Ein direkter Beweis für die Normalform der komplexen Zahlensysteme.

Von

Guido Voghera in Triest.

Für die Klassifizierung der assoziativen komplexen Zahlensysteme ist es von großer Wichtigkeit, dieselben auf eine einfache Normalform reduzieren zu können, aus welcher man unmittelbar die Unterschiede zwischen den verschiedenen Typen beurteilen kann. Eine solche Normalform wurde bekanntlich für die allgemeinen Systeme zuerst von Molien angegeben. Spezialfälle waren schon früher von Peirce und Scheffers betrachtet worden. Später wurde die Normalform von Cartan und von Hawkes noch weiter entwickelt.

In meiner Doktordissertation*) habe ich versucht die Normalform auch auf die nullpotenten Systeme auszudehnen, indem ich die Einteilung in Gruppen eingeführt habe (S. 272—273). So ist es mir gelungen einen ziemlich klaren Einblick in den Aufbau dieser, bis damals etwas vernachlässigten Systeme, zu gewinnen.**) Im „Nachtrage" (Diss. S. 319—323)

*) „Zusammenstellung der irreduziblen komplexen Zahlensysteme in sechs Einheiten", abgedruckt im 54. Bande der Denkschriften der math.-naturw. Klasse der K. Akademie der Wissensch. zu Wien, 1908, S. 269—328. — Diesen Aufsatz werde ich von nun an mit „Diss. S. x" zitieren. — Für die übrige Literatur beziehe ich mich auf die Angaben von J. A. Schouten „Klassifizierung der assoziativen Zahlensysteme", Math. Ann. 76 (1914), S. 1—66. — Diese Arbeit wird im folgenden mit „Schouten S. x" angeführt.

**) Es können aber nicht alle nullfaktorialen Systeme als ein nullpotentes Untersystem eines Nichtquaternionsystems mit mehr als einer Haupteinheit verwendet werden. Die Auffindung der nullfaktorialen Systeme, die bei gegebener Hauptreihe zu diesem Zwecke angewandt werden können, bildet jetzt die wichtigste Aufgabe der Theorie, da die allgemeinen Systeme auf Nichtquaternionsysteme zurückgeführt worden sind, und diese, wenn einmal die Charaktereneinteilung gegeben ist, auf die nullpotenten Nebensysteme reduziert sind. Die Gruppeneinteilung (Diss. S. 325—326) sollte in dieser Richtung alles sicher bis jetzt gewonnene zum Ausdruck bringen. (Vgl. die diesbezügliche Meinung von Shaw — Schouten S. 53, Anm. — und weiter habe ich eine strenge Darstellung der Einteilung der Zahlen des komplexen Systems nach Charakteren in bezug auf eine Reihe idempotenter und untereinander nilfaktorialer Einheiten gegeben.*) Auf diese beiden Resultate werde ich mich im folgenden beziehen. —

Daselbst (Diss. S. 56) habe ich auch die Aufgabe gestellt, den Beweis für die Möglichkeit der Normalform auf rein *direktem* Wege zu leisten. Darunter will ich verstehen, daß man zum Beweise die Zahlen des Systems selbst benützen, und nur die für sie bei der Definition postulierten Eigenschaften — Assoziativität, Kommutativität der Addition, Distributivität mit der Multiplikation und Assoziativität der Multiplikation selbst, — und die entsprechenden einfachen arithmetischen Operationen zwischen den Koeffizienten anwenden muß, und nicht das System als ganzes mit anderen, seiner Definition fremden Theorien in Beziehung setzen (Transformationsgruppentheorie, Matrizenrechnung) und dann die aus diesen Betrachtungen gewonnenen Resultate, wieder auf das System übertragen, noch — wie bei der Taberschen Beweisführung mittels des Skalars (Schouten a. S. 3 a. O.) — mit neuen Funktionen der Koeffizienten, die eine entferntere Beziehung mit den Zahlen des Systems haben, operieren, und aus diesen Funktionen selbst wieder auf die Eigenschaften dieser Zahlen Schlüsse ziehen darf.

---

von demselben Verfasser „Bull. of the intern. Ass. for promoving the study of Quaternions and allied Systems of mathem." Juni 1906, S. 56.)

Die Hawkesche Methode — Schouten S. 36 — die zur Aufstellung aller Nichtquaternionsysteme dienen soll, geht nicht viel über die Aufstellung der Tabelle nach den Charakteren hinaus. Über das nullfaktoriale Nebensystem gibt sie aber, bei komplizierteren Fällen, fast keinen Anhaltspunkt, da man nicht, falls eine Reihe allgemeiner Parameter vorkommt, ohne andere Unterannahmen zu machen, die Einheiten herausfinden kann, die zur ersten und zur letzten Gruppe gehören. Eine Kritik davon habe ich schon in Diss. S. 289 gegeben. Nun bemerke ich aber, daß auch Theorem VI — Schouten, a. S. 3 drittangeg. O. S. 369 — nicht richtig ist, wie man aus dem System der Quaternionen durch Weglassung von e_{11} ersehen kann. Das resultierende System ist nicht assoziativ. — Hieraus haben sich aber zwei weitere unrichtige Tabellen ergeben: die Systeme $1_8 \cdot 1$ und $2_8 \cdot 1$ sind nicht assoziativ, das erste in $e_8 e_2 e_6$, das zweite in $e_2 e_6 e_8$. Diese habe ich auch in meiner Dissertation wiedergegeben: VI_{134} und VI_{136} sind zu streichen.

*) Von der Möglichkeit dieser Einteilung liegen noch zwei *direkte* (s. unten) Beweise vor. Der erste von Hawkes (s. Schouten, S. 17 Anm.), der zweite von Schouten selbst (Schouten S. 15—17). Der erste muß in der Weise ergänzt werden, daß man ihn als einen Schluß von n auf $n+1$ Einheiten betrachtet. Der zweite ist in etwas allzu knapper Form gehalten: es wird nicht ausdrücklich hervorgehoben, daß die vier betrachteten Operatoren in bezug auf verschiedene Einheiten der Hauptreihe kommutativ sind, so daß die Reihenfolge der Einheiten einer bestimmten Reihe belanglos ist, und daß die Resultate der Charaktereneinteilung untereinander linear unabhängig sind.

Ich werde hier weiter einen einfachen, bis auf einen Punkt, wo von dem Hauptsatze der Algebra Gebrauch gemacht wird, im obigen Sinne *direkten* Beweis darbringen. Daß hierin nicht alles neu ist, ergibt sich von selbst; der Beweis des Hauptsatzes, welcher eigentlich den Kern der ganzen Sache bildet, ist aber vollständig originell, und es ist der einzige direkte Beweis, der bis jetzt gegeben worden ist. (Schouten S. 19—20.)

Die Normalform der Systeme.

Satz: Jedes assoziative Zahlensystem mit Modul (S) läßt sich in der Weise aus einem anderen (Nichtquaternion-)Systeme (Σ) ableiten, daß die Einheiten von S*)

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha\beta}_{i_\alpha j_\beta \varkappa_{\alpha\beta}} & \alpha, \beta = 1, 2, \cdots, r, & & \\ & i_\alpha = 1, 2, \cdots, p_\alpha & & p = \sum_1^r {}^\alpha p_\alpha, \\ & j_\beta = 1, 2, \cdots, p_\beta & & P = \sum_1^r {}^\alpha p_\alpha^2, \\ & \varkappa_{\alpha\beta} = 1, 2, \cdots, n_{\alpha\beta}, & \text{für } \alpha \neq \beta & N = \sum_1^r {}^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta n_{\alpha\beta}, \\ & \varkappa_{\alpha\alpha} = 0, 1, 2, \cdots, n_{\alpha\alpha} & & M = P + N, \end{array}$$

aus denen von Σ

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha\beta}_{11\varkappa_{\alpha\beta}} & \alpha, \beta = 1, 2, \cdots, r & & n = r, \\ & \varkappa_{\alpha\beta} = 1, 2, \cdots, n_{\alpha\beta}, & \text{für } \alpha \neq \beta & n = \sum_1^r {}^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta}, \\ & \varkappa_{\alpha\alpha} = 0, 1, 2, \cdots, n_{\alpha\alpha} & & m = r + n, \end{array}$$

durch die Gleichungen

$$e^{\alpha\beta}_{i_\alpha j_\beta \varkappa_{\alpha\beta}} = e^{\alpha\alpha}_{i_\alpha 10} \cdot e^{\alpha\beta}_{11\varkappa_{\alpha\beta}} \cdot e^{\beta\beta}_{1 j_\beta 0}$$

hervorgehen, wobei festgesetzt wird

$$e^{\alpha\alpha}_{i_\alpha j_\alpha 0} \cdot e^{\beta\beta}_{i_\beta j_\beta 0} \begin{cases} = 0, & \text{wenn } \alpha \neq \beta \text{ oder } j_\alpha \neq i_\beta, \\ = e^{\alpha\beta}_{i_\alpha j_\beta 0}, & \text{wenn } \alpha = \beta \text{ und } j_\alpha = i_\beta. \end{cases}$$

Die Einheiten des Nichtquaternionensystems Σ

$$e^{\alpha\beta}_{11\varkappa_{\alpha\beta}}, \quad \varkappa_{\alpha\alpha} \neq 0$$

---

*) Die Multiplikation der höheren komplexen Zahlen wird mit dem Punkte bezeichnet, während die Koeffizienten (gewöhnliche komplexe Zahlen) in den Formeln einfach vorangesetzt werden.

bilden ein nullpotentes invariantes Untersystem, für welches die Gruppeneinteilung (Diss. S. 272—273 und S. 325—326) gilt, d. h., man kann jeder solchen Einheit eine ganze Zahl g zuschreiben, so daß jedes Produkt von solchen Einheiten aus $g + 1$ Faktoren verschwindet, aber nicht jedes Produkt aus g Faktoren.

Dabei bedeutet:

r die Anzahl der primitiven Systeme,

p_α die Ordnung des α^{ten} Systems,

$n_{\alpha\beta}$ die Anzahl der nullpotenten Nebeneinheiten, die zu einer bestimmten idempotenten Einheit des α^{ten} und einer bestimmten des β^{ten} Systems gehören,

p die Anzahl der idempotenten Einheiten der Hauptreihe,

P „ „ „ Haupteinheiten (der primitiven Systeme),

N „ „ „ nullpotenten Nebeneinheiten,

M „ „ „ gesamten Einheiten,

$\pi = r$ „ „ „ idempotenten Einheiten des Nichtquaternionsystems,

n „ „ „ nullpotenten „ „ „ ,

m „ „ „ gesamten „ „ „ .

Zum Beweise des allgemeinen Satzes über die Normalform, muß man vorher einen beschränkten Fall in Betracht ziehen. Wegen seiner Wichtigkeit nenne ich diesen den Hauptsatz (Schouten S. 19, Satz V). Er lautet:

Hauptsatz: In einem System mit nur einer idempotenten Einheit, dem Modul, kann man die anderen Einheiten so wählen, daß sie ein nullpotentes Untersystem bilden.

Für die Definition von nullpotenten (nullfaktorialen) Systemen s. Diss. S. 318—319.

Haben wir in der Tat eine nicht nullpotente Zahl eines allgemeinen Systems, so besteht zwischen $n + 1$ aufeinander folgenden Potenzen derselben gewiß eine lineare Beziehung, und umgekehrt ist, falls eine solche Beziehung existiert, die Zahl nicht nullpotent. Sei a eine solche Zahl und sei die *erste* lineare Beziehung, der ihre Potenzen genügen:

$$(1) \qquad a^\nu + a_1 a^{\nu+1} + \cdots + a_\varkappa a^{\nu+\varkappa} = 0 \qquad a_\varkappa \neq 0,$$

wobei $a, a^2, a^3, \cdots, a^{\nu+\varkappa-1}$ noch unabhängig sind und $\nu \geqq 1$, $\varkappa \geqq 1$. Ich setze

$$(2) \qquad b + a_1 a + a_2 a^2 + \cdots + a_\varkappa a^\varkappa = 0,$$

woraus durch Potenzierung des Ausdrucks von b und dadurch, daß mittels (1) die Potenzen von a, die höher sind als die $(\nu + \varkappa - 1)^{\text{te}}$, eliminiert werden, folgt:

$$(3) \qquad b^\nu + b_0 a^\nu + b_1 a^{\nu+1} + \cdots + b_{\varkappa-1} a^{\nu+\varkappa-1} = 0;$$

und für jedes $\beta \geqq 1$, $\alpha \geqq 0$, wie man leicht aus (1) ersehen kann;

$$a^{\nu+\alpha} = b \cdot a^{\nu+\alpha} = a^{\nu+\alpha} \cdot b = a^{\nu+\alpha} \cdot b^\beta = b^\beta \cdot a^{\nu+\alpha}$$

und

$$b^\beta \neq 0, \quad \alpha \geqq 0, \quad \beta \geqq 1$$

und ebenso

$$\sum_\alpha c_\alpha a^{\nu+\alpha} \cdot b^\beta = \sum_\alpha c_\alpha b^\beta \cdot a^{\nu+\alpha} = \sum_\alpha c_\alpha a^{\nu+\alpha}.$$

Da aber b^ν eine Vielfachsumme von Potenzen von a ist, die gewiß höher sind als die $(\nu - 1)^{\text{te}}$, gesetzt

(4) $$b^\nu = \eta \neq 0,$$

so folgt im speziellen für $\beta = \nu$

$$\sum_\alpha c_\alpha a^{\nu+\alpha} \cdot \eta = \eta \cdot \sum_\alpha c_\alpha a^{\nu+\alpha} = \sum_\alpha c_\alpha a^{\nu+\alpha}$$

und

(5) $$\eta^2 = \eta.$$

Wenn wir nun annehmen, daß im Systeme nur eine idempotente Einheit existiert, so ist sie notwendig der Modul und es ist

$$\eta \cdot a = a \cdot \eta = a$$

und folglich aus (3)

(6) $$a + b_0 a^{\nu+1} + b_1 a^{\nu+2} + \cdots + b_{\varkappa-1} a^{\nu+\varkappa} = 0.$$

Da wir angenommen haben, daß (1) die *erste* lineare Beziehung zwischen den nachfolgenden Potenzen des a ist, so muß identisch (1) gleich (6) sein, und insbesondere

(7) $$\nu = 1, \quad b = \eta, \quad \eta + a_1 a + a_2 a^2 + \cdots + a_\varkappa a^\varkappa = 0.$$

$\eta, a, a^2, \cdots, a^{\varkappa-1}$ sind linear unabhängig, und falls $c = a - x\eta$ gesetzt wird, sind auch $\eta, c, c^2, \cdots, c^{\varkappa-1}$ für jeden Wert des x linear unabhängig und von 0 verschieden.

Es ist weiter aus (7)

(8) $$\eta + a_1(c + x\eta) + a_2(c + x\eta)^2 + \cdots + a_\varkappa(c + x\eta)^\varkappa = 0$$

für jedes x. Wenn ich nun den Wert α als Wurzel der Gleichung

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_\varkappa x^\varkappa = 0$$

bestimme, was nach dem Hauptsatze der Algebra immer möglich ist, bekomme ich, da η in (8) ausfällt, eine Beziehung zwischen den Potenzen von c bis $c^\varkappa$, etwa

(9) $$c_1 c + c_2 c^2 + \cdots + c_{\varkappa-1} c^{\varkappa-1} + a_\varkappa c^\varkappa = 0.$$

Wäre nun ein $c_p \neq 0$, so würde c nicht nullpotent sein, und wenn wir für c dieselbe Schlußreihe wiederholen würden, die wir für a durchgemacht haben, und bedenken, daß es nur ein η im Systeme gibt, könnten wir analog zu (7) schließen

$$c_1 \eta + c_2 c + \cdots + a_\varkappa c^{\varkappa-1} = 0,$$

was im Widerspruch mit der bewiesenen Unabhängigkeit dieser $\varkappa$ Zahlen steht. Es ist also $c_p = 0$ für alle p, und folglich

$$c^{\varkappa} = 0.$$

Es gehört also zu jeder Zahl a des Systems eine gewöhnliche Zahl α und ein niedrigster Exponent $\varkappa$, wofür, wenn wir setzen,

$$a' = a - \alpha\eta, \tag{10}$$

$$a'^{\varkappa} = 0. \tag{11}$$

a' will ich die *reduzierte* Zahl von a nennen. Zu einer Zahl kann es nur eine reduzierte geben, denn zwei verschiedene Gleichungen (11) würden, mittels (10), eine lineare Beziehung zwischen $a, a^2, \cdots, a^{\varkappa}$ ergeben. Die obige Gleichung für x hat also notwendig alle Wurzeln gleich. Wenn, und nur wenn a nullpotent ist, ist $\alpha = 0$, also die Zahl gleich ihrer reduzierten. Die Gleichung (1) wird für unsere speziellen Systeme

$$a \cdot a'^{\varkappa} = a'^{\varkappa} \cdot a = 0.$$

Sind m Zahlen $a_1, a_2, \cdots, a_m$ und η linear unabhängig, so sind auch die reduzierten Zahlen $a_1', a_2', \cdots, a_m'$ linear unabhängig.

Wenn wir nun eine nullpotente Zahl des Systems herauswählen und alle ihre Produkte ins Auge fassen, so sind sie auch nullpotent. Denn sei $a^{\lambda+1} = 0$, während noch $a^{\lambda} \neq 0$; wäre z. B. das linksseitige Produkt $a \cdot b$ nicht nullpotent, so würde für seine reduzierte Zahl die Gleichung gelten:

$$(a \cdot b + \alpha\eta)^{\varkappa} = 0,$$

und durch linksseitige Multiplikation mit a^{λ} erhalten wir

$$a^{\lambda} = 0.$$

Ich beweise nun folgenden an sich interessanten

Hilfssatz 1. Wählen wir in einem Systeme m Zahlen heraus, welche die Eigenschaft haben, daß ihre sämtlichen (es genügt auch nur rechts- oder nur linksseitigen) Produkte mit allen anderen Zahlen des Systems nullpotent sind, und betrachten wir alle Produkte, die nur aus diesen Zahlen gebildet sind (indem die Zahlen selbst, als Produkte mit nur einem Faktor, auch mit inbegriffen sind), so verschwinden alle solche Produkte von mehr als n Faktoren und diese Produkte bilden samt allen ihren linearen Zusammensetzungen ein nullpotentes Untersystem des gegebenen Systems.

Der Beweis, daß alle $n+1$-gliedrigen Produkte verschwinden, ist eine naheliegende Verallgemeinerung der bekannten Frobeniusschen Schlußweise (Diss. S. 318).

Nehmen wir an, daß ein Produkt aus $n+1$ Zahlen nicht Null sei, und betrachten wir die nacheinander folgenden Produkte:

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_1 \cdot a_2,\ b_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, \cdots, b_{n+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n+1}.$$

Zwischen diesen muß eine lineare Beziehung bestehen:

$$-b_\nu + \beta_1 b_{\nu+1} + \beta_2 b_{\nu+2} + \cdots + \beta_{n+1-\nu} b_{n+1} = 0$$

oder

$$b_\nu = b_\nu \cdot (\beta_1 a_{\nu+1} + \beta_2 a_{\nu+1} \cdot a_{\nu+2} + \cdots + \beta_{n+1-\nu} a_{\nu+1} \cdot a_{\nu+2} \cdot \cdots \cdot a_{n+1}) = b_\nu \cdot a.$$

Wenn wir aber a^2 bilden, so muß es als Vorfaktor $a_{\nu+1}$ enthalten.

$$a^2 = a_{\nu+1} \cdot b = c$$

ist also nullpotent. Aber

$$b_\nu = b_\nu \cdot a = b_\nu \cdot a^2 = b_\nu \cdot c = b_\nu \cdot c^\alpha = 0 \qquad \alpha \geqq 1.$$

Also auch $b_{n+1} = 0$, im Wiederspruche mit der Voraussetzung.

Der zweite Teil des Beweises ergibt sich aus der Möglichkeit der Gruppeneinteilung laut Diss. S. 272—273, da diese als einzige Voraussetzung das Verschwinden aller Produkte von mehr als n Faktoren benützt. Unter allen bisher betrachteten Produkten wählen wir eine vollständige Reihe linear unabhängiger Zahlen heraus: $e_1, e_2, \cdots, e_\alpha$. Ihre Produkte sind lineare Zusammensetzungen dieser Zahlen selbst. Unter allen linearen Zusammensetzungen von $e_1, \cdots, e_\alpha$ kann man diejenigen herauswählen, die mit allen $e_1, \cdots, e_\alpha$ multipliziert 0 ergeben, usw. nach dem bekannten Verfahren.

In dem Falle, der uns interessiert, bilden die reduzierten Zahlen des Systems mit einer idempotenten Einheit ein nullfaktoriales Untersystem. Daß es genau $n-1$ Einheiten besitzt, folgt aus einer früheren Bemerkung. So ist der Hauptsatz bewiesen.

Weitere Regelung des Systems.

Unter den Zahlen entgegengesetzten Charakters ij und ji kann es welche geben, die, untereinander multipliziert eine nicht nullpotente Zahl ergeben. Sei ein solches Paar

(1) $$x_{ij} \cdot x_{ji} = x_{ii} \quad \text{und setzen wir} \quad x_{ji} \cdot x_{ij} = x_{jj}.$$

Da x_{ii} nicht nullpotent ist, existiert ein α, so daß

(2) $$(\alpha x_{ii} + \eta_i)^\varkappa = 0 \quad \text{oder} \quad \eta_i + \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{\lambda} \alpha^\lambda x_{ii}^\lambda = 0,$$

$$\eta_i = x_{ij} \cdot \left(-\sum_{\lambda=1}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{\lambda} \alpha^\lambda x_{jj}^{\lambda-1}\right) \cdot x_{ji} = x_{ij} \cdot x'_{ji} = x'_{ij} \cdot x_{ji}.$$

Wenn man (2) links mit x_{ji}, rechts mit x_{ij} multipliziert, ergibt sich

(3) $$x_{jj} + \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{\lambda} \alpha^\lambda x_{jj}^{\lambda+1} = 0 \quad \text{woraus} \quad \eta_j + \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{\lambda} \alpha^\lambda x_{jj}^\lambda = 0$$

oder

$$\eta_j = x_{ji} \cdot \left(-\sum_{\lambda=1}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{\lambda} \alpha^\lambda x_{ii}^{\lambda-1}\right) \cdot x_{ij} = x'_{ji} \cdot x_{ij} = x_{ji} \cdot x'_{ij},$$

da

$$x_{ii}^\nu \cdot x_{ij} = x_{ij} \cdot x_{jj}^\nu \quad \text{und} \quad x_{jj}^\nu \cdot x_{ji} = x_{ji} \cdot x_{ii}^\nu \qquad \nu \geqq 1.$$

Ich setze nun:

$$x_{ij} = e_{ij}, \quad x'_{ji} = e_{ji}, \quad \eta_i = e_{ii}, \quad \eta_j = e_{jj}$$

und erhalte

$$e_{ii} = e_{ij} \cdot e_{ji}, \quad e_{jj} = e_{ji} \cdot e_{ij}. \tag{4}$$

Ich behalte nun i fest, und setze für j alle möglichen Werte $j_1, j_2, \cdots, j_p$; wofür eine Gleichung der Art wie (1) im Systeme zu finden möglich ist.

Ich erhalte also p Paare von Gleichungen (4). Gesetzt:

$$e_{j_\varkappa j_\lambda} = e_{j_\varkappa i} \cdot e_{i j_\lambda} \neq 0;$$

wie durch Multiplikation rechts mit e_{ij_λ} hervorgeht, befolgen diese Zahlen, wenn wir j_0 mit i identifizieren, die Multiplikationsregeln

$$\begin{aligned} e_{j_\varkappa j_\lambda} \cdot e_{j_\mu j_\nu} &= e_{j_\varkappa j_\nu}, \quad \text{wenn} \quad j_\lambda = j_\mu \\ &= 0 \quad , \quad \text{„} \quad j_\lambda \neq j_\mu. \end{aligned}$$

Es ist klar, daß in dieser Betrachtung sämtliche $j_\varkappa$ dieselbe Rolle spielen, so daß man zu demselben Resultate kommt, wenn man von irgend einem von ihnen ausgeht.

Ich führe nun für alle j Werte, die zu einer solchen Reihe gehören, einen gemeinsamen Index α ein und schreibe die so erhaltenen p_α Haupteinheiten des α^{ten} Primitivsystems

$$e^{\alpha\alpha}_{i_\alpha j_\alpha 0} \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, r, \qquad i_\alpha, j_\alpha = 1, 2, \cdots, p_\alpha.$$

Von allen übrigen Zahlen des Systems nehme ich zuerst diejenigen heraus, die zu einer bestimmten idempotenten Einheit eines jeden primitiven Systems gehören, z. B. zu denjenigen, die beide unteren Indizes 1 haben. Diese Einheiten mögen sein

$$e^{\alpha\beta}_{11\varkappa_{\alpha\beta}} \qquad \varkappa_{\alpha\beta} = 1, 2, \cdots, n_{\alpha\beta}.$$

Ist $\alpha = \beta$, so können diese neuen Nebeneinheiten nach dem Hauptsatze so gewählt werden, daß sie ein nullfaktoriales Untersystem bilden. Ist $\alpha \neq \beta$, so kann kein Produkt aus ihnen eine nicht nullpotente Zahl ergeben. Es kommt also in den Produkten aller neu eingeführten Einheiten keine idempotente Einheit vor; sie bilden also ein Untersystem. Um zu zeigen, daß dieses Untersystem nullfaktorial ist, beweise ich folgendes:

Hilfssatz 2. Wählen wir in einem Systeme m Zahlen heraus, welche einen einzigen Charakter haben, und die Eigenschaft haben, daß ihre sämtlichen (es genügt auch nur rechts- oder nur linksseitigen) Produkte geraden Charakters mit allen anderen Zahlen des Systems nullpotent sind, und betrachten wir alle Produkte die nur aus diesen Zahlen gebildet sind (indem die Zahlen selbst, als Produkte mit nur einem Faktor, auch mit inbegriffen sind), so bilden diese Produkte samt allen ihren linearen Zusammensetzungen ein nullpotentes Untersystem des gegebenen Systems.

Unter denselben Voraussetzungen wie bei Hilfssatz 1 folgt:

$$b_\nu = b_\nu \cdot a.$$

Da aber b_ν als Produkt der Zahlen $a_1 \cdot a_2 \cdots a_\nu$, welche nur einen einzigen Charakter haben, ebenso nur einen Charakter hat, ist a geraden Charakters, und ebenso a^2. Da letzteres $a_{\nu+1}$ als Vorfaktor enthält, ist es nach der Voraussetzung nullpotent und man kann weiter dieselbe Schlußweise, wie beim ersten Hilfssatze anwenden.

Es folgt also, daß die zuletzt betrachteten nullpotenten Einheiten

$$e^{\alpha\beta}_{11\varkappa_{\alpha\beta}}$$

ein nullfaktoriales Untersystem darstellen*) und mit den zugehörigen idempotenten Einheiten bilden sie ein (Nichtquaternion-) Untersystem, welches nach Diss. S. 325—326 weiter behandelt werden kann.

Zu jeder Einheit dieses Nichtquaternionsystems (Σ) gehört aber eine, und nur eine Einheit des Charakters $i_\alpha j_\beta$, vermöge der Gleichung

$$e^{\alpha\beta}_{i_\alpha j_\beta \varkappa_{\alpha\beta}} = e^{\alpha\alpha}_{i_\alpha 1 0} \cdot e^{\alpha\beta}_{11\varkappa_{\alpha\beta}} \cdot e^{\beta\beta}_{1 j_\beta 0};$$

so daß, wenn die Einheiten von (Σ) linear unabhängig oder abhängig sind, dasselbe von den entsprechenden Einheiten des allgemeinen Systems (S) gilt, und umgekehrt mittels der Gleichungen

$$e^{\alpha\beta}_{11\varkappa_{\alpha\beta}} = e^{\alpha\alpha}_{1 i_\alpha 0} \cdot e^{\alpha\beta}_{i_\alpha j_\beta \varkappa_{\alpha\beta}} \cdot e^{\beta\beta}_{j_\beta 1 0}.$$

Die Produkte sämtlicher Einheiten von (S) sind aus denen von (Σ) eindeutig bestimmt:

$$e^{\alpha\beta}_{i_\alpha j_\beta \varkappa_{\alpha\beta}} \cdot e^{\beta\gamma}_{j_\beta l_\gamma \varkappa_{\beta\gamma}} = e^{\alpha\alpha}_{i_\alpha 1 0} \cdot e^{\alpha\beta}_{11\varkappa_{\alpha\beta}} \cdot e^{\beta\beta}_{1 j_\beta 0} \cdot e^{\beta\beta}_{j_\beta 1 0} \cdot e^{\beta\gamma}_{11\varkappa_{\beta\gamma}} \cdot e^{\gamma\gamma}_{1 l_\gamma 0}$$

$$= e^{\alpha\alpha}_{i_\alpha 1 0} \cdot e^{\alpha\beta}_{11\varkappa_{\alpha\beta}} \cdot e^{\beta\gamma}_{11\varkappa_{\beta\gamma}} \cdot e^{\gamma\gamma}_{1 l_\gamma 0} = e^{\alpha\alpha}_{i_\alpha 1 0} \cdot e^{\alpha\gamma}_{11\varkappa_{\alpha\gamma}} \cdot e^{\gamma\gamma}_{1 l_\gamma 0} = e^{\alpha\gamma}_{i_\alpha l_\gamma \varkappa_{\alpha\gamma}}$$

*) Im entsprechenden Beweise des Theorems VIII (Schouten S. 24) fehlt dieser wichtige Schritt. Schouten beweist nämlich, daß die Nebeneinheiten nullpotent sind und ein Untersystem bilden, nicht aber, daß sie ein nullpotentes Untersystem bilden, das heißt, daß auch alle ihre linearen Zusammensetzungen nullpotent, respektive nullfaktorial sind.

angenommen, daß

$$e^{\alpha\beta}_{11\varkappa_{\alpha\beta}} \cdot e^{\beta\gamma}_{11\varkappa_{\beta\gamma}} = e^{\alpha\gamma}_{11\varkappa_{\alpha\gamma}}.$$

Die nullpotenten Nebeneinheiten bilden folglich auch für sich ein invariantes nullfaktoriales System. Somit ist der Satz über die Normalform bewiesen.*)

Wien, 21. September 1915.

*) Auch bei der *Regelung des Systems in bezug auf ein Hauptquadrat* (s. Schouten S. 24—25) vermißt man den Beweis, daß die Einteilung nach Gruppen mit derjenigen nach Charakteren sich verträgt (s. Diss. 325—326 für Nichtquaternionsysteme, und, nach dem im Text ausgeführten, auch für alle Systeme). Es könnte wohl möglich sein, daß man, wenn man versucht das Untersystem der Nebeneinheiten analog wie bei Theorem VI zu ordnen, gezwungen sein müßte, gemischte Charaktere einzuführen. Auch ist zu bemerken, daß die neue Ordnung nichts mit der alten Regelung der Einheiten geraden Charakters gemein hat. Es geschieht oft, daß man gezwungen ist, nicht nur die frühere Regelung ganz umzuordnen, sondern auch die Einheiten verschieden zu wählen. Z. B. kann eine Einheit geraden Charakters, welche mit allen Einheiten desselben Charakters nullfaktorial ist, in den Produkten mit den Einheiten anderer Charaktere Vielfachsummen von Einheiten aller möglichen früheren und späteren Gruppen enthalten, so daß sie bei der neuen Regelung nicht beibehalten werden kann.

Endlich bemerke ich, daß der Begriff der *durchgehenden Selbstisomorphie* (s. Schouten S. 27 u. ff., und besonders S. 35, Anm.) in meiner Dissertation (S. 327—28) schon eingeführt worden war, und daß mein Satz XIII, mit Theorem IX, S. 34 von Schouten, für den beschränkteren, aber bei weitem wichtigeren Falle der Nichtquaternionsysteme, übereinstimmt.