# Über nichthomogene lineare Differentialgleichungen.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

---

In der vorausgehenden Note über divergente Reihen habe ich einen Beweis und eine Anwendung des folgenden Satzes gegeben:

Wenn $\omega(x)$ der linearen Differentialgleichung genügt:

$$\omega'(x) + \omega(x) = \varphi(x),$$

und wenn $\varphi(x)$ für $x \to \infty$ einem endlichen Grenzwert zustrebt, so strebt $\omega(x)$ demselben Grenzwert zu.

Dieser Satz läßt sich auf lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung ausdehnen, was mir nicht ohne Interesse zu sein scheint.

## § 1.

Satz 1. *Die Koeffizienten $a_\nu$ der linearen Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = \varphi(x) \tag{1}$$

*seien konstant, und die Wurzeln der Gleichung*

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{2}$$

*seien sämtlich reell und von Null verschieden (so daß auch alle $a_\nu$ reell sind, und $a_n \neq 0$ ist). Wenn dann die Funktion $\varphi(x)$ für $x \geqq x_0$ stetig ist und für $x \to \infty$ einem endlichen Grenzwert $b$ zustrebt, so hat die Differentialgleichung ein Integral $y$, welches für $x \to \infty$ dem Grenzwert $\frac{b}{a_n}$ zustrebt, während die Ableitungen $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ gegen Null konvergieren.*

*Sind die $n$ Wurzeln der obigen Gleichung alle negativ, so hat sogar* j e d e s *Integral $y$ diese Eigenschaft.*

Beweis. Offenbar genügt es, den Satz für reelle $\varphi(x)$ zu beweisen, weil man andernfalls den reellen und imaginären Teil der Gleichung (1) gesondert betrachten kann. Sind $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ die Wurzeln der Gleichung (2), so läßt sich die Differentialgleichung (1) ersetzen durch das System

$$
(3) \qquad \begin{cases} y_1' - \varrho_1 y_1 = y_2, \\ y_2' - \varrho_2 y_2 = y_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}' - \varrho_{n-1} y_{n-1} = y_n, \\ y_n' - \varrho_n y_n \quad = \varphi(x), \end{cases}
$$

und zwar ist dann $y = y_1$.

Aus der letzten der Gleichungen (3) folgt:

$$
(4) \qquad y_n = e^{\varrho_n x} \int e^{-\varrho_n x} \varphi(x)\, dx = \frac{\int e^{-\varrho_n x} \varphi(x)\, dx}{e^{-\varrho_n x}}.
$$

Wenn nun $\varrho_n < 0$, so wächst der Nenner in (4) für $x \to \infty$ über alle Grenzen, so daß man den Grenzwert des Quotienten berechnen kann, indem man Zähler und Nenner differenziert (Satz von Stolz; vgl. das Zitat in der vorausgehenden Arbeit). So erhält man:

$$
(5) \qquad \lim_{x=\infty} y_n = \lim_{x=\infty} \frac{\int e^{-\varrho_n x} \varphi(x)\, dx}{e^{-\varrho_n x}} = \lim_{x=\infty} \frac{e^{-\varrho_n x} \varphi(x)}{-\varrho_n e^{-\varrho_n x}} = -\frac{b}{\varrho_n}.
$$

Wenn aber $\varrho_n > 0$, so ist bei dem Integral in (4) die untere Grenze $\infty$ zulässig. Dann haben Zähler und Nenner für $x \to \infty$ beide den Grenzwert Null, so daß man den Grenzwert des Quotienten ebenso berechnen kann wie oben.

Die Formel (5) gilt also in allen Fällen, und aus ihr folgt weiter mit Hilfe der letzten der Gleichungen (3):

$$
(6) \qquad \lim_{x=\infty} y_n' = 0.
$$

Aus der vorletzten der Gleichungen (3) ergibt sich nun, nachdem der Grenzwert der rechten Seite aus (5) bereits bekannt ist, ebenso:

$$
(7) \qquad \lim_{x=\infty} y_{n-1} = \frac{b}{\varrho_n \varrho_{n-1}}, \quad \lim_{x=\infty} y_{n-1}' = 0.
$$

Weiter erhält man durch Differentiation der vorletzten Gleichung (3):

$$
y_{n-1}'' - \varrho_{n-1} y_{n-1}' = y_n',
$$

und hieraus wegen (6) und (7):

$$
\lim_{x=\infty} y_{n-1}'' = 0.
$$

Nunmehr ergibt sich auf die gleiche Weise aus der drittletzten der Gleichungen (3), sowie aus den durch ein- und zweimalige Differentiation aus ihr hervorgehenden Gleichungen:

$$
\lim_{x=\infty} y_{n-2} = -\frac{b}{\varrho_n \varrho_{n-1} \varrho_{n-2}}, \quad \lim_{x=\infty} y_{n-2}' = 0, \quad \lim_{x=\infty} y_{n-2}'' = 0, \quad \lim_{x=\infty} y_{n-2}''' = 0.
$$

In dieser Weise kann man fortfahren, und erhält schließlich aus der ersten der Gleichungen (3), sowie aus denen, die daraus durch ein-, zwei-, ..., $(n-1)$-malige Differentiation hervorgehen:

$$\lim_{x=\infty} y_1 = (-1)^n \frac{b}{\varrho_n \varrho_{n-1} \dots \varrho_1} = \frac{b}{a_n},$$

$$\lim_{x=\infty} y_1' = 0, \quad \lim_{x=\infty} y_1'' = 0, \quad \dots, \quad \lim_{x=\infty} y_1^{(n)} = 0.$$

Damit ist die Existenz eines Integrals $y = y_1$ bewiesen, das die in Satz 1 behauptete Eigenschaft hat. Von diesem partikulären Integral unterscheidet sich das allgemeine nur durch additive Glieder der Form $C e^{\varrho_\nu x} x^\lambda$, und diese haben, wenn alle $\varrho_\nu$ negativ sind, den Grenzwert Null; ebenso ihre Ableitungen, womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Der Satz gilt nicht mehr, wenn für die Wurzeln $\varrho_\nu$ auch imaginäre Werte zugelassen werden. Beispielsweise hat die Gleichung

$$y'' + y = \frac{\cos x}{x}$$

das allgemeine Integral

$$y = \sin x \left(C_1 + \int_a^x \frac{\cos^2 x}{x} \, d x\right) - \cos x \left(C_2 + \int_a^x \frac{\sin 2 x}{2 x} \, d x\right);$$

daher ist, obwohl die Funktion $\varphi(x) = \frac{\cos x}{x}$ für $x \to \infty$ dem Grenzwert Null zustrebt, doch für jedes Integral $y$:

$$\limsup_{x=\infty} y = \infty, \quad \liminf_{x=\infty} y = -\infty.$$

## § 2.

Der Satz 1 läßt sich mit gewissen Einschränkungen auf den Fall ausdehnen, daß an Stelle der konstanten Koeffizienten $a_\nu$ Funktionen von $x$ treten, die für $x \to \infty$ gegen endliche Grenzwerte konvergieren.

Satz 2. *Die Koeffizienten der Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + \dots + f_n(x) y = \varphi(x)$$

*mögen für $x \geqq x_0$ reell und stetig sein und den Bedingungen genügen:*

$$\lim_{x=\infty} f_\nu(x) = a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

$$\lim_{x=\infty} \varphi(x) = b.$$

*Die Wurzeln der „charakteristischen Gleichung“*

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

*seien reell, ungleich Null, und voneinander verschieden. Dann* *hat die Differentialgleichung ein Integral $y$, für welches die Beziehungen gelten:*

$$\lim_{x=\infty} y = \frac{b}{a_n}, \quad \lim_{x=\infty} y' = 0, \quad \ldots, \quad \lim_{x=\infty} y^{(n)} = 0.$$

*Sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung alle negativ, so hat jedes Integral diese Eigenschaft.*

Beweis. Nach einem früher von mir bewiesenen Satz hat die homogene Differentialgleichung

$$y^{(n)} + f_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)\, y = 0$$

ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, für welches

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_\nu'}{y_\nu} = \varrho_\nu, \quad \lim_{x=\infty} \frac{y_\nu''}{y_\nu} = \varrho_\nu^2, \ldots, \lim_{x=\infty} \frac{y_\nu^{(n)}}{y_\nu} = \varrho_\nu^n \tag{8}$$

ist[1]). Ein Integral der inhomogenen Differentialgleichung des Satzes 2 hat dann bekanntlich die Form

$$y = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu u_\nu, \tag{9}$$

wobei die Funktionen $u_\nu$ dem folgenden Gleichungssystem genügen:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu u_\nu' = 0, \\ &\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu' u_\nu' = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(n-2)} u_\nu' = 0, \\ &\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(n-1)} u_\nu' = \varphi(x). \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Hieraus folgt dann mit Rücksicht auf (8), daß die Grenzwerte

$$\lim_{x=\infty} y_\nu u_\nu' = \gamma_\nu \tag{11}$$

existieren, und zwar ist

[1]) Satz 5 meiner Arbeit: Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist; erste Mitteilung. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **142**, S. 254–270.

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu = 0, \\ &\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu \gamma_\nu = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu^{n-2} \gamma_\nu = 0, \\ &\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu^{n-1} \gamma_\nu = b; \end{aligned}\right.$$

oder durch Auflösung nach $\gamma_\nu$, wenn

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = F(\varrho)$$

gesetzt wird:

$$\gamma_\nu = \frac{b}{F'(\varrho_\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Setzt man nun

$$\frac{y_\nu'}{y_\nu} = \varrho_\nu + \varepsilon_\nu(x), \qquad y_\nu u_\nu' = \gamma_\nu + \delta_\nu(x), \tag{13}$$

so ist nach (8) und (11)

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon_\nu(x) = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \delta_\nu(x) = 0. \tag{14}$$

Aus (13) folgt:

$$\begin{aligned} y_\nu &= e^{\varrho_\nu x + \int \varepsilon_\nu(x)\, dx}, \\ u_\nu' &= (\gamma_\nu + \delta_\nu(x))\, y_\nu^{-1} = (\gamma_\nu + \delta_\nu(x))\, e^{-\varrho_\nu x - \int \varepsilon_\nu(x)\, dx}, \end{aligned} \tag{15}$$

und daher durch Integration:

$$u_\nu = \int (\gamma_\nu + \delta_\nu(x))\, e^{-\varrho_\nu x - \int \varepsilon_\nu(x)\, dx}\, dx.$$

Schließlich ist also

$$y_\nu u_\nu = \frac{\int (\gamma_\nu + \delta_\nu(x))\, e^{-\varrho_\nu x - \int \varepsilon_\nu(x)\, dx}\, dx}{e^{-\varrho_\nu x - \int \varepsilon_\nu(x)\, dx}}. \tag{16}$$

Wenn $\varrho_\nu < 0$, so wächst der Nenner in (16) für $x \to \infty$ über alle Grenzen, und man erhält den Grenzwert des Bruches, indem man Zähler und Nenner differenziert, und zwar ergibt sich:

$$\lim_{x=\infty} y_\nu u_\nu = \lim_{x=\infty} \frac{(\gamma_\nu + \delta_\nu(x))\, e^{-\varrho_\nu x - \int \varepsilon_\nu(x)\, dx}}{(-\varrho_\nu - \varepsilon_\nu(x))\, e^{-\varrho_\nu x - \int \varepsilon_\nu(x)\, dx}} = -\frac{\gamma_\nu}{\varrho_\nu} = -\frac{b}{\varrho_\nu F'(\varrho_\nu)}. \tag{17}$$

Wenn aber $\varrho_\nu > 0$, so ist bei dem Zählerintegral in (16) die untere

Grenze $\infty$ zulässig. Dann haben Zähler und Nenner für $x \to \infty$ den Grenzwert Null, und daher gilt wiederum die Formel (17). Daraus folgt dann weiter:

$$\lim_{x=\infty} y = \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu u_\nu = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{b}{\varrho_\nu F'(\varrho_\nu)} = \frac{b}{F(0)} = \frac{b}{a_n}. \tag{18}$$

Aus (9) und (10) erhält man durch sukzessive Differentiation:

$$y' = \sum_{\nu=1}^{n} (y'_\nu u_\nu + y_\nu u'_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} y'_\nu u_\nu,$$

$$y'' = \sum_{\nu=1}^{n} (y''_\nu u_\nu + y'_\nu u'_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} y''_\nu u_\nu,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n-1)} = \sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu^{(n-1)} u_\nu + y_\nu^{(n-2)} u'_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(n-1)} u_\nu,$$

$$y^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu^{(n)} u_\nu + y_\nu^{(n-1)} u'_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(n)} u_\nu + \varphi(x).$$

Daher mit Rücksicht auf (8) und (17) für $\lambda = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\left\{\begin{aligned} \lim_{x=\infty} y^{(\lambda)} &= \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(\lambda)} u_\nu = \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{y_\nu^{(\lambda)}}{y_\nu} y_\nu u_\nu \\ &= -\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu^{\lambda} \frac{b}{\varrho_\nu F'(\varrho_\nu)} = -b \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^{\lambda-1}}{F'(\varrho_\nu)} = 0, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

und außerdem:

$$\left\{\begin{aligned} \lim_{x=\infty} y^{(n)} &= \lim_{x=\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{y_\nu^{(n)}}{y_\nu} y_\nu u_\nu + \varphi(x)\right) \\ &= -b \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^{n-1}}{F'(\varrho_\nu)} + b = 0. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Die Formeln (18), (19), (20) zeigen, daß es in der Tat ein Integral $y$ von der in Satz 2 behaupteten Art gibt. Von diesem unterscheidet sich aber das allgemeine Integral nur durch additive Glieder der Form $C_\nu y_\nu$; wenn die Wurzeln $\varrho_\nu$ negativ sind, so konvergieren diese Zusatzglieder nach (15) für $x \to \infty$ gegen Null, und wegen (8) gilt dann das gleiche auch von ihren Ableitungen bis zur $n$-ten einschließlich. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 26. Juli 1919.)