Zum Problem des Apollonius.

Von Stoll in Bensheim an der Bergstrasse.

Die Anregung zu der folgenden Arbeit empfing ich von Herrn Professor Dr. Sturm, welcher mich darauf aufmerksam machte, dass bei dem allgemeinen Problem des Apollonius die zwei conjugirten Berührungskreise nicht immer, wie man gewöhnlich anzunehmen scheine, ungleichartige Berührungen eingingen, sondern häufig auch gleichartige, und dass ferner merkwürdigerweise die Zahl der Lösungen immer entweder 8 oder 4 oder 0 sei. Er forderte mich auf, den Grund und die Gesetze dieser Erscheinungen zu untersuchen und gab mir auch bei der Ausführung manchen Wink, welcher der Arbeit zu gute kam und wofür ich demselben dankbar bin.

Bekanntlich sollen bei dem Problem des Apollonius in seiner allgemeinsten Form 3 gegebene Kreise von einem vierten zugleich berührt werden. Um die Aufgabe zu lösen, d. h. Radius und Mittelpunktscoordinatrn dieses 4ten Kreises zu finden, nehme man den Mittelpunkt des ersten der gegebenen Kreise zum Anfangspunkte der Coordinaten; die Gleichungen der gegebenen Kreise werden dann sein:

$$x^2 + y^2 = r_1{}^2\,, \tag{1}$$

$$(x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 = r_2{}^2\,, \tag{2}$$

$$(x - \alpha_3)^2 + (y - \beta_3)^2 = r_3{}^2\,, \tag{3}$$

und die des gesuchten:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2. \tag{4}$$

Der letzte Kreis soll nun vorerst die drei ersten entweder alle *ausschliessend* berühren, d. h. so, dass die Fläche des berührenden Kreises ausserhalb der Fläche der berührten liegt, oder alle *einschliessend*, d. h. so, dass die Fläche des berührenden Kreises in die Fläche der berührten hineinfällt oder umgekehrt. Damit die eine oder die andere Art der Berührung stattfinde, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein, wobei da, wo doppelte Zeichen stehen, hier und im Folgenden das obere für die ausschliessende, das untere für die einschliessende Berührung gilt:

$$(5) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = (r \pm r_1)^2 \,,$$

$$(6) \qquad (\alpha - \alpha_2)^2 + (\beta - \beta_2)^2 = (r \pm r_2)^2 \,,$$

$$(7) \qquad (\alpha - \alpha_3)^2 + (\beta - \beta_3)^2 = (r \pm r_3)^2 \,.$$

Um hieraus α, β und r zu bestimmen, ziehe man die Gleichungen (6) und (7) nach einander von (5) ab und erhält so:

$$2\,\alpha\alpha_2 + 2\,\beta\beta_2 \mp 2\,(r_1 - r_2)\,r = \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 + (r_1 + r_2)\,(r_1 - r_2)$$
$$2\,\alpha\alpha_3 + 2\,\beta\beta_3 \mp 2\,(r_1 - r_3)\,r = \alpha_3{}^2 + \beta_3{}^2 + (r_1 + r_3)\,(r_1 - r_3),$$

oder

$$(7^a) \quad \begin{cases} 2\,\alpha\alpha_2 + 2\,\beta\beta_2 \mp 2\,(r_1 - r_2)\,(r \mp r_1) = \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 - (r_1 - r_2)^2 \\ 2\,\alpha\alpha_3 + 2\,\beta\beta_3 \mp 2\,(r_1 - r_3)\,(r \mp r_1) = \alpha_3{}^2 + \beta_3{}^2 - (r_1 - r_3)^2 . \end{cases}$$

Wenn man nun zur Abkürzung

$$(8) \qquad \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 - (r_1 - r_2)^2 = p \,,$$

$$(9) \qquad \alpha_3{}^2 + \beta_3{}^2 - (r_1 - r_3)^2 = q \,,$$

$$(10) \qquad r + r_1 = y \,,$$

$$(11) \qquad r - r_1 = z$$

setzt, so erhält man aus diesen 2, bezüglich 4 Gleichungen für die ausschliessende Berührung

$$2\,\alpha = \frac{q\beta_2 - p\beta_3 + 2\,y\,[\beta_2\,(r_1 - r_3) - \beta_3\,(r_1 - r_2)]}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3},$$

$$2\,\beta = \frac{p\alpha_3 - q\alpha_2 + 2\,y\,[\alpha_3\,(r_1 - r_2) - \alpha_2\,(r_1 - r_3)]}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3},$$

und für die einschliessende Berührung

$$2\,\alpha = \frac{q\beta_2 - p\beta_3 - 2\,z\,[\beta_2\,(r_1 - r_3) - \beta_3\,(r_1 - r_2)]}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3},$$

$$2\,\beta = \frac{p\alpha_3 - q\alpha_2 - 2\,z\,[\alpha_3\,(r_1 - r_2) - \alpha_2\,(r_1 - r_3)]}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3},$$

und wenn man wiederum zur Abkürzung setzt

$$(12) \quad p\alpha_3 - q\alpha_2 = A \,, \qquad (14) \quad \alpha_3\,(r_1 - r_2) - \alpha_2\,(r_1 - r_3) = A' \,,$$

$$(13) \quad q\beta_2 - p\beta_3 = B \,, \qquad (15) \quad \beta_2\,(r_1 - r_3) - \beta_3\,(r_1 - r_2) = B' \,,$$

$$(16) \qquad \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3 = D \,,$$

für die ausschliessende Berührung

$$(17) \qquad 2\,\alpha = \frac{B + 2\,B'z}{D}, \qquad 2\,\beta = \frac{A + 2\,A'y}{D},$$

und für die einschliessende Berührung

$$(18) \qquad 2\,\alpha = \frac{B - 2\,B'y}{D}, \qquad 2\,\beta = \frac{A - 2\,A'z}{D}.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichung (5) giebt für die ausschliessende Berührung

$$(B + 2\,B'y)^2 + (A + 2\,A'y)^2 = 4\,D^2y^2\,,$$

oder

$$(19)\quad 4\,y^2\,(A'^2 + B'^2 - D^2) + 4\,y\,(AA' + BB') + A^2 + B^2 = 0\,,$$

und für die einschliessende Berührung

$$(20)\quad 4\,z^2\,(A'^2 + B'^2 - D^2) - 4\,z\,(AA' + BB') + A^2 + B^2 = 0\,.$$

Durch diese beiden Gleichungen ist die Aufgabe gelöst, indem y und z, d. h. $r + r_1$ und $r - r_1$, also auch r durch lauter bekannte Grössen ausgedrückt sind und man mit Hülfe der Werthe von y und z auch die betreffenden α und β aus (17) und (18) finden kann. Dabei wohl zu bemerken, dass, wenn für r ein reeller Werth gefunden ist, auch α und β reell sein müssen, wie ein Blick auf die Gleichungen (17) und (18) lehrt. Nun haben aber die Gleichungen (19) und (20) dieselbe Discriminante, d. h. sie haben zu gleicher Zeit entweder reelle oder complexe Wurzeln, und überdies sind die Wurzeln der Gleichung (20) entgegengesetzt gleich denen der Gleichung (19); ergiebt sich also aus (19) für $r + r_1$ ein Werth m, d. h. für r ein Werth $m - r_1$, so ist der aus (20) gefundene Werth von $r - r_1$ gleich $-m$, woraus $r = -(m - r_1)$ folgt, so dass auch die Werthe von r, die von diesen beiden Gleichungen geliefert werden, entgegengesetzt gleich sind. Giebt also die Gleichung (19) unter der Voraussetzung reeller Wurzeln 2 positive Werthe für r, so giebt Gleichung (20) 2 negative von derselben absoluten Grösse; giebt die erste ein positives und ein negatives r, so giebt die zweite ein negatives und ein positives r von derselben Grösse, und liefert endlich die erste Gleichung 2 negative r, so liefert die zweite 2 positive r. Da aber r seiner Natur nach immer positiv sein muss (eine Ausnahme, die sich durch das Lagenverhältniss rechtfertigt, werden wir weiter unten kennen lernen), so folgt, dass unter der Voraussetzung, die Wurzeln obiger Gleichungen seien reell, entweder 2 ausschliessende Berührungen möglich sind, oder eine ausschliessende und eine einschliessende oder 2 einschliessende. Manche Schriftsteller scheinen angenommen zu haben, es könne nur der mittlere Fall stattfinden, d. h. einer ausschliessenden Berührung sei immer eine einschliessende conjugirt; dass dies nicht so ist, kann man schon an dem einen Beispiel sehen, wenn zwei der gegebenen Kreise innerhalb des dritten liegen, ohne sich selbst zu schneiden, denn hier sind 2 Kreise möglich, welche die 3 gegebenen zugleich einschliessend in dem hier gebrauchten Sinne berühren. Genau die nämlichen Schlussfolgerungen ergeben sich, wenn man die Aufgabe von vornherein so stellt, dass der gesuchte Kreis den ersten gegebenen einschliessend und die beiden andern ausschliessend oder den ersten ausschliessend und die beiden andern einschliessend berühre; man hat dann nur in den Gleichungen (5), (6), (7) r_1 negativ und r_2, r_3 positiv, oder r_1 positiv und r_2, r_3 negativ zu setzen und die Rechnung in derselben Weise wie oben durchzuführen. Setzt man r_2 negativ und r_1, r_3 positiv oder umgekehrt, so erhält man das dritte Paar conjugirter Kreise, und wenn man r_3 negativ und r_1, r_2 positiv macht oder umgekehrt, das vierte Paar. Jedesmal ergeben sich 2 Gleichungen, ähnlich den (10) und (20), von derselben Determinante und entgegengesetzt gleichen Wurzeln, und jedesmal können die Kreise eines Paares nicht blos ungleichartig, sondern sie können auch beide gleichartig die gegebenen Kreise berühren.

Um die Bedingungen zu finden, unter denen die Kreise eines Paares mit den gegebenen gleichartige oder ungleichartige Berührungen eingehen, beachte man, dass in der Gleichung (19)

$$4\,y^2\,(A'^2 + B'^2 - D^2) + 4\,y\,(AA' + BB') + A^2 + B^2 = 0$$

die Grösse $A^2 + B^2$ nie negativ werden kann, dass daher nach der Zeichenregel des Cartesius die Gleichung eine positive und eine negative Wurzel hat, wenn $A'^2 + B'^2 - D^2$ negativ, 2 positive oder 2 negative, wenn $A'^2 + B'^2 - D^2$ positiv ist, natürlich vorausgesetzt, dass die Gleichung überhaupt reelle Wurzeln hat; im 1ten Falle berühren die conjugirten Berührungskreise die gegebenen Kreise ungleichartig, im 2ten Falle in gleicher Art. Es kommt jetzt nur darauf an, den Ausdruck $A'^2 + B'^2 - D^2$ so umzuformen, dass er einer geometrischen Deutung fähig ist. Es ist aber, wenn wir aus (16) und (15) die Werthe von A' und B' substituiren

$$\begin{aligned}
+B'^2 &= (\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3)^2 + (\alpha_3^2+\beta_3^2)(r_1-r_2)^2 - 2(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_2)(r_1-r_3) \\
&= (\alpha_3^2+\beta_3^2)(r_1-r_2)^2 - \frac{(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)^2}{\alpha_2^2+\beta_2^3}(r_1-r_2)^2 + \\
&+ \frac{(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)^2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}(r_1-r_2)^2 - 2(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_2)(r_1-r_3) + (\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3)^2 \\
&= \frac{(\alpha_2^2+\beta_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2)-(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)^2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}(r_1-r_2)^2 + \\
&+ \left[\frac{\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}(r_1-r_2) - \sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}\cdot(r_1-r_3)\right]^2,
\end{aligned}$$

oder, wenn man die Grösse in der eckigen Klammer mit F bezeichnet,

$$A'^2 + B'^2 = \frac{D^2\,(r_1-r_2)^2}{\alpha_2^2+\beta_2^2} + F^2.$$

Daraus folgt:

$$(21) \qquad A'^2 + B'^2 - D^2 = F^2 - D^2 \cdot \frac{p}{\alpha_2^2+\beta_2^2}.$$

Nun sind die Gleichungen der 2 äusseren gemeinschaftlichen Tangenten an den ersten und zweiten Kreis in der Normalform

$$(22)\quad x\left[\frac{\alpha_2(r_1-r_2)\mp\beta_2\sqrt{p}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\right]+y\left[\frac{\beta_2(r_1-r_2)\pm\alpha_2\sqrt{p}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\right]-r_1=0.$$

Durch Substitution der Mittelpunktscoordinaten α_3 und β_3 des dritten gegebenen Kreises gehen die linken Seiten dieser Gleichungen in die negativ genommenen Längen P_3 und P_3' der Senkrechten über, welche man vom Mittelpunkte des dritten Kreises auf die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten der 2 ersten gefällt hat, vorausgesetzt, dass dieser Mittelpunkt auf derselben Seite der äusseren Tangenten liegt, wie der Anfangspunkt der Coordinaten. Addirt man dann noch zu jeder dieser Senkrechten den Radius r_3, so hat man

$$-P_3+r_3=\frac{(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_2)-(\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3)-(\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)\sqrt{p}}{\alpha_2^2+\beta_2^2},$$

$$-P_3'+r_3=\frac{(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_2)-(\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3)+(\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)\sqrt{p}}{\alpha_2^2+\beta_2^2},$$

oder mit unserer obigen Bezeichnung

$$(23)\quad\begin{cases}-P_3+r_3=\dfrac{F\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}-D\sqrt{p}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\\[2ex]-P_3'+r_3=\dfrac{F\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}+D\sqrt{p}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}.\end{cases}$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen erhält man endlich

$$(\alpha_2^2+\beta_2^2)(P_3-r_3)(P'-r_3)=F^2-D^2\cdot\frac{p}{\alpha_2^2+\beta_2^2},$$

so dass folgt:

$$(24)\quad A'^2+B'^2-D^2=(P_3-r_3)(P_3'-r_3)(\alpha_2^2+\beta_2^2).$$

Ganz ebenso ist natürlich auch

$$A'^2+B'^2-D^2=(P_2-r_2)(P_2'-r_2)(\alpha_3^2+\beta_3^2)$$

und

$$A'^2+B'^2-D^2=(P_1-r_1)(P_1'-r_1)[(\alpha_2-\alpha_3)^2+(\beta_2-\beta_3)^2],$$

wo P_2, P_2', P_1, P_1' die Senkrechten bedeuten, welche man vom Mittelpunkte des zweiten oder ersten Kreises auf die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten des ersten und dritten oder des zweiten und dritten gefällt hat. Bezeichnet man die Mittelpunktsentfernungen bezüglich mit c_{12}, c_{13}, c_{23}, so ergiebt sich die merkwürdige Beziehung

$$(25)\quad (P_1-r_1)(P_1'-r_1)c_{23}^2=(P_2-r_2)(P_2'-r_2)c_{13}^2=(P_3-r_3)(P_3'-r_3)c_{12}^2.$$

Die P haben wir seither immer positiv angenommen, aber dabei vorausgesetzt, dass der Mittelpunkt des Kreises, von dem aus sie gezogen sind, auf derselben Seite der betreffenden äusseren Tangenten liege wie der Anfangspunkt der Coordinaten; liegt er nun aber auf der entgegengesetzten Seite wie dieser, so muss man sie negativ nehmen. Die Gleichung (24) lehrt uns jetzt, wann $A'^2 + B'^2 - D^2$ positiv und wann es negativ ist. Positiv ist es

1) wenn P_3 und P_3' zugleich positiv und zugleich $>$ oder $< r_3$ sind,
2) wenn ein P negativ und das andere positiv, aber $< r_3$ ist,
3) wenn beide P negativ sind.

Findet einer dieser 3 Fälle statt, so muss nach Gleichung (25) einer dieser Fälle auch bei den P_2 und P_1 eintreten.

Negativ ist $A'^2 + B'^2 - D^2$ dann, wenn

1) beide P positiv sind, aber das eine $>$, das andere $< r_3$ ist,
2) das eine P negativ und das andere positiv, aber $> r_3$ ist.

Einer dieser Fälle muss dann gleichzeitig auch bei den P_2 und P_1 stattfinden.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist es leicht, sich ein Bild von der Lage zu machen, welche die gegebenen Kreise haben müssen, um von dem ersten Paar conjugirter Kreise gleichartig berührt zu werden. Nehmen wir vorerst an, es sei möglich, an 2 der gegebenen Kreise äussere gemeinschaftliche Tangenten zu legen; man denke sich dann den Mittelpunkt eines von ihnen als Anfangspunkt der Coordinaten. Liegt nun der Mittelpunkt des dritten Kreises in dem Winkelraum zwischen den äusseren Tangenten und liegt der Kreis selbst entweder ganz in diesem Winkelraume oder schneidet er beide Tangenten zugleich, so hat man den ersten Fall, wo $A'^2 + B'^2 - D^2$ positiv ist. Der zweite Fall findet statt, wenn der Mittelpunkt des dritten Kreises sowohl ausserhalb des Winkelraumes der äusseren Tangenten, als auch ausserhalb des Winkelraumes liegt, welcher von den Verlängerungen derselben über ihren Durchschnittspunkt hinaus gebildet wird, der Kreis selbst aber diejenige Tangente oder ihre Verlängerung schneidet, welche von seinem Mittelpunkte nach derselben Seite hin liegt, wie von den Mittelpunkten der 2 ersten Kreise. Im dritten Falle liegt der Mittelpunkt des dritten Kreises in dem Winkelraume, welcher von den Verlängerungen der Tangenten gebildet wird; der Radius desselben ist beliebig, der dritte Kreis kann also entweder ganz in diesem Winkelraume liegen oder eine der Tangenten oder beide schneiden. In allen übrigen Lagen hat man ungleichartige Berührungen.

Wir wollen jetzt einmal annehmen, $A'^2 + B'^2 - D^2$ sei positiv, dann hat die Gleichung (19) 2 negative Wurzeln, wenn $AA' + BB'$ positiv, 2 positive, wenn es negativ ist. Im ersten Falle hat man 2 einschliessende Berührungen, im andern 2 ausschliessende. Um diese Bedingung geometrisch zu interpretiren, müssen wir den Ausdruck $AA' + BB'$ umformen. Durch Substitution der Werthe von A, A', B, B' aus den Gleichungen (12) bis (15) erhält man nach Ausführung der angezeigten Operationen:

$$AA'+BB'=p(\alpha_3^2+\beta_3^2)(r_1-r_2)-(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)[p(r_1-r_3)+q(r_1-r_2)] \\ +q(\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3),$$

oder, anders geordnet,

$$AA'+BB'=p[(\alpha_3^2+\beta_3^2)(r_1-r_2)-(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_3)] \\ +q[(\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3)-(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_2)].$$

Setzt man nun, ähnlich wie oben,

$$(26)\quad \begin{cases}(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_2)-(\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3)=F\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2},\\ (\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_3)-(\alpha_3^2+\beta_3^2)(r_1-r_2)=F'\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2},\end{cases}$$

so erhält man

$$AA'+BB'=-pF'\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}-qF\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}.$$

Aus den Gleichungen (23) ergiebt sich aber durch Addition und Subtraction

$$\frac{-2F}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}=P_3+P_3'-2r_3,\qquad \frac{4pD^2}{(\alpha_2^2+\beta_2^2)^2}=(P_3-P_3')^2.$$

Ebenso ist

$$\frac{-2F'}{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}}=P_2+P_2'-2r_2,\qquad \frac{4qD^2}{(\alpha_3^2+\beta_3^2)^2}=(P_2-P_2')^2.$$

Damit wird aus obiger Gleichung

$$(27)\quad AA'+BB'=\frac{(\alpha_2^2+\beta_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2)}{8D^2} \\ [(P_3-P_3')^2(P_2+P_2'-2r_2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)+(P_2-P_2')^2(P_3+P_3'-2r_3)(\alpha_3^2+\beta_3^2)]$$

Da der Factor auf der linken Seite vor der Klammer positiv ist, so hat man nur nöthig, das Zeichen des Ausdrucks in der Klammer zu berücksichtigen. Im Allgemeinen ist es nothwendig, den Werth dieses Ausdrucks auszurechnen. Doch giebt es einige Fälle, in denen man vermittelst desselben sofort an der Figur erkennen kann, welche Art von Berührungen statt hat. Nimmt man nämlich für die P in der Klammer solche Werthe an, welche den Ausdruck $A'^2+B'^2-D^2$ positiv machen, so wie sie oben angegeben worden sind, so sind entweder

1) P_3 und P_3' zugleich positiv und zugleich $> r_3$, dann muss auch entweder
   a) P_2 und P_2' zugleich positiv und zugleich $> r_2$ sein und dann ist $AA'+BB'$ positiv, oder
   b) P_2 und P_2' sind zugleich positiv und zugleich $< r_2$, oder ein P_2 ist negativ und das andere positiv aber $< r_2$, oder beide P_2 sind negativ, dann wird der erste Posten in der Klammer negativ und der zweite positiv, und es kommt dann

auf die absoluten Werthe beider Posten an bei Entscheidung der Frage, ob $AA' + BB'$ positiv oder negativ sei;

2) oder P_3 und P_3' sind zugleich positiv und zugleich $< r_3$, oder ein P_3 ist negativ und das andere positiv aber $< r_3$, oder beide P_3 sind negativ, dann ist der zweite Posten immer negativ; ist nun

a) P_2 und P_2' zugleich positiv und zugleich $> r_2$, so kommt es auf die absoluten Werthe beider Posten an; sind aber

b) P_2 und P_2' zugleich positiv und zugleich $< r_2$, oder ist ein P_2 negativ und das andere positiv, aber $< r_2$, oder sind beide P_2 negativ, so ist auch der zweite Posten negativ und deshalb auch $AA' + BB'$ negativ.

In ähnlicher Weise, wie wir im Vorstehenden die Rechnung durchgeführt haben für das erste Paar conjugirter Berührungskreise, lässt sie sich führen, wenn man finden will, ob die conjugirten Kreise des zweiten Paares die gegebenen Kreise gleichartig berühren oder nicht. Man hat dann nur überall statt r_1 zu setzen $-r_1$, wodurch die Gleichungen (22) übergehen in die Gleichungen der zwei inneren gemeinschaftlichen Tangenten, und man findet endlich, dass die Berührungen gleichartig oder ungleichartig sind, je nachdem der Ausdruck

$$(P_3 + r_3)(P_3' + r_3)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$$

positiv oder negativ ist, wo aber hier P_3 und P_3' die Senkrechten von dem Mittelpunkte des dritten Kreises auf die gemeinschaftlichen inneren Tangenten des ersten und zweiten Kreises bedeuten. Das Nämliche bedeuten die P für das dritte Paar conjugirter Kreise in dem für diese geltenden Ausdruck $(P_3 - r_3)(P_3' - r_3)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$, während in dem Ausdrucke $(P_3 + r_3)(P_3' + r_3)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$, welcher für das vierte Paar gefunden wird, die P wieder die Senkrechten auf die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten sind. Dass man in diesen 3 Fällen Beziehungen finden kann, ähnlich der oben (25) aufgestellten, ist klar, ebenso, dass, wenn gleichartige Berührungen sich ergeben, man wieder, gerade wie oben, mit Hülfe des Ausdrucks $AA' + BB'$ bestimmen kann, ob dieselben beide einschliessende oder beide ausschliessende sind.

Bemerkenswerth ist es, dass die äusseren oder inneren gemeinschaftlichen Tangenten auch imaginär werden können, und zwar geschieht das erste, wenn $\alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_1 - r_2)^2$ negativ ist, d. h. wenn der erste und zweite Kreis ineinander liegen, das zweite, wenn $\alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_1 + r_2)^2$ negativ ist, d. h. wenn sie sich schneiden oder ineinander liegen. In diesen Fällen sind auch die Senkrechten vom Mittelpunkte des dritten Kreises imaginär, aber wie aus den Gleichungen (23) hervorgeht, sind dann $P_3 \pm r_3$ und $P_3' \pm r_3$ conjugirte complexe Grössen, das Product derselben und in Folge davon auch $A'^2 + B'^2 - D^2$ ist also immer positiv, oder in Worten ausgedrückt: Wenn der erste und zweite Kreis ineinander liegen, so geht, falls die Berührungskreise überhaupt möglich sind, was später untersucht werden soll, sowohl das erste als das vierte Paar derselben jedes zwei gleichartige Berührungen mit den gegebenen Kreisen ein, und wenn der erste und zweite Kreis einander schneiden oder ineinander liegen, so gilt das Gleiche für das zweite und dritte Paar. Es ist natürlich beliebig, welche der drei gegebenen Kreise man als ersten und zweiten wählen will.

Eine Ausnahme erleiden die von uns aufgestellten Regeln dann, wenn alle drei gegebenen Kreise sich gegenseitig schneiden und dabei einer der Durchschnittspunkte der zwei ersten innerhalb des dritten liegt. In diesem Falle zeigt die geometrische Betrachtung an der Figur, dass ungleichartige Berührungen stattfinden, wenn das nach unseren Regeln gefundene $A'^2 + B'^2 - D^2$ positiv, gleichartige, wenn es negativ ist; beim zweiten und dritten Paare, wo man wegen der imaginären inneren Tangenten lauter gleichartige Berührungen erwartet hätte, sind dann die Berührungen immer ungleichartig, beim ersten und vierten Paar entweder gleichartig oder ungleichartig, je nachdem das betreffende nach unseren Regeln bestimmte $A'^2 + B'^2 - D^2$ negativ oder positiv ist. Eine Erklärung dieses Paradoxons ergiebt sich in folgender Weise. Offenbar ist es ein Grenzfall, welcher den Uebergang von der Regelmässigkeit zu den Ausnahmen bezeichnet, wenn die drei Kreise sich in einem und demselben Punkte schneiden. In diesem Grenzfall ist aber für alle vier Paare von Berührungskreisen der eine Kreis eines Paares zu einem Punkte zusammengeschrumpft, d. h. sein Radius ist Null, was sich geometrisch leicht einsehen lässt, analytisch aber folgendermassen bewiesen wird. Sieht man in den Gleichungen (1), (2) und (3) die x und y als demselben Punkte gehörig an, so findet man durch Elimination derselben die Bedingung, welche stattfinden muss, damit der Grenzfall eintrete. Zieht man deshalb von (2) und (3) nach einander (1) ab, so erhält man

$$2\,\alpha_2 x + 2\,\beta_2 y = r_1^2 - r_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2,$$
$$2\,\alpha_3 x + 2\,\beta_3 y = r_1^2 - r_3^2 + \alpha_3^2 + \beta_3^2;$$

daraus findet man, wenn man

$$r_1^2 - r_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 = m\,,$$
$$r_1^2 - r_3^2 + \alpha_3^2 + \beta_3^2 = n$$

setzt,

$$2\,x = \frac{n\beta_2 - m\beta_3}{D}, \qquad 2\,y = \frac{m\alpha_3 - n\alpha_2}{D},$$

und wenn man diese Werthe in (1) substituirt,

$$(n\beta_2 - m\beta_3)^2 + (m\alpha_3 - n\alpha_2)^2 = 4\, D^2 r_1{}^2,$$

oder

$$m^2\,(\alpha_3{}^2 + \beta_3{}^2) + n^2\,(\alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2) - 2\,mn\,(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3) = 4\, D^2 r_1{}^2.$$

Nun ist aber nach Gleichung (8)

$$m = p + (r_1 - r_2)^2 + r_1{}^2 - r_2{}^2,$$

d. h.

$$m = p + 2\,r_1\,(r_1 - r_2)$$

und ebenso

$$n = q + 2\,r_1\,(r_1 - r_3)\,.$$

Die Substitution dieser Werthe in obige Gleichung giebt

$$[4r_1{}^2(r_1-r_2)^2+4r_1(r_1-r_2)\,p+p^2]\,(\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2)+$$
$$+[4r_1{}^2(r_1-r_3)^2+4r_1(r_1-r_3)\,q+q^2]\,(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)-$$
$$-2\{4r_1{}^2(r_1-r_2)(r_1-r_3)+2r_1[p(r_1-r_3)+q(r_1-r_2)]+pq\}(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)=4\,D^2r_1{}^2,$$

oder, wenn man immer je die ersten, zweiten und dritten Glieder eines jeden Postens addirt

$$4r_1{}^2[(r_1-r_2)^2(\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2)+(r_1-r_3)^2(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)-2(r_1-r_2)(r_1-r_3)\,(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)]+$$
$$4r_1\{p(r_1-r_2)(\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2)+q(r_1-r_3)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)-[p(r_1-r_3)+q(r_1-r_2)](\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta)\}+$$
$$[p^2(\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2)+q^2(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)-2pq(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)]=4D^2r_1{}^2.$$

Die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke haben wir aber alle schon oben kennen gelernt; mit unserer abgekürzten Bezeichnungsweise wird daher die letzte Gleichung

$$4\,r_1{}^2\,(A'^2 + B'^2) + 4\,r_1\,(AA' + BB') + A^2 + B^2 = 4\,D^2 r_1{}^2,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(28)\quad 4\,r_1{}^2\,(A'^2 + B'^2 - D^2) + 4\,r_1\,(AA' + BB') + A^2 + B^2 = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit unserer Gleichung (19)

$$4\,y^2\,(A'^2 + B'^2 - D^2) + 4\,y\,(AA' + BB') + A^2 + B^2 = 0\,,$$

so ergiebt sich, dass derselben für den Grenzfall durch $y = r_1$ genügt wird; da nun $y = r + r_1$, so ist $r = 0$. Die Mittelpunktscoordinaten, welche hier die Coordinaten des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes sind, ergeben sich aus den Gleichungen (17), wenn man in denselben $y = r_1$ setzt, zu

$$2\,\alpha = \frac{B + 2\,B'r_1}{D}, \qquad 2\,\beta = \frac{A + 2\,A'r_1}{D}.$$

Dividirt man die Gleichung (19) durch $y - r_1$, so bleibt der Rest

$$4\,r_1{}^2\,(A'^2 + B'^2 - D^2) + 4\,r_1\,(AA' + BB') + A^2 + B^2,$$

welcher aber nach (28) gleich Null ist, und der Quotient, gleich Null gesetzt, ergiebt die Gleichung

$$y(A'^2 + B'^2 - D^2) + AA' + BB' + r_1(A'^2 + B'^2 - D^2) = 0,$$

aus welcher man den Radius des dem eben gefundenen conjugirten Kreises und dann mit Hülfe der Gleichungen (17) die Coordinaten seines Mittelpunktes finden kann. Aehnlich verfährt man bei den drei übrigen Paaren conjugirter Kreise.

Denken wir uns nun den dritten Kreis in einer solchen Lage, dass seine Durchschnittspunkte mit der Chordalen der beiden ersten sich schneidenden Kreise beide zwischen den Endpunkten dieser Chordale liegen, und schieben wir ihn stetig gegen den einen Durchschnittspunkt der zwei ersten Kreise vor, so nimmt der Radius des einen der beiden conjugirten Berührungskreise immer mehr ab und wird zu Null, sobald der dritte Kreis den Durchschnittspunkt der beiden ersten erreicht hat. Führt man mit der stetigen Verschiebung des dritten Kreises fort, so dass er jetzt den Durchschnittspunkt der beiden ersten einschliesst, so muss nach einem analytischen Grundsatze der Radius des einen Berührungskreises, der vorher einen positiven und dann den Werth Null hatte, nunmehr einen negativen Werth annehmen, ohne dass sich deswegen die Grösse $A'^2 + B'^2 - D^2$ änderte, d. h. mit anderen Worten: Hier haben wir den einzigen Fall, wo der Radius des einen der beiden conjugirten Kreise aus der Gleichung (19), der andere aus der Gleichung (20) gewonnen wird, selbst wenn der letztere negativ gefunden werden sollte, und umgekehrt. Ist also z. B. $A'^2 + B'^2 - D^2$ positiv, so müssten nach der allgemeinen Regel beide Radien entweder aus der Gleichung (19) oder aus der Gleichung (20) bestimmt werden, in unserem Ausnahmsfalle aber wird der eine aus (19), der andere aus (20) bestimmt. Dies hat aber geometrisch die Wirkung, dass wir jetzt zwei ungleichartige Berührungen haben, wo zwei gleichartige erwartet worden wären. In der That hat auch nach dem Uebergange zu dem Ausnahmefalle der Radius des einen Berührungskreises zu den Peripherien der drei gegebenen Kreise die entgegengesetzte Lage wie vorher. Es kann auch vorkommen, dass der dritte Kreis die beiden Durchschnittspunkte der 2 ersten einschliesst; da hier der Ausnahmefall in derselben Weise umgekehrt wird, wie er selbst durch Umkehrung aus der Regelmässigkeit entstanden ist, so tritt die Regelmässigkeit wieder ein. Haben endlich die 3 gegebenen Kreise dieselbe Potenzlinie, so reduciren sich die 4 Paare von Berührungskreisen auf 2 Punkte, nämlich die gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der 3 Kreise; dieselben sind reell oder imaginär, je nachdem die gemeinschaftliche Potenzlinie die 3 Kreise schneidet oder nicht. Wir werden jedoch diesen Fall noch einmal weiter unten in einem andern Zusammenhange betrachten.

Es bleibt uns jetzt noch übrig zu untersuchen, unter welchen Bedingungen jedes der vier Paare von Berührungskreisen überhaupt möglich sei. Beschränken wir die Untersuchung vorerst auf das erste Paar. Wir haben dann die gemeinschaftliche Discriminante der Gleichungen (19) und (20) zu suchen; ist dieselbe positiv, dann existirt dieses Kreispaar, ist sie negativ, nicht. Wird dieselbe mit Δ_1 bezeichnet, so ist

$$\Delta_1 = (AA' + BB')^2 - (A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2 - D^2)$$

oder nach der Entwickelung

$$\Delta_1 = D^2 (A^2 + B^2) - (AB' + A'B)^2.$$

Durch Einsetzung der Werthe von A, A', B, B' aus (12) bis (15) und Benutzung von (16) erhält man nach gehöriger Reduction

$$A^2 + B^2 = p^2 (\alpha_3^2 + \beta_3^2) + q^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2) - 2pq(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_2),$$

und

$$AB' - A'B = [p(r_1 - r_3) - q(r_1 - r_2)] D.$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= D^2 [p^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2) + q^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2) - 2pq(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3) \\ &\qquad - p^2(r_1 - r_3)^2 - q^2(r_1 - r_2)^2 + 2pq(r_1 - r_2) r_1 - r_3)], \\ &= D^2 \left\{p^2 q + pq^2 - 2pq[\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 - (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_1 - r_2)]\right\}, \\ &= D^2 pq\, [p + q - 2\alpha_2\alpha_3 - 2\beta_2\beta_3 + 2(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)].\end{aligned}$$

Wenn man die Werthe von p und q aus (8) und (9) in die eckige Klammer einsetzt, so bekommt man nach der Reduction

$$\Delta_1 = D^2 pq\, [(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\beta_2 - \beta_3) - (r_2 - r_3)^2],$$

oder endlich

$$(29)\quad \Delta_1 = D^2 [\alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_1 - r_2)^2]\, [\alpha_3^2 + \beta_3^2 - (r_1 - r_3)^2] \\ [(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\beta_2 - \beta_3)^2 - (r_2 - r_3)^2].$$

Bezeichnet man die Entfernungen der Mittelpunkte der gegebenen Kreise wie oben mit c_{12}, c_{13}, c_{23}, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$\Delta_1 = D^2 [c_{12}^2 - (r_1 - r_2)^2]\, [c_{13}^2 - (r_1 - r_3)^2]\, [c_{23}^2 - (r_2 - r_3)^2]$$

oder

$$(30)\quad \Delta_1 = D^2 [c_{12} + (r_1 - r_2)]\, [c_{13} + (r_1 - r_3)]\, [c_{23} + (r_2 - r_3)] \\ [c_{12} - (r_1 - r_2)]\, [c_{13} - (r_1 - r_3)]\, [c_{23} - (r_2 - r_3)].$$

Der erste Factor D^2 auf der rechten Seite kann nie negativ, wohl aber Null werden, ein Fall, den wir weiter unten betrachten werden; er hat also keinen Einfluss auf das Zeichen. Nimmt man an, dass $r_1 > r_2 > r_3$, so sind die folgenden 3 Factoren auf der rechten Seite immer positiv und können nie Null werden; sie sind deshalb unter dieser Voraussetzung unwesentlich zur Bestimmung des Zeichens von Δ_1 und man kann sie kurzweg mit ϱ_1^2 bezeichnen. Demnach ist jetzt

$$(31)\quad \Delta_1 = D^2\varrho_1^2\,[c_{12}-(r_1-r_2)]\,[c_{13}-(r_1-r_3)]\,[c_{23}-(r_2-r_3)].$$

Das Zeichen dieser Grösse giebt mir Aufschluss, ob das erste Paar conjugirter Kreise möglich ist; will ich eine ähnliche Probegrösse für das zweite Paar haben, so muss ich in (30) r_1 negativ setzen, für das dritte Paar r_2, für das vierte r_3, so dass man hat:

$$(32)\quad \Delta_2 = D^2\varrho_2^2\,[c_{12}-(r_1+r_2)]\,[c_{13}-(r_1+r_3)]\,[c_{23}-(r_2-r_3)].$$

$$(33)\quad \Delta_3 = D^2\varrho_3^2\,[c_{12}-(r_1+r_2)]\,[c_{13}-(r_1-r_3)]\,[c_{23}-(r_2+r_3)].$$

$$(34)\quad \Delta_4 = D^2\varrho_4^2\,[c_{12}-(r_1-r_2)]\,[c_{13}-(r_1+r_3)]\,[c_{23}-(r_2+r_3)].$$

Die Grössen ϱ_2^2, ϱ_3^2, ϱ_4^2 in diesen 3 letzten Gleichungen sind der Grösse ϱ_1^2 in (31) analog.

Es lassen sich nun im Ganzen 125 Fälle unterscheiden, je nachdem eines der c grösser als die Summe der betreffenden Radien oder gleich derselben oder kleiner als die Summe, aber grösser als die Differenz oder gleich der Differenz oder kleiner als diese ist, d. h. je nachdem die beiden Kreise auseinander liegen oder sich ausschliessend berühren oder sich schneiden oder sich einschliessend berühren oder ineinander liegen. Von diesen Fällen sind 44 unmöglich, weil bei ihnen unter der gemachten Voraussetzung, dass $r_1 > r_2 > r_3$, die Mittelpunktsentfernungen der drei gegebenen Kreise kein reelles Dreieck bilden, indem nämlich dann nicht mehr, wie es bei einem reellen Mittelpunktsdreieck der Fall sein muss, $c_{12}+c_{13} > c_{23}$, $c_{12}+c_{23} > c_{13}$, $c_{13}+c_{23} > c_{12}$ ist; nimmt man also r_1, r_2, r_3 als reell an, so müssen in diesen 44 Fällen die Mittelpunktscoordinaten des zweiten oder dritten der gegebenen Kreise oder die Mittelpunktscoordinaten beider complexe Grössen sein, und ebenso eins oder mehrere der c. Nimmt man z. B. $c_{12} > r_1 + r_2$, $r_1 - r_3 < c_{13} < r_1 + r_3$, $c_{23} < r_2 - r_3$, so kann kein Mittelpunktsdreieck existiren; denn aus den beiden letzten Ungleichheiten folgt $c_{13} + c_{23} < r_1 + r_2$, was, mit der ersten verbunden, giebt $c_{13} + c_{23} < c_{12}$. Trotzdem ergiebt sich für diese 44 Fälle immer eine gewisse Zahl reeller Berührungskreise; so ist für das obige Beispiel Δ_1 und Δ_3 negativ, aber Δ_2 und Δ_4 positiv, so dass 4 reelle Lösungen existiren; die Berührungspunkte sind dann natürlich auch imaginär. Aber auch die 81 übrigen Fälle reduciren sich auf eine geringere Anzahl, weil mehrere derselben wesentlich identisch sind, indem sie sich nur durch die Grösse der Radien der dabei gegebenen Kreise unterscheiden. Lässt man ferner die Fälle ausfallen, in denen einer oder zwei der gegebenen Kreise mit dem dritten oder unter sich eine Berührung haben, so bleiben nur noch 12 Fälle übrig, die ich in folgender Tabelle zusammengestellt habe.

	Zeichen von Δ_1 Δ_2 Δ_3 Δ_4	Zahl der Lösungen
1) $c_{12}>r_1+r_2$, $c_{13}>r_1+r_3$, $c_{23}>r_2+r_3$	$+ + + +$	8
2) $c_{12}>r_1+r_2$, $c_{13}>r_1+r_3$, $r_2-r_3<c_{23}<r_2+r_3$	$+ + - -$	4
3) $c_{12}>r_1+r_2$, $c_{13}>r_1+r_3$, $c_{23}<r_2-r_3$	$- - - -$	0
4) $c_{12}>r_1+r_2$, $r_1-r_3<c_{13}<r_1+r_3$, $r_2-r_3<c_{23}<r_2+r_3$	$+ - - +$	4
5) $r_1-r_2<c_{12}<r_1+r_2$, $c_{13}>r_1+r_3$, $c_{23}<r_2-r_3$	$- + + -$	4
6) $r_1-r_2<c_{12}<r_1+r_2$, $r_1-r_3<c_{13}<r_1+r_3$, $r_2-r_3<c_{23}<r_2+r_3$	$+ + + +$	8
7) $r_1-r_2<c_{12}<r_1+r_2$, $r_1-r_3<c_{13}<r_1+r_3$, $c_{23}<r_2-r_3$	$- - + +$	4
8) $r_1-r_2<c_{12}<r_1+r_2$, $c_{13}<r_1-r_3$, $c_{23}<r_2-r_3$	$+ - - +$	4
9) $c_{12}<r_1-r_2$, $r_1-r_3<c_{13}<r_1+r_3$, $r_2-r_3<c_{23}<r_2+r_3$	$- + + -$	4
10) $c_{12}<r_1-r_2$, $c_{13}<r_1-r_3$, $c_{23}>r_2+r_3$	$+ + + +$	8
11) $c_{12}<r_1-r_2$, $c_{13}<r_1-r_3$, $r_2-r_3<c_{23}<r_2+r_3$	$+ + - -$	4
12) $c_{12}<r_1-r_2$, $c_{13}<r_1-r_3$, $c_{23}<r_2-r_3$	$- - - -$	0

Merkwürdig ist, dass die Zahl der Lösungen immer entweder 8 oder 4 oder 0 ist. Dies rührt daher, dass von den 4 Discriminanten (31) bis (34) je 2 abgesehen von D^2 einen Factor gemeinschaftlich haben, der in den 2 andern nicht vorkommt, so dass mit dem Verschwinden dieses Factors immer 2 Discriminanten Null werden und mit ihm zugleich das Zeichen ändern. Nun können, wie obige Tabelle lehrt, alle 4 Discriminanten zugleich negativ sein (Fall 3 und 12). Wechseln zwei von ihnen bei dem gemeinschaftlichen Uebergang durch Null zugleich ihr Zeichen und werden positiv, so muss auch, da jeder Discriminante 2 Auflösungen entsprechen, die Anzahl der letzteren um 4 zunehmen. Wenn fernerhin 2 Discriminanten, welche dasselbe Zeichen haben, dasselbe wechseln, so muss die Zahl der Auflösungen um 4 zu- oder abnehmen. Wechseln dagegen fernerhin 2 Discriminanten, welche ungleiche Zeichen haben, die Zeichen, so bleiben die beiden anderen, die dann auch ungleiche Zeichen haben, entweder unverändert oder wechseln auch ihre Zeichen; was nun aber auch geschehen mag, die Zahl der Lösungen muss dann unverändert bleiben. Die Fälle, wo die gegebenen Kreise Berührungen unter sich haben, bilden gewissermassen den Uebergang; denn jedesmal, wenn dies stattfindet, verschwindet ein gemeinschaftlicher Factor zweier Discriminanten. Weil dann für jede der beiden Null werdenden Discriminanten 2 Auflösungen in eine zusammenfallen, so hat man wenigstens 2 Lösungen. Die 2 übrigen Discriminanten können nun entweder beide positiv sein, wo 6 Lösungen, oder beide negativ, wo 2 Lösungen möglich sind, oder sie können einzeln oder zusammen verschwinden. Verschwindet eine und ist die andere positiv, so hat man 5 Lösungen, ist die andere negativ, 3 Lösungen, verschwinden beide, 4 Lösungen; wenn nur die eine verschwindet, so berührt einer der gegebenen Kreise die zwei andern, ohne dass diese eine Berührung haben, wenn aber beide verschwinden, so berühren sie sich alle drei. Aus dieser Darstellung ersieht man, dass, wenn unter den gegebenen Kreisen Berührungen vorkommen, als Zahl der Auflösungen nie 1 oder 7, wohl aber alle Zahlen von $2-6$ auftreten können. Jedoch kann es geschehen, dass einer der gefundenen Berührungskreise identisch ist mit einem der gegebenen Kreise, wodurch die Zahl der Auflösungen um eine vermindert wird.

Zum Schlusse verdient noch der Fall eine besondere Betrachtung, wo der allen 4 Discriminanten gemeinschaftliche Factor D^2 Null ist, wo also, geometrisch interpretirt, der Flächeninhalt des Mittelpunktsdreiecks Null ist oder, was dasselbe ist, die Mittelpunkte der gegebenen Kreise auf einer geraden Linie liegen; es ist dies derselbe Fall, in welchem auch die Gergonne'sche Construction illusorisch wird. Ist aber D gleich Null, so verschwinden alle 4 Discriminanten und man erhält also unter allen Umständen 4 reelle Werthe oder genauer 4 Paare gleicher reeller Werthe für r. Damit ist jedoch nicht gesagt, dass es auch immer 4, bezüglich 8 reelle Lösungen der Aufgabe geben müsse; denn die Mittelpunktscoordinaten α und β des Berührungskreises können hier nicht wie oben durch die lineären Gleichungen (17) und (18), sondern müssen durch die quadratischen Gleichungen (5), (6) und (7) direct bestimmt werden, wodurch sich allerdings unter Umständen auch complexe Werthe für α und β ergeben können. Um nun zu erkennen, wann dies stattfinde, setze man in den Gleichungen (13) und (15) $\beta_2 = \beta_3 \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$, was nichts anderes ist als $D = 0$; dann gehen dieselben über in

$$B = \frac{\beta_3}{\alpha_3}(q\alpha_2 - p\alpha_3)\,, \qquad B' = \frac{\beta_3}{\alpha_3}\,[\alpha_2\,(r_1 - r_3) - \alpha_3\,(r_1 - r_2)]\,,$$

oder, wenn man die Gleichungen (12) und (14) in Vergleich zieht, in

$$B = -\frac{\beta_3}{\alpha_3} \cdot A\,, \tag{35}$$

$$B' = -\frac{\beta_3}{\alpha_3} \cdot A'. \tag{36}$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (19) und macht darin auch

$D = 0$, so erhält man nach Weghebung des dann in allen Gliedern erscheinenden Factors $\frac{\alpha_3^2 + \beta_3^2}{\alpha_3^2}$

(37) $$4\,y^2 A'^2 + 4\,y A A' + A^2 = 0\,.$$

Hätte man in ähnlicher Weise die Gleichung (20) behandelt, so würde man gefunden haben

(38) $$4\,z^2 A'^2 - 4\,z A A' + A^2 = 0\,.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich sowohl für y als für z je ein Paar gleicher reeller Werthe, nämlich

$$y = -\frac{A}{2\,A'}, \text{ und } z = \frac{A}{2\,A'}\,.$$

Man muss dasjenige Paar wählen, welches für r zwei gleiche positive Werthe giebt. Daraus ergiebt sich, dass die conjugirten Berührungskreise nicht nur gleichen Radius haben, sondern auch die gegebenen Kreise gleichartig berühren. Wir haben jetzt noch die Mittelpunktscoordinaten dieser Kreise zu finden. Die zweite Gleichung (7^a) heisst mit den in (8), (9) und (10) angegebenen Bezeichnungen

$$2\,\alpha\alpha_3 + 2\,\beta\beta_3 = 2\,(r_1 - r_3)\,y + q\,,$$

und, wenn man den eben gefundenen Werth von y substituirt,

$$2\,\alpha\alpha_3 + 2\,\beta\beta_3 = \frac{q A' - (r_1 - r_3)\,A}{A'}\,.$$

Die Gleichungen (12) und (14) geben dann

$$\begin{aligned} 2\,\alpha\,\alpha_3 + 2\beta\,\beta_3 &= \frac{q\,\alpha_3\,(r_1 - r_2) - q\,\alpha_2\,(r_1 - r_3) - p\,\alpha_3 (r_1 - r_3) + q\alpha_2\,(r_1 - r_3)}{A'}, \\ &= \frac{q\,(r_1 - r_2) - p\,(r_1 - r_3)}{A'} \cdot \alpha_3\,, \\ &= \frac{C\alpha_3}{A'}, \end{aligned}$$

wenn man nämlich zur Abkürzung

(39) $$q\,(r_1 - r_2) - p\,(r_1 - r_3) = C$$

setzt. Man entwickele aus dieser Gleichung α und setze es in (5) ein; dann erhält man nach einigen Reductionen für β die Gleichung

(40) $$4\,\beta^2 A'^2 (\alpha_3^2 + \beta_3^2) - 4\,\beta A' C \alpha_3 \beta_3 + (C^2 - A^2)\,\alpha_3^2 = 0.$$

Dieselbe Gleichung würde man erhalten haben, wenn man in die Gleichung

$$2\,\alpha\alpha_3 + 2\,\beta\beta_3 = 2\,(r_1 - r_3)\,z + q$$

den Werth $z = \frac{A}{2\,A'}$ substituirt hätte. Nimmt man jetzt die Gerade, worauf die Mittelpunkte liegen, zur Abscissenaxe, d. h. macht man $\beta_2 = \beta_3 = 0$, so liefert diese Gleichung

$$\beta = \frac{\pm\sqrt{A^2 - C^2}}{2\,A'},$$

während α gegeben ist durch die Gleichung

$$\alpha = \frac{C}{2\,A'}\,.$$

Daraus geht hervor, dass die 2 Berührungskreise symmetrisch zur gemeinschaftlichen Centralen der gegebenen Kreise liegen. Um nun noch zu finden, wann es möglich ist, unter der Voraussetzung $D = 0$, die Berührungskreise zu construiren, bilden wir die Discriminante der Gleichung (40); dieselbe ist

$$\delta_1 = A'^2\left[C^2\cdot\frac{\beta_3^2}{\alpha_3^2} - \left(1 + \frac{\beta_3^2}{\alpha_3^2}\right)\left(C^2 - A^2\right)\right],$$

oder nach der Entwickelung

$$\delta_1 = \frac{A'^2}{\alpha_3^2}\left[A^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2) - C^2\alpha_3^2\right].$$

Durch Wiedereinführung der Werthe von A und C aus (12) und (39) wird

$$\delta_1' = \frac{A'^2}{\alpha_3^2}\Big\{p^2[\alpha_3^2(\alpha_3^2+\beta_3^2) - \alpha_3^2(r_1-r_3)^2] + q^2[\alpha_2^2(\alpha_3^2+\beta_3^2) - \alpha_3^2(r_1-r_2)^2]$$
$$-2pq[\alpha_2\alpha_3(\alpha_3^2+\beta_3^2) - \alpha_3^2(r_1-r_2)(r_1-r_3)]\Big\},$$

und wenn man in jedem Term der grossen Klammer α_3^2 als Factor ausscheidet und die Relation $D = 0$ beachtet,

$$\delta_1 = \frac{A'^2}{\alpha_3^2}\Big\{p^2\alpha_3^2[\alpha_3^2 + \beta_3^2 - (r_1 - r_3)^2] + q^2\alpha_3^2[\alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_1-r_2)^2]$$
$$-2pq\alpha_3^2[\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 - (r_1-r_2)(r_1-r_3)]\Big\},$$

oder

$$\delta_1 = A'^2\left\{p^2q + pq^2 - 2pq[\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 - (r_1-r_2)(r_1-r_3)]\right\}$$

und endlich ebenso wie oben bei Δ_1

$$\delta_1 = A'^2pq\left[(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\beta_2 - \beta_3)^2 - (r_2 - r_3)^2\right].$$

Nach den nämlichen Voraussetzungen und Folgerungen wie oben bei Δ_1 erhält man hieraus

$$(41)\qquad \delta_1 = A'^2\varrho_1^2[c_{12} - (r_1 - r_2)]\,[c_{13} - (r_1 - r_3)]\,[c_{23} - (r_2 - r_3)]\,.$$

In ähnlicher Weise wie oben findet man, dass auch das zweite, dritte und vierte Paar conjugirter Kreise aus gleichen, gleichartig berührenden und symmetrisch zur Centralen liegenden Kreisen besteht, und dass die zugehörigen Discriminanten δ_2, δ_3, δ_4 bis auf den Factor A'^2 identisch sind mit den oben erhaltenen Δ_2, Δ_3, Δ_4, gerade wie auch δ_1 bis auf den Factor A'^2 identisch ist mit Δ_1. Die Bedingungen der Möglichkeit in dem Specialfalle $D = 0$ sind also die nämlichen wie in dem allgemeinen Falle und es gelten auch hier die nämlichen Schlüsse wie dort.

Der Fall $D = 0$ schliesst auch noch den Fall in sich ein, wo die drei gegebenen Kreise dieselbe Potenzlinie haben. Die Gleichungen

$$2\,\alpha_2 x + 2\,\beta_2 y = r_1^2 - r_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 2\,r_1\,(r_1 - r_2) + p\,,$$
$$2\,\alpha_3 x + 2\,\beta_3 y = r_1^2 - r_3^2 + \alpha_3^2 + \beta_3^2 = 2\,r_1\,(r_1 - r_3) + q\,,$$

welche man erhält, indem man von Gleichung (1) nach einander die Gleichungen (2) und (3) abzieht und dann die Gleichungen (8) und (9) berücksichtigt, sind die Gleichungen der Potenzlinien des ersten und zweiten und des ersten und dritten Kreises. Sollen dieselben in eine Gerade zusammenfallen, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} \text{ oder } D = 0$$

und

$$\frac{2\,r_1\,(r_1 - r_2) + p}{\alpha_2} = \frac{2\,r_1\,(r_1 - r_3) + q}{\alpha_3}$$

oder

$$2\,r_1\,[\alpha_3\,(r_1 - r_2) - \alpha_2\,(r_1 - r_3)] = -\,[\alpha_3 p - \alpha_2 q],$$

d. h. nach (12) und (14)

$$2\,r_1\,A' = -\,A\,.$$

Die Gleichung (37) nimmt nach Einführung dieser Relation die Gestalt an

$$y^2 - 2\,r_1 y + r_1^2 = 0$$

und man erhält also für y zwei gleiche Werthe, deren jeder $= r_1$ ist; ebenso würde man für z aus Gleichung (38) zwei gleiche Werthe erhalten haben, deren jeder $= -\,r_1$ ist. Daraus folgt aber für r jedesmal der Werth Null, d. h. die zwei Berührungskreise des ersten Paares reduciren sich für diesen Fall auf zwei Punkte, deren Coordinaten gefunden werden, indem man obige Relation in (40) einsetzt. Nimmt man auch jetzt die gemeinschaftliche Centrale zur Abscissenaxe, so folgt

$$\beta = \frac{\pm\sqrt{4\,r_1^2 A'^2 - C^2}}{2\,A'}$$

und

$$\alpha = \frac{C}{2\,A'}\,.$$

Durch dieselbe Voraussetzung über die Abscissenaxe wird aber die Gleichung der gemeinschaftlichen Potenzlinie der drei Kreise

$$2\,\alpha_2 x = 2\,r_1\,(r_1 - r_2) + p\,.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit A' und berücksichtigt die oben gefundene Relation $2\,r_1 A' = -\,A$, so erhält man

$$2\,\alpha_2 A' x = -A(r_1 - r_2) + pA',$$

oder, wenn man die Werthe von A und A' aus (12) und (14) substituirt,

$$\begin{aligned}2\alpha_2 A' x &= -p\alpha_3(r_1-r_2) + q\alpha_2(r_1-r_2) + p\alpha_3(r_1-r_2) - p\alpha_2(r_1-r_2)\\ &= q\alpha_2(r_1-r_2) - p\alpha_2(r_1-r_3)\\ &= \alpha_2 C,\end{aligned}$$

woraus, wie oben für α,

$$x = \frac{C}{2A'}$$

folgt; setzt man diesen Werth von x in die Gleichung (1) ein, so erhält man, ebenfalls wie oben für β,

$$y = \frac{\pm\sqrt{4r_1^2 A'^2 - C^2}}{2A'}.$$

Die zu 2 Punkten zusammengeschrumpftun Berührungskreise sind also identisch mit den 2 Schnittpunkten der gegebenen 3 Kreise. Ebenso beweist man, dass die Berührungskreise der 3 übrigen Paare in je 2 Punkte sich verwandeln, die mit den eben gefundenen identisch sind.

Wir haben gesehen, dass die Discriminanten δ noch einen Factor A'^2 bei sich hatten; derselbe ist für jedes δ verschieden, er ist

$$\begin{aligned}&\text{für } \delta_1\colon [\alpha_3(r_1-r_2) - \alpha_2(r_1-r_3)]^2,\\ &\text{für } \delta_2\colon [-\alpha_3(r_1+r_2) + \alpha_2(r_1+r_3)]^2,\\ &\text{für } \delta_3\colon [\alpha_3(r_1+r_2) + \alpha_2(r_1-r_3)]^2,\\ &\text{für } \delta_4\colon [\alpha_3(r_1-r_2) - \alpha_2(r_1+r_3)]^2.\end{aligned}$$

Für jedes δ kann nun das zugehörige A'^2 gleich Null werden; dies geschieht für δ_1, wenn

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\beta_2}{\beta_3} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_3},$$

d. h. wenn die drei Kreise so liegen, dass der äussere Aehnlichkeitspunkt des ersten und zweiten auch der des zweiten und dritten ist. In diesem Falle ist y, also auch r unendlich gross und die Mittelpunktscoordinaten ebenfalls, und zwar hat α das positive, β das positive und negative Zeichen. In der That kann man dann an die drei Kreise zwei gemeinschaftliche geradlinige äussere Tangenten legen, die hier als Kreise mit unendlich grossem Radius anzusehen sind. Man darf aber nicht glauben, dass jetzt auch die übrigen δ Null seien; denn, wie oben bemerkt, ist der Factor A'^2 für die verschiedenen δ verschieden. Man hat deshalb ausser den zwei geradlinigen Tangenten im Allgemeinen noch 6 Auflösungen. Ebenso verhält es sich, wenn das A'^2, welches zu δ_2, δ_3 oder δ_4 gehört, gleich Null wird. Das erste geschieht, wenn die drei Kreise so liegen, dass der innere Aehnlichkeitspunkt des ersten und zweiten zugleich der äussere des zweiten und dritten ist, das zweite, wenn der innere Aehnlichkeitspunkt des zweiten und dritten zugleich der äussere des dritten und ersten ist, das dritte, wenn der innere Aehnlichkeitspunkt des dritten und ersten zugleich der äussere des ersten und zweiten ist. In allen diesen Fällen können an die drei Kreise zwei gemeinschaftliche Tangenten gelegt werden und existiren ausserdem im Allgemeinen sechs Lösungen.

Bensheim a. d. Bergstrasse.