ε, les faisceaux corrélatifs qui ont pour sommet le point γ, se trouvent aussi remplacés par d'autres faisceaux corrélatifs qui ont toujours cependant, le cône γ pour lieu de leurs points doubles, et nous dirons que les éléments correspondants de ces derniers faisceaux sont *conjugués* dans le cône γ.

Les théorèmes suivant sont des conséquences très simples, de cette définition : *Un plan quelconque ϖ passant par le sommet γ, est le lieu des conjugués harmoniques d'un point fixe θ situé à volonté sur sa droite conjuguée* T, *par rapport à tous les couples de points d'intersection du cône avec une sécante mobile pivotant autour du point θ.*

La droite T, *est le lieu des pôles d'une droite fixe Θ appartenant au plan ϖ, pris part rapport aux sections du cône par les plans qui passent par la droite Θ.*

Si on prend à l'infini le point θ et la droité Θ, les théorèmes précédents s'énoncent comme il suit :

Le lieu des milieux des cordes parallèles à la droite T *est le plan conjugué ϖ de cette droite.*

Le lieu des centres des sections faites dans le cône par des plans parallèles au plan ϖ, est la droite conjuguée T *de ce plan.*

14. Nous allons établir maintenant une proposition importante qui peut être énoncée comme il suit.

Dans tout cône du second ordre, il y a au moins trois droites réelles, perpendiculaires à leurs plans conjugués.

Les plans conjugués de ces droites nommées *axes* du cône, sont, en vertu du n.º précédent, des plans de symétrie de cette surface. Pour démontrer cette proposition, prenons une droite quelconque T passant par le sommet du cône, son plan conjugué ϖ, et le plan ϖ' mené perpendiculairement à cette droite par le point γ.

La droite ϖ et le plan ϖ' venant à changer arbitrairement, traceront sur un plan fixe s pris à volonté, un point et une droite, appartenant respectivement à deux figures polaires réciproques, puisque le point en question peut être considéré comme étant le pôle de la droite correspondante, dans le cercle imaginaires ε', qui a pour centre la projection orthogonale du sommet γ sur le plan s, et pour module de son rayon, la hauteur du même point γ au dessus du plan s, (*Géom. Sup. n°* 784); les figures formées par les traces des plans ϖ, ϖ' sur le plan s étant corrélatives à une même figure, sont par cela même homographiques, et possédent trois droites, sur chacune des quelles, coïncident deux droites homologues; et comme une de ces droites est nécessairement réelle, on pourra dire que le cône a au moins un axe réel. Pour démontrer que les deux autres existent toujours aussi, nommons a_1, le pied de l'axe déjà obtenu, a_2, a_3 ceux des deux autres; les trois points a_1, a_2, a_3 sont ceux qui ont mêmes polaires dans la conique ε et le cercle ε', et les points a_2, a_3 divisent harmoniquement chacun des deux segments interceptés par les courbes ε, ε', sur la polaire du point a_1; cette dernière remarque prouve que le points en question sont nécessairement réels, puisqu'ils divisent harmoniquement à la fois, deux segments dont l'un au moins (celui qui correspond à ε') est imaginaire. (*Géom. Sup. n°* 255).

Il peut arriver que le cône ait plus de trois axes et cela seulement dans les deux cas suivants: 1° toutes les droites, qui passent par le sommet du cône, sont des axes; la base du cône se confond alors avec ε'; 2° il existe une infinité d'axes tous perpendiculaires à l'un d'eux; la base du cône est alors un cercle concentrique à ε', et le cône est de révolution.

On remarquera le premier cas; le cône est coupé en effet par un plan quelconque, suivant un cercle imaginaire dont le centre est la projection du sommet, et dont le rayon a pour module la hauteur de ce même sommet au dessus du plan sécant.

15. Les sections faites dans le cône γ, par des plans de directions diverses, sont des courbes variées dont nous allons déterminer la nature. On observera à cet effet que des plans parallèles donnent des coniques ayant même points à l'infini, et par conséquent homothétiques; si donc on veut connaître à quelle espèce appartient la section faite par un certain plan, on ménera par le sommet γ un plan parallèle au plan proposé, et suivant que les génératrices du cône contenues dans ce plan parallèle seront réelles et distinctes, confondues en une seule, on imaginaires, on aura sur le plan sécant proposé une hyperbole, une parabole ou une ellipse.

Il résulte de ceci, que sur un cône réel, on peut placer toutes les hyperboles dont les asymptotes forment un angle inférieur à l'angle maximum de deux génératrices, toutes les paraboles et toutes les ellipses dont les excentricités sont inférieures à une certaine limite; nous verrons plus loin qui cette limite est zéro.

Si le cône se réduit à deux plans réels, on pourra y placer toutes les hyperboles qui se réduisent à des systèmes de deux droites; si le cône n'a de réel qu'une droite, intersection des deux plans imaginaires qui le composent, on n'y pourra placer que des ellipses formées de droites imaginaires se coupant en un point réel, et nous verrons, que plusieurs de ces ellipses peuvent être considérées comme des cercles; dans ces deux derniers cas d'ailleurs, les plans parallèles a l'axe principal donneront des cas particuliers de la parabole.

Quand enfin le cône n'a de réel que son sommet, des plans quelconques ne donneront que des ellipses imaginaires, dont quelques unes pourront être des cercles imaginaires.

Pour reconnaître que l'excentricité de la section plane peut s'évanouir, on cherchera à couper le cône suivant un cercle soit réel soit imaginaire; on observera dans ce but que les plans des sections circulaires, nommés plans *cycliques* par M. Chasles, sont parallèles aux plans qui contiennent, outre le sommet du cône, une des cordes communes aux courbes ε, ε' du n.° 14; comme deux seules de ces six cordes sont toujours réelles (*), on trouvera toujours deux directions réelles de plans cycliques. Ces plans dont les directions peuvent se confondre, sont tous parallèles à un même axe, car sur chacun d'eux, un des points qui a même polaire dans les courbes ε, ε' relatives à ce plan, est à l'infini.

16. Revenons maintenant aux surfaces du second ordre distinctes des cônes; on peut les classer très facilement par la considération de leurs points à l'infini. Ces points appartiennent en effet au cône γ auquel se réduit la surface, quand on transporte parallèlement à eux mêmes les faisceaux o, o' du n.° 10, de manière à faire coïncider leurs centres; il en résulte, que *les sections d'une même surface du second ordre par des plans parallèles, sont homothétiques entre elles, ainsi qu'aux sections du cône γ par ces mêmes plans*; et que par suite, *de la forme de ce cône, dépendra celle des sections de la surface par des plans de diverses directions.*

Ce cône γ étant obtenu, quatre cas peuvent se présenter: (n.° 15).

1.° *Il est réel et a pour base une conique autre que l'ensemble de deux droites*; la surface proposée contient alors des hyperboles, des paraboles et des ellipses, on a un *hyperboloïde.*

2.° *Il est réel mais se réduit à deux plans*; les seules courbes que peut contenir la surface sont alors des paraboles et des hyperboles, cette surface est alors un *paraboloïde hyperbolique.*

3.° *Il se réduit à une droite on mieux à deux plans imaginaires contenant cette droite*; on a alors un *paraboloïde elliptique* qui ne peut avoir d'autres sections planes que des ellipses et des paraboles.

(*) Il est aisé de s'en assurer en prenant le plan S perpendiculaire à l'un des axes du cône, ce qui rend la conique ε concentrique au cercle ε'.

4.° *Son sommet seul est réel;* ce cas correspond à *l'ellipsoïde* sur lequel on ne peut placer que des ellipses.

On conclura du précédent n.°, que toutes les surfaces autres que le paraboloïde hyperbolique, possèdent deux directions de plans cycliques, qui se confondent quand le cône γ est de révolution, cas auquel, comme on le verra plus loin, la surface proposée est elle même de révolution; et si ce cône, étant imaginaire, ne pouvait être coupé par des plans quelconques que suivant des cercles (n.° 15), on en dirait autant de la surface qui serait une *sphère.*

§. III. *Des pôles et de leurs plans polaires.*

17. Soit une surface du second ordre ς déterminée par les faisceaux corrélatifs o, o'; soient encore un point fixe p pris à volonté, et une sécante mobile Π passant en ce point; le conjugué harmonique ϖ du point p, par rapport aux points d'intersection de la surface et de la sécante Π, décrit au certain lieu géométrique quand cette sécante pivote autour du point p; c'est ce lieu qui va nous occuper.

Concevons sur la sécante Π, les deux divisions homographiques déjà considérées au n.° 10, et dont les points doubles appartiennent à la surface; le conjugué harmonique du point p par rapport à ces points doubles, ne change pas, quand on remplace ces points doubles par les homologues p', p_1 du point p considéré comme appartenant successivement aux deux divisions (*Géom. Sup.* n.° 267). Or le lieu des points p', p_1 se compose des deux plans qui dans les faisceaux générateurs correspondent aux droites op, $o'p$; *le lieu cherché est donc un certain plan* $\mathfrak{P}$.

On nomme ce plan le *plan polaire* du point p qu'on nomme lui-même *pôle* du plan $\mathfrak{P}$.

18. Nous pouvons déterminer dès à présent, la *classe* des surfaces du second ordre; cette classe en effet, est égale au nombre des plans tangents (réels ou imaginaires) qu'on peut mener par une même droite à l'une de ces surfaces, ou ce qui revient au même, au cône circonscrit qui a pour sommet un point quelconque p de la droite proposée. Ce cône ayant évidemment pour base, la section de la surface par le plan polaire $\mathfrak{P}$ de son sommet, est du second ordre, ce qui permet de dire que *toutes les surfaces du second ordre sont aussi de la deuxième classe.*

19. La définition dn plan polaire entraine les théorèmes suivant:

Le plan polaire d'un point quelconque p, contient le pôle de tout plan qui contient lui-même le point p.

Le lieu des pôles d'une droite quelconque $\mathfrak{P}$, par rapport aux sections de la surface faites par des plans contenant cette droite, est une autre ligne droite, qui est en outre la corde de contact des plans tangents menés à la surface par la droite $\mathfrak{P}$.

Ces deux droites qui sont dans une parfaite réciprocité, sont celles que M. Poncelet nomme *polaires réciproques.*

La première des propositions précédentes, fournit un moyen pour construire le pôle d'un plan donné; ce pôle s'obtiendra en effet, en prenant l'intersection des plans polaires de trois points quelconques situés sur le plan donné.

Il résulte également de la même proposition, que *les points de l'espace et leurs plans polaires forment deux figures corrélatives*; on voit aisément en effet que le rapport anharmonique de quatre plans qui passent par un même droite quelconque, est égal à celui de leurs pôles.

Voici encore un théorème utile qui est une conséquence des précedents :

Quand une droite P tourne autour d'un point fixe p, sans quitter un même plan $\mathcal{Q}$, sa polaire réciproque P' pivote dans le plan polaire $\mathcal{P}$ du point p, autour d'un point fixe ϖ, pôle de l'intersection mutuelle des plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$, par rapport à la section faite dans la surface par le plan $\mathcal{P}$; et les deux faisceaux formés par les droites P, P' sont homographiques.

20. Si par un certain point p on méne un plan et la droite qui va au pôle de ce plan, ces deux éléments traceront sur le plan polaire du point p deux figures polaires réciproques dont les points doubles sont sur la surface du second ordre que l'on considère.

Ce point et cette droite qui sont conjugués dans le cône de sommet p circonscrit à la surface (n.° 13), sont dits également *conjugués* dans la surface, relativement au point p.

D'après cette définition, *si par une des droites qui passent par le point p, on méne deux plans dont chacun a son pôle sur l'autre, ils couperont le plan conjugué de la droite en question, suivant deux droites conjuguées dans la conique qui résulte de l'intersection de ce dernier plan et de la surface.*

Le théorème qu'on a démontré au n.° 14 entraine le suivant :

Dans toute surface du second ordre, il y a relativement à un point quelconque, trois droites réelles perpendiculaires à leurs plans conjugués.

On examinera plus loin le cas où le nombre de ces droites est supérieur a trois.

§. IV. *Du centre, des diamètres et des axes.*

21. Les divers théorèmes qui viennent d'être établis, comprennent, comme cas particuliers, toutes les propositions qui concernent les centres, les diamètres et les axes des surfaces du second ordre.

Si le point p du n.° 17 s'éloigne à l'infini, les sécantes qui y passent deviennent parallèles, et le plan $\mathcal{P}$ coupe en leurs milieux toute les cordes parallèles à la direction dans laquelle le point p s'est enfui; il en résulte que *toutes les surfaces* *diamétrales d'une surface du second ordre se réduisent à des plans*; il y a plus, comme tous les plans diamétraux contiennent nécessairement le pôle ω du plan de l'infini, et qu'ils sont respectivement parallèles aux plans diamétraux du cône γ (n.° 13), qui correspondent à des cordes de même direction, on pourra dire, que *dans les ellipsoïdes et les hyperboloïdes, les plans diamétraux passent tous par un même point ω non a l'infini,* centre *de la surface, et que dans les paraboloïdes, les plans diamétraux sont tous parallèles a une même droite.* On voit donc que les ellipsoïdes et les hyperboloïdes sont doués de centre, et que relativement aux paraboloïdes, le plan de l'infini ayant son pôle ω également à l'infini, doit être considéré comme tangent à la surface, puisque les plans tangents sont généralement les seuls qui contiennent leurs pôles.

Du §. III on conclut encore, que *le lieu des centres des sections parallèles d'une surface du second ordre, est une ligne droite passant par le point ω et qu'on nomme diamètre de la surface; et que les cylindres circonscrits ont tous pour bases des sections coniques concentriques avec la surface.*

22. On peut énoncer de la manière suivante, les propriétés reconnues dans le n.° 20 aux droites et plans conjugués relatifs au point ω:

Il y a dans chaque surface à centre, trois axes réels et trois plans de symétrie, tous parallèles à ceux du cône γ; cette surface est de révolution en même temps que le cône γ.

La considération de ce même cône, fait reconnaître que les paraboloïdes ont seulement deux plans de symétrie, excepté quand ils en ont une infinité et qu'ils sont par suite de révolution.

Si, étant donné un plan diamétral, on prend sa droite conjuguée et deux diamètres conjugués de la section qu'il détermine dans la surface, on a trois droites telles, que le plan conjugué de chacune d'elles est celui qui passe par les deux autres (n.° 20).

Quand on a transporté le cône γ parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son sommet coïncide avec le centre de la surface, on peut le considérer comme circonscrit, car il coupe le plan de l'infini, qui est le plan polaire de son sommet, suivant la même courbe que la surface. On le nomme alors *cône asymptote*, et il a mêmes axes et plus généralement, mêmes plans diamétraux et diamètres conjugués, que la surface à laquelle il appartient.

23. Avant de passer à d'autres considérations, il est bon de remarquer un moyen simple d'engendrer une surface du second ordre, par l'intersection des éléments correspondants de deux faisceaux corrélatifs. Il suffit en effet de supposer, que les points o, o' du n.° 11bis, sont les extrémités d'un même axe (rien ne s'opposant à que l'une de ces extrémités se trouve à l'infini); que le plan s est perpendiculaire à cet axe,

et que les faisceaux o, o' tracent sur le plan s, deux figures polaires réciproques, par rapport à la section réelle on imaginaire de la surface coupée par le plan s. La discussion du lieu sera de la sorte extrêmement facile, et si le plan s passe par le centre on écrira de suite l'équation de la surface rapportée à ses axes.

§. V. *Des génératrices rectilignes.*

24. Nous avons vu que le nombre des points d'intersection d'une surface du second ordre par une droite quelconque, ne peut surpasser deux, sans être indéterminé; ce dernier cas correspond à des surfaces sur lesquelles on peut placer des droites, et par suite des sections coniques se réduisant à deux droites; voyons maintenant comment cette particularité peut se présenter.

Si un plan sécant vient à se mouvoir parallèlement à une direction donnée, la section conserve les mêmes point à l'infini, et son centre décrit une ligne droite qui passe par les points de contact des plans tangents à la surface menés parallèlement à la direction donnée. Chacun de ces plans tangents coupe donc la surface suivant une conique qui contient son centre, c'est-à-dire suivant une système de deux droites et on peut énoncer le théorème suivant.

Tout plan tangent à une surface du second ordre, la coupe suivant deux droites, réelles quand le cône γ de cette surface (n.° 16) *coupe le plan tangent suivant une hyperbole ou une parabole, et imaginaires quand ce même cône y trace une ellipse.*

Les droites ainsi obtenues sont les asymptotes de la section du cône asymptote par le plan qui les contient.

Ce théorème et la remarque qui le suit permettent de construire les génératrices rectilignes en un point quelconque d'une surface qui en possède, et de décider si une surface donnée est réglée on non. Effectivement, les ellipsoïdes et les paraboloïdes elliptiques ne pouvant contenir aucune hyperbole, n'auront pas de génératrices rectilignes, tandis que les paraboloïdes hyperboliques en auront toujours, qui seront toutes parallèles, les unes à l'un des plans auxquels se réduit le cône asymptote (n.° 16), les autres à l'autre plan. Ces deux plans sont les *plans directeurs* du paraboloïde.

Quant à l'hyperboloïde, on observera que les plans menés par le centre d'une semblable surface, parallèlement à ses plans tangents, coupent le cône asymptote suivant des systèmes de deux droites qui sont toutes à la fois, soit réelles, soit imaginaires (*); on aura dans le premier cas deux génératrices rectilignes en chaque point de la surface, tandis qu'on n'en aura jamais dans le second.

(*) Pour s'en convaincre on fera ce raisonnement: il est impossible qu'un hyperboloïde ait un point commun avec son cône asymptote, car si cela était, l'arête du cône menée à ce point, qui a déja deux points à l'infini sur l'hyperboloïde, aurait trois points communs avec la surface, chose qui ne peut arriver:

On trouve ainsi deux sortes d'hyperboloïdes; ceux qui sont réglés, nommés aussi hyperboloïdes *à une nappe*, et ceux qui ne le sont pas, ou hyperboloïdes *à deux nappes*.

25. Si on coupe une même surface réglée du second ordre par des plans tangents menés en deux points différents, on obtiendra deux couples de droites concourantes, qui se rencontrent deux à deux sur l'intersection des plans tangents ; il en résulte, que *les génératrices d'une même surface réglée, se partagent en deux systèmes tels, que les génératrices de l'un rencontrent toutes celles de l'autre, sans rencontrer celles de leur système.* Les deux génératrices d'un même point appartiennent par suite à des systèmes différents.

26. Les génératrices d'une surface réglée du second ordre présentent une propriété remarquable découverte par M. Chasles (*Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*) et qui consiste en ce que :

Les génératrices d'un même système divisent homographiquement deux génératrices quelconques appartenant à l'autre.

Cette proposition est évidente dans le cas du paraboloïde hyperbolique (n.° 23); les divisions sont même *semblables*, puisqu'elles sont tracées par des droites parallèles à un même plan.

Pour démontrer le théorème sur l'hyperboloïde, je nommerai Γ_1, Γ_2, les génératrices fixes faisant partie d'un même système;

Γ la génératrice mobile de l'autre système; G_1, G_2, G les arêtes du cône asymptote parallèles à ces trois droites;

Les plans $G_1 G$, $G_2 G$, forment évidemment deux faisceaux homographiques, lorsque la génératrice G vient à se mouvoir sur le cône asymptote; donc, les plans $\Gamma_1 \Gamma$, $\Gamma_2 \Gamma$ qui leur sont respectivement parallèles, appartiennent aussi à deux faisceaux homographiques, ce qui entraine la proposition énoncée.

La réciproque de cette proposition, évidente lorsqu'on adopte pour les surfaces du second ordre la définition que nous en avons donnée au §. II, conduit aux théorèmes qui concernent la génération de l'hyperboloïde à une nappe, ou du paraboloïde hyperbolique, par une génératrice rectiligne s'appuyant sur des directrices également rectilignes.

27. On a omis pour simplifier quelques cas particuliers qui peuvent se présenter, mais leur discussion n'offre aucune difficulté. La surface ς du n.° 10 peut se réduire à un cône, à un cylindre ou à l'ensemble de deux plans, et on voit alors comment doivent être modifiés les théorèmes qui ont été démontrés jusqu'à présent.

---

les rayons vecteurs menés du centre aux différents points de la surface sont donc, soit tous à l'extérieur, soit tous à l'intérieur du cône, de sorte que les parallèles aux plans tangents, qui sont dans le cône aussi bien que dans la surface, les plans diamétraux conjugués de ces rayons vecteurs, couperont le cône suivant deux génératrices, réelles dans le premier cas, et imaginaires dans le second.

§. VI. *Autre mode de génération des surfaces du second ordre.*

28. Les surfaces du second ordre ont été considérées jusqu'à présent, comme lieux des points d'intersection des éléments correspondants de deux faisceaux corrélatifs; ces mêmes surfaces peuvent encore être envisagées sous un autre point de vue non moins avantageux, mais dont nous ne développerons pas les conséquences.

Concevons deux figures corrélatives F, F' dont les plans sont distincts; le plan qui passe par un point m de la première, et par la droite corrélative M' de ce point, varie quand le point m se déplace; et il enveloppe une surface que nous allons reconnaître appartenir au second ordre.

On verra par des raisonnements que nous ne pouvons pas faire ici, mais qui sont tout-à-fait semblables à ceux du n.° 10, que la surface enveloppée est de la deuxième classe, et on construira sans peine les plans tangents menés par une droite quelconque, ou le cône circonscrit ayant pour sommet un point donné à volonté. La surface est tangente aux plans F, F' en des points qu'on aperçoit de suite.

Au théorème du n.° 17 correspond celui-ci: *Une droite mobile étant prise à volonté dans dans un plan fixe $\mathfrak{P}$, le conjugué harmonique du plan $\mathfrak{P}$ par rapport aux plans tangents issus de la droite en question, passe par un point fixe p qui est le pôle du plan $\mathfrak{P}$.*

D'où il résulte par un raisonnement analogue à celui du n.° 18, *que la surface enveloppée par le plan $\overline{mM'}$ est du second ordre.*

On en déduit encore le théorème suivant :

Le plan conjugué d'une droite fixe dans un cône circonscrit qui a son sommet sur cette droite, contient la polaire réciproque de la droite considérée.

29. La surface enveloppée par le plan $\overline{mM'}$ du précédent n.°, est du second ordre comme on vient de s'en assurer; mais on peut affirmer de plus, que *les plans tangents à une surface quelconque du second ordre, tracent sur deux plans tangents fixes de cette surface, deux droites associées dans deux figures corrélatives* (n.° 4).

Nommons en effet :

o, o' les centres des faisceaux corrélatifs qui donnent naissance à une surface du second ordre,

ϖ, ϖ' les plans tangents menés en ces points,

k un point quelconque de la surface,

$\mathfrak{X}$ le plan tangent mené en ce point,

M, M' les traces du plan $\mathfrak{X}$ sur les plans ϖ, ϖ',

x_1, x_2 les traces des droites O'k, Ok sur les plans ϖ, ϖ';

le point x_1 correspond anharmoniquement à la droite M', car la droite $o'x_1$ étant la polaire réciproque de la droite M', le point x_1 décrit une droite quand M' enveloppe un point, et trace sur cette droite, un faisceau homographique au faisceau engendré par la droite M' (n.° 19); le point x_2 correspond de la même manière à la droite M, et par suite, les droites M, M' sont associées puisque les points x_1, x_2 le sont eux-mêmes (n.° 4).

30. Une méthode semblable a celle du n.° 11, permet de résoudre le problème qui consiste, à *construire la surface du second ordre tangente à neuf plans donnés*; on énoncera comme il suit la relation qui existe entre dix plans tangents d'une même surface du second ordre : *huit de ces plans tracent sur les deux autres, huit couples de droites associées dans deux figures corrélatives.*

Les principes contenus dans ce paragraphe seront, ainsi que les autres, employés avantageusement dans les diverses questions relatives aux surfaces du second ordre.

§. VII. *Propriétés relatives aux systèmes de plusieurs surfaces du second ordre.*

31. Les points communs à deux surfaces du second ordre sont situés sur une courbe qui est ordinairement à double courbure, et qu'un plan quelconque ne peut généralement couper en plus de quatre points; cette courbe est déterminée quand on en connait huit points, car avec deux autres points pris à volonté on déterminera deux surfaces du second ordre passant par ces huit points, et leur intersection sera la courbe θ.

L'enveloppe des plans tangents communs à ces deux mêmes surfaces, est une surface développable Θ, à laquelle on ne peut mener plus de quatre plans tangents par un même point; huit plans suffisent pour déterminer cette surface développable.

Cela posé, on démontre aisément les deux propositions suivantes :

Une système de surfaces du second ordre ayant en commun huit points (*ou ce qui revient au même une courbe θ*), *détermine sur une transversale rectiligne quelconque, deux divisions homographiques en involution.*

Les plans tangents menés par une même droite à des surfaces du second ordre inscrites dans la même surface Θ, forment deux faisceaux homographiques en involution.

32. Ces théorèmes conduisent aux solutions des questions suivantes qui se présentent quelquefois :

1.° *Construire une surface du second ordre contenant une courbe θ et tangente à un plan donné.*

2.° *Construire une surface du second ordre circonscrite à une surface Θ et passant par un point donné.*

On trouvera comme il suit dans le premier problème, le point de contact de la surface demandée avec le plan qu'elle doit toucher; par la courbe θ, on fera passer deux surfaces du second ordre qui traceront sur le plan donné deux certaines sections coniques, et l'un quelconque des trois points qui ont même polaire dans ces deux courbes, pourra servir de point de contact. Il y a ainsi trois solutions dont l'une au moins donne toujours une surface réelle. Il est bon d'observer que les diagonales du quadrilatère inscrit aux sections coniques sont des génératrices rectilignes des trois surfaces.

La seconde question, qui trouvera plus loin une application importante, a également trois solutions que l'on obtiendra en suivant une marche semblable.

33. Les surfaces du second ordre qui ont en commun une courbe θ, ou une surface Θ, jouissent encore de cette propriété extrêmement remarquable :

Il y a quatre points dont chacun a même plan polaire relativement à toutes les surfaces.

Le 1$^{\text{er}}$ théorème du n.° 31 permet de borner la démonstration au cas où les surfaces proposées sont seulement au nombre de deux; c'est dans cette hypothèse que nous nous placerons pour démontrer cette proposition découverte par M. Poncelet (Voir la fin du *Traité des propriétés projectives des figures*). Considérons donc deux surfaces quelconques du second ordre, et les plans polaires d'un même point par rapport à l'une et à l'autre; le point venant à se déplacer, ces plans forment deux figures homographiques, puisque d'après le n.° 19 ils sont les éléments corrélatifs d'un même point; le théorème de M. Poncelet entraine donc celui-ci et réciproquement.

Dans deux figures homographiques, il y a quatre plans sur chacun des quels, deux points homologues se confondent. Pour démontrer cette dernière proposition, prenons dans les deux figures, deux droites homologues M, M'; les plans homologues qui contiennent respectivement ces droites, se coupent suivant les génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe, dont chaque point α jouit évidemment de la propriété d'avoir son homologue α', sur le plan αM'; prenons encore deux droites homologues N, N', rencontrant respectivement les premières, et construisons l'hyperboloïde engendré par l'intersection de deux plans homologues variables, mais ne cessant jamais de passer par les droites N, N'; deux droites homologues P, P' rencontrant respectivement les premières, donnent encore naissance à un troisième hyperboloïde dont les points ainsi que ceux du second jouissent de la proprieté reconnue à ceux du premier. Ces trois surfaces qui jouissent évidemment de la propriété de contenir tout point qui est lui même son homologue, se coupent en huit points; deux de ces points se trouvent sur l'intersection des plans MN, M'N', deux autres sur l'intersection des plans MP, M'P' et chacun des quatre points qui restent, coïncide avec son homologue; car si α est un de ces points, son homologue se trouve contenu à la fois sur chacun des plans αM', αN', αP', c'est-à-dire en α même. Les quatre points mis de côté ne conviennent évidemment pas, et ceux qui ont été conservés pris trois à trois déterminent les quatre plans jouissant des propriétés annoncées.

34. Ce théorème est l'un des plus utiles que l'on commaisse sur les surfaces du second ordre, les exemples suivants font apprécier son importance.

Concevons deux surfaces du second ordre et la courbe θ qui leur est commune; si par un point α qui a même plan polaire, et par la courbe θ, nous faisons passer une troisième surface, nous obtiendrons un cône ayant α pour sommet; car le plan polaire du point α par rapport à cette troisième surface étant le même que par rapport aux proposées, ne passe pas par ce point, ce qui aurait nécessairement lieu si cette troisième surface n'était pas un cône de sommet α; on a donc cette proposition:

Par toute courbe θ on peut faire passer quatre cônes du second degré, et par suite les suivantes:

Si deux surfaces du second ordre ont un plan diamétral commun, la projection de leur intersection faite sur ce plan, par des parallèles aux cordes qu'il divise en deux parties égales, est une section conique.

Si deux surfaces du second ordre se coupent suivant une courbe plane, elles contiennent chacune encore une autre courbe plane; car alors, l'un des cônes qui passent par la courbe θ contenant tous les points d'un plan, contient nécessairement aussi tous ceux d'un autre.

On déduira encore du théorème de M. Poncelet les propositions suivantes:

Étant donné deux surfaces du second ordre, quatre sections coniques peuvent être placées sur la surface Θ qui les circonscrit toutes deux.

Si deux surfaces du second ordre sont circonscrites à un même cône, elles le sont encore à un autre cône.

On remarquera combien les propositions contenues dans ce paragraphe, présentent d'analogie avec celles qu'on peut établir, sur les quadrilatères inscrits et circonscrits aux sections coniques.

§. VIII. *Des lignes focales et des surfaces homofocales.*

34.bis L'exposition des principales propriétés des lignes focales terminera ce travail; on va voir qu'elles sont toutes des conséquences très simples des principes précédemment établis.

Concevons une surface du second ordre S circonscrite à une des surfaces développables désignée par Θ dans le paragraphe précédent, et d'un point arbitraire m pris pour sommet, menons le cône circonscrit à la surface S et ceux qui ont pour base les 4 sections coniques S_1, S_2, S_3, S_4, qui peuvent d'après le n.° 34 être placées sur la surface Θ. Les cinq cônes ainsi obtenus ayant quatre plans circonscrits communs (*), on peut trouver une droite E dont les plans conjugués dans tous les

(*) On entend ici par *plans circonscrits* à un cône, ceux qui lui sont tangents tout le long d'une génératrice; le nom de plan tangent pouvant être appliqué indistinctement à tous les plans qui passent par le sommet.

cônes et même dans la surface se confondent; la droite E et son plan conjugué que nous désignerons à l'aide de la lettre $\mathcal{E}$ tracent sur un quelconque des plans S_1, S_2, S_3, S_4, un point et une droite faisant partie de deux figures polaires réciproques. Sur le plan S_1, par exemple, on a une droite qui est la polaire du point correspondant, par rapport à la conique S_1; une des coniques S_1, S_2, S_3, S_4, jointe à la surface, suffit d'ailleurs pour déterminer en chaque point de l'espace, les éléments E $\mathcal{E}$, nous sommes donc conduits au théorème suivant:

Si relativement à chaque point de l'espace, il existe une droite E *et un plan* $\mathcal{E}$, *conjugués par rapport à la surface S, et qui tracent sur un plan fixe deux figures polaires réciproques, ils détermineront encore de semblables figures sur trois certains plans fixes distincts du premier.*

Ces plans sont aussi ceux, qui passant par le pôle du plan fixe donné, sont conjugués deux à deux relativement à la surface S, et tracent sur le plan fixe, trois droites également conjuguées deux à deux par rapport à la section conique S_1, lieu des points doubles des figures corrélatives qui existent sur ce plan.

35. Rien n'empêche d'appliquer ce théorème aux droites E, et aux plans $\mathcal{E}$, qui en chaque point de l'espace, sont perpendiculaires et conjugués (n.° 20); car ces plans et ces droites tracent sur le plan de l'infini, deux figures polaires réciproques, qui ont leurs points doubles sur le cercle imaginaire qu'une sphère quelconque détermine sur le plan de l'infini; les plans S_2, S_3, S_4, se confondent alors avec les plans principaux de la surface, d'où le théorème suivant:

Si par chaque point de l'espace, on méne un plan et une droite rectangulaires et conjugués par rapport à une même surface du second ordre, ce plan et cette droite tracent sur chacun des plans principaux de la surface deux figures polaires réciproques.

Les coniques lieux des points doubles de ces figures, ont reçu le nom de *lignes focales*; il y en a une sur chaque plan principal.

Les lignes focales peuvent être considérées comme étant les sections coniques que l'on peut placer sur la surface Θ circonscrite à la fois, à la surface proposée et au cercle imaginaire.

36. On peut maintenant résoudre la question suivante:

Étant donné un plan $\mathfrak{P}$, *trouver une droite qui lui soit perpendiculaire et conjuguée.*

On cherchera l'intersection Π du plan donné avec un des plans principaux, et du pôle de cette droite, par rapport à la focale, on abaissera une perpendiculaire sur le plan $\mathfrak{P}$; cette perpendiculaire est précisément la droite cherchée.

Si la droite Π venait à être tangente à la focale, la droite cherchée passérait, quelque soit le plan donné, par le point de contact et on aurait une infinité de solutions; d'où le théorème suivant:

En chaque point d'une focale, il y a une infinité de plans perpendiculaires à leurs droites conjuguées; tous ces plans contiennent la tangente à la focale.

Il revient encore au même de dire, *que les focales d'une surface du second ordre, constituent le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à cette surface et l'enveloppe des axes principaux de ces cônes.*

Quand un plan sécant $\mathfrak{Q}$ *est normal à une focale en un point m, la section de la surface par ce plan a le point m pour foyer*; cela résulte de ce que les couples de plans qui passent par la tangente à la focale menée au point m, et dont chacun contient le pôle de l'autre, tracent sur le plan $\mathfrak{Q}$ deux droites Q, Q', conjuguées par rapport à la courbe d'intersection (n.° 20), et rectangulaires (n.° 36).

37. On peut maintenant construire les focales; chacune de ces courbes a visiblement même centre et mêmes axes que la section principale contenue dans son plan; elle a pour sommets les foyers des sections principales dont les plans sont perpendiculaires au sien, et pour foyers les sommets des deux autres focales.

On reconnaitra ainsi que les surfaces à centre ont deux focales réelles, l'une elliptique, l'autre hyperbolique, qui dans les cônes se réduisent au sommet et à deux droites; les focales réelles des paroboloïdes sont d'ailleurs deux paraboles.

38. Les propriétés des surfaces *homofocales*, c'est-à-dire ayant mêmes lignes focales, se tirent des considérations exposées aux n.° 31 et suivants; ces surfaces sont en effet circonscrites à une même surface développable Θ.

Ainsi :

Les surfaces homofocales ont mêmes axes et mêmes plans principaux (33).

Les plans tangents menés à des surfaces homofocales par une même droite, forment deux faisceaux homographiques en involution (31).

Les cônes de même sommet circonscrits à des surfaces homofocales, peuvent être considérés comme circonscrits en même temps à quatre mêmes plans (*).

Le problème qui consiste à *construire une surface homofocale à une surface donnée et passant par un point donné m*, n'offre pas de difficulté; la surface donnée et la surface cherchée peuvent en effet être considérées, comme circonscrites à une même surface développable Θ contenant le cerle imaginaire à l'infini (n.° 35). Il faut dès lors, concevoir au point m comme sommet, le cône circonscrit à la surface proposée et celui qui a pour base le cercle imaginaire, puis prendre les trois plans dont les droites conjuguées prises dans ces cônes de confondent; ces plans, qui sont évidemment les plans principaux du cône circonscrit, sont tangents aux surfaces qui répondent à la question et qui sont maintenant faciles à construire. Il y a ainsi trois so-

(*) Ces plans sont imaginaires et tracent sur le plan de l'infini, des tangentes au cercle imaginaire du n.° 35.

lutions correspondant à trois surfaces, qui ont pour normales au point m, les axes du cône circonscrit à la surface proposée.

Les surfaces homofocales se coupent donc orthogonalement, lorsqu'elles ont des points communs.

Les intersections mutuelles de ces surfaces sont, comme on le sait, leurs lignes de courbure, et comme les points qui ont même plan polaire dans toutes les surfaces, sont ici leur centre commun, et les points situés à l'infini sur leurs trois axes communs, on pourra dire (n.° 34) : que *les lignes de courbure d'un nombre quelconque de surfaces homofocales*, *sont situées sur des cônes du second ordre ayant pour sommet commun le centre de ces surfaces*, et que *les projections orthogonales de ces lignes de courbure sur les plans principaux des surfaces que les contiennent*, *sont des sections coniques.*

39. On vient de voir que les cônes de même sommet a, circonscrits à des surfaces homofocales, sont tous inscrits dans quatre mêmes plans, on peut dire, qu' *ils ont aussi même lignes focales et par suite mêmes axes.* Ces quatre plans dans lesquels ils sont inscrits, constituent en effet comme on l'a vu, une surface développable Θ circonscrite au cercle imaginaire à l'infini du n.° 35. Les lignes focales que nos cônes ont en commun, sont en outre les génératrices rectilignes des trois surfaces homofocales aux surfaces proposées, qu'on peut faire passer par le point a; on s'en assure en observant, que ces lignes focales sont les trois couples d'intersection des quatre plans imaginaires dont on vient de parler, et que ces plans étant tangents aux trois surfaces qui passent par le point a, se coupent deux à deux suivant des génératrices rectilignes de ces surfaces.

Les cônes de même sommet circonscrits à des surfaces homofocales, étant homofocaux ainsi que ceux qui ont pour bases les focales des surfaces proposées, se coupent orthogonalement; on peut énoncer cette propriété en disant, que *les contours apparents de plusieurs surfaces homofocales vues d'un même point, paraissent se couper à angle droit, ainsi que leurs focales communes.*