

Ueber Potenzen von Determinanten.

Von

C. WELTZIEN in Zehlendorf.

Versteht man unter der $(\mu + 1)^{\text{ten}}$ Potenz $|(\mu + 1)_{ik}|$ der Determinante $|u_{ik}|$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) diejenige Form derselben, welche sich ergibt, wenn man die Elemente jeder Reihe der μ^{ten} Potenz ($\mu = 1, 2, 3, \dots$) derselben mit den Elementen $u_{ik} = 1_{ik}$ jeder Colonne von $|u_{ik}|$ einzeln multiplicirt und die dadurch erhaltenen Producte zu einander addirt, so ist

$$(1) \quad (\mu + 1)_{ik} = m_{i1} u_{1k} + m_{i2} u_{2k} + \dots + m_{in} u_{nk};$$

bezeichnet man ferner durch d_τ die Summe der Hauptunterdeterminanten τ^{ter} Ordnung von $|u_{ik}|$, so dass

$$\begin{aligned} d_1 &= u_{11} + u_{22} + \dots + u_{nn}, \\ d_2 &= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{1n} \\ u_{n1} & u_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ u_{n,n-1} & u_{nn} \end{vmatrix}, \\ (2) \quad d_3 &= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{34} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} u_{n-2,n-2} & u_{n-2,n-1} & u_{n-2,n} \\ u_{n-1,n-2} & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ u_{n,n-2} & u_{n,n-1} & u_{nn} \end{vmatrix}, \\ &\dots \\ &\dots \\ d_{n-1} &= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1,n-1} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \dots & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1,n-2} & u_{1n} \\ u_{21} & \dots & u_{2,n-2} & u_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{n,n-2} & u_{nn} \end{vmatrix} + \dots \\ &\dots + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ u_{32} & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n2} & u_{n3} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix}, \\ d_n &= |u_{ik}| \end{aligned}$$

ist, so gilt für $m = 1, 2, 3, \dots$ die Recursionsformel

$$(3) \quad (m+n)_{ik} = d_1(m+n-1)_{ik} - d_2(m+n-2)_{ik} + \dots \\ \dots + (-1)^{\tau-1} d_\tau(m+n-\tau)_{ik} + \dots + (-1)^{n-1} d_n m_{ik}.$$

Für $n=3$ habe ich dieselbe nebst einigen sich daran anschliessenden Formeln im Programm der Friedrichs-Werder'schen Oberrealschule zu Berlin, Ostern 1897 mitgetheilt, während ich mich von ihrer Richtigkeit für $n = 3, 4, 5$ durch die Ausrechnung überzeugete. Ein allgemeiner Beweis derselben ergibt sich aber *unmittelbar* aus einer Arbeit Kroneckers (Ueber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst. Sitzungsber. der Königl. Preuss. Akad. der Wiss. Math.-Phys. Classe 1889, S. 1082) und einem Satze über recurrente Reihen.

„Bezeichnet man die Elemente derjenigen Determinante, welche zu $|z\delta_{ik} - u_{ik}|$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) reciprok, bezügl. adjungirt ist, durch $\text{rec. } (z\delta_{ik} - u_{ik})$, bezügl. adj. $(z\delta_{ik} - u_{ik})$,

so ist

$$(4) \quad \text{adj. } (z\delta_{ik} - u_{ik}) = |z\delta_{ik} - u_{ik}| \text{ rec. } (z\delta_{ik} - u_{ik}),$$

und es besteht die folgende Reihenentwicklung von $\text{rec. } (z\delta_{ik} - u_{ik})$ nach fallenden Potenzen der Variablen z

$$(5) \quad \text{rec. } (z\delta_{ik} - u_{ik}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r_{ki}}{z^{r+1}}.$$

Hierin ist δ_{ik} das Kronecker'sche Zeichen, das den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem i gleich oder ungleich k ist; $0_{ki} = \delta_{ki}$.

„Kann nun der Quotient zweier ganzen Functionen in eine nach ganzen Potenzen der Veränderlichen z fortschreitende convergente Reihe entwickelt werden, so ist diese Reihe recurrirend.“ Dieser Satz (vergl. z. B. Serret, Höhere Algebra Bd. I, T. 2, Cap. 3) verliert offenbar seine Gültigkeit nicht, wenn die Entwicklung nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{z}$ stattfindet; er kann auf die Kronecker'sche Entwicklung (5) angewandt werden.

Es ist nämlich

$$(6) \quad |z\delta_{ik} - u_{ik}| = z^n - d_1 z^{n-1} + d_2 z^{n-2} + \dots + (-1)^n d_n,$$

wo die Coefficienten d_τ die unter (2) angegebene Bedeutung haben; daher kann man (5) unter Berücksichtigung von (4) auch in der Form

$$(7) \quad [z^n - d_1 z^{n-1} + \dots + (-1)^n d_n] \sum_{z=0}^n \frac{r_{ki}}{z^{n+1}} = \text{adj. } (z\delta_{ik} - u_{ik})$$

schreiben. Da nun $\text{adj. } (z\delta_{ik} - u_{ik})$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ oder $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades ist, je nachdem i gleich oder ungleich k ist, so ergibt sich, wenn man die Gleichung (7) durch z^n dividirt,

$$(8) \quad \left[1 - \frac{d_1}{z} + \dots + (-1)^n \frac{d_n}{z^n} \right] \left(\frac{\delta_{ki}}{z} + \frac{1_{ki}}{z^2} + \frac{2_{ki}}{z^3} + \frac{3_{ki}}{z^4} + \dots \right) \\ = \frac{1}{z^n} \text{adj.} (z \delta_{ik} - u_{ik});$$

die rechte Seite dieser Gleichung hat nun die Form

$$\frac{\delta_{ki}}{z} - \frac{d'_1}{z^2} + \frac{d'_2}{z^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{d'_{n-1}}{z^n};$$

durch Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten von (8) erhält man daher

$$d'_1 = d_1 \quad \delta_{ik} - 1 \cdot 1_{ik},$$

$$d'_2 = d_2 \quad \delta_{ik} - d_1 1_{ik} + 1 \cdot 2_{ik},$$

$$d'_3 = d_3 \quad \delta_{ik} - d_2 1_{ik} + d_1 2_{ik} - 1 \cdot 3_{ik},$$

$$\vdots$$

$$d'_{n-1} = d_{n-1} \delta_{ik} - d_{n-2} 1_{ik} + d_{n-3} 2_{ik} - d_{n-4} 3_{ik} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot (n-1)_{ik},$$

$$0 = d_n \quad \delta_{ik} - d_{n-1} 1_{ik} + d_{n-2} 2_{ik} - d_{n-3} 3_{ik} + \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \cdot d_1 (n-1)_{ik} + (-1)^n n_{ik},$$

und ausserdem die Recursionsformel (3).

Zehlendorf, den 7. April 1897.