

# SULLE EQUAZIONI LINEARI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE CON $n$ VARIABILI INDIPENDENTI.

Nota di **Pietro Burgatti**, in Roma.

---

Adunanza dell'8 febbrajo 1903.

---

Quando la risoluzione d'un problema dipende dallo studio di una equazione alle derivate parziali d'un certo ordine con  $n$  variabili indipendenti, è utile di riconoscere anzitutto, se tale equazione sia riducibile o no ad un numero minore di variabili, con opportune trasformazioni. Questa quistione si risolve in un modo assai semplice per le equazioni lineari del 2° ordine, ed è trattata nel primo paragrafo di questa Nota.

Nel secondo paragrafo faccio lo studio di un altro problema preliminare: di riconoscere cioè se l'integrazione di un'equazione lineare del 2° ordine sia immediatamente riducibile o no all'integrazione successiva di due equazioni del 1° ordine. Io risolvo però questo problema soltanto per una classe particolare d'equazioni, che fu considerata già dal Prof. DINI \*), e per la quale valgono certe considerazioni, che ebbi occasione di sviluppare in altra mia Nota \*\*).

1. Sia data l'equazione

$$(1) \quad \sum_{r,s=1}^n A_{rs} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_r \partial x_s} + \sum_{i=1}^n C_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + N\zeta = 0 \quad (A_{rs} = A_{sr}),$$

---

\*) Memorie della R. Accademia dei Lincei, 1901.

\*\*) *Di alcuni invarianti*, ecc. (R. Accademia dei Lincei, 1896).

ove i coefficienti sono funzioni delle  $n$  variabili indipendenti  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . In virtù del cambiamento di variabili definito dalle relazioni

$$(2) \quad y_s = y_s(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

il cui determinante funzionale  $D = \left| \frac{\partial y_s}{\partial x_r} \right|$  si suppone diverso da zero, l'equazione data si trasforma nella seguente:

$$(1') \quad \sum_{r,s}^n B_{rs} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_r \partial y_s} + \sum_i^n E_i \frac{\partial \chi}{\partial y_i} + N_1 \chi = 0,$$

ove

$$(3) \quad \begin{cases} B_{ii} = \sum_{r,s}^n A_{rs} \frac{\partial y_i}{\partial x_r} \frac{\partial y_i}{\partial x_s}, \\ 2 B_{ij} = \sum_{r,s}^n A_{rs} \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_r} \frac{\partial y_j}{\partial x_s} + \frac{\partial y_j}{\partial x_r} \frac{\partial y_i}{\partial x_s} \right) & (i \neq j) \\ E_i = \sum_{r,s}^n A_{rs} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_r \partial x_s} + \sum_s^s C_s \frac{\partial y_i}{\partial x_s} & (i, j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Indicando con  $A$  il determinante  $|A_{rs}|$  formato coi coefficienti delle derivate seconde, e con  $B$  l'analogo determinante  $|B_{rs}|$ , si ha per cose note

$$B = D^2 \cdot A.$$

Vediamo a quali condizioni devono soddisfare i coefficienti della (1), perchè esista un cambiamento di variabili (2) atto a trasformarla in un'equazione (1'), nella quale manchino tutte le derivate pure e miste rispetto ad una variabile, per esempio alla  $y_n$ . La  $y_n$  entrerà allora nei coefficienti come un parametro qualunque.

Quando ciò avvenga, si dirà che l'equazione data è riducibile ad un numero minore di variabili.

Le condizioni perchè la (1') manchi delle derivate rispetto ad  $y_n$  sono le seguenti:

$$B_{,n} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad E_n = 0;$$

dalle prime  $n$  delle quali si deduce subito, che il determinante  $A$  della proposta deve essere nullo. Trascurando per ora l'ultima equazione  $E_n = 0$ , scriviamo le altre distesamente nella maniera che segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \sum_i A_{is} \frac{\partial y_n}{\partial x_s} + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \sum_i A_{in} \frac{\partial y_n}{\partial x_s} &= 0 \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \sum_i A_{is} \frac{\partial y_n}{\partial x_s} + \dots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \sum_i A_{in} \frac{\partial y_n}{\partial x_s} &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \sum_i A_{is} \frac{\partial y_n}{\partial x_s} + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \sum_i A_{in} \frac{\partial y_n}{\partial x_s} &= 0. \end{aligned}$$

Essendo il determinante funzionale  $\left| \frac{\partial y_s}{\partial x_r} \right|$  diverso da zero, si deduce che  $y_n$  deve essere una soluzione d'un sistema d'equazioni lineari del 1° ordine, cioè del sistema

$$(4) \quad \sum A_{1s} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = 0, \quad \sum A_{2s} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = 0, \quad \dots, \quad \sum A_{ns} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = 0.$$

Ma  $|A_{rr}| = 0$ ; per conseguenza, se si suppone, come faremo per ora, che non tutti i minori dell'ordine  $n - 1$  di  $A$  sieno nulli, il sistema formato con  $n - 1$  delle equazioni (4) deve essere completo. Ammettiamo che ciò avvenga, e che  $y_n$  sia precisamente la soluzione di tal sistema.

Consideriamo allora l'altra equazione di condizione  $E_n = 0$ . Essa può scriversi nel modo seguente:

$$\sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} \left( A_{1r} \frac{\partial y_1}{\partial x_r} + \dots + A_{nr} \frac{\partial y_n}{\partial x_r} \right) + \sum_s \left( C_s - \sum_r \frac{\partial A_{sr}}{\partial x_r} \right) \frac{\partial y_s}{\partial x_s} = 0,$$

la quale, per le ipotesi fatte, si riduce, e diventa

$$\sum_s \left( C_s - \sum_r \frac{\partial A_{sr}}{\partial x_r} \right) \frac{\partial y_n}{\partial x_s} = 0,$$

ossia

$$\sum_i (C_i - K_i) \frac{\partial y_n}{\partial x_i} = 0,$$

avendo posto

$$\sum_r \frac{\partial A_{sr}}{\partial x_s} = K_s.$$

Dunque la  $y_n$  deve essere una soluzione anche dell'equazione  $\sum (C_i - K_i) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$ ; il che non può avvenire, se essa non è una combinazione lineare di  $n - 1$  equazioni (4); per conseguenza deve

essere :

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n} \\ C_1 - K_1 & C_2 - K_1 & \dots & C_n - K_n \end{vmatrix} = 0.$$

Quando le condizioni, che abbiamo enunciate, sono soddisfatte, si potrà ridurre la (1) a una variabile di meno; ma non sarà possibile ridurla a due o più variabili di meno, quando esista almeno un minore dell'ordine  $n - 1$  di  $A$  diverso da zero; mentre, se tutti questi minori sono nulli, tale riduzione potrà farsi o no. Per giungere quindi a risultati più precisi occorre considerare il caso generale, in cui insieme al determinante  $A$  siano nulli tutti i minori fino a quelli dell'ordine  $n - p + 1$ , e che almeno un determinante dell'ordine  $n - p$  sia diverso da zero.

Supponiamo che ciò sia. Allora soltanto  $n - p$  delle equazioni (4) sono distinte; e, perchè la riduzione sia possibile, bisognerà pertanto che esse abbiano delle soluzioni comuni. Vi sono perciò due casi, che è bene di considerare separatamente: o il sistema formato da quelle  $n - p$  equazioni distinte è completo, oppure è riducibile ad un sistema completo coll'aggiunta di altre equazioni distinte fra loro e dalle precedenti, in numero di  $p - 1$  al più.

Nel primo caso esisteranno  $p$  e soltanto  $p$  soluzioni comuni distinte. Prendendo  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p+1}$  uguali a quelle soluzioni, è chiaro che nella (1') risulteranno nulli i coefficienti

$$B_{s,n}, B_{s,n-1}, \dots, B_{s,n-p+1} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Affinchè nella (1') manchino anche i termini che contengono le derivate prime rispetto a  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p+1}$ , è necessario e basta che siano nulli i coefficienti  $E_n, E_{n-1}, \dots, E_{n-p+1}$ . Ma, per quanto si è detto, questi coefficienti hanno rispettivamente le espressioni

$$\sum (C_s - K_s) \frac{\partial y_n}{\partial x_s}, \quad \sum (C_s - K_s) \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_s}, \quad \dots \quad \sum (C_s - K_s) \frac{\partial y_{n-p+1}}{\partial x_s};$$

per conseguenza  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p+1}$  devono essere soluzioni dell'equazione

$$(5) \quad \sum (C_s - K_s) \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = 0.$$

Perchè ciò avvenga, è necessario e basta che questa equazione sia

una combinazione lineare delle  $n - p$  equazioni considerate più sopra; giacchè esse, per ipotesi, formano un sistema completo. Se la (5) non è una combinazione lineare di quelle, l'equazione data non potrà ridursi a  $p$  variabili di meno; ed allora bisognerà unire la (5) a quel sistema completo, ed esaminare quante soluzioni distinte ammette il nuovo sistema così formato. Se sono in numero di  $q$  (e sarà  $q < p$ ), l'equazione data si potrà ridurre a  $q$  variabili di meno.

Nel secondo caso, quando cioè le  $n - p$  equazioni distinte delle (4) non formano un sistema completo, ma hanno delle soluzioni comuni non costanti, si potranno aggiungere (con metodi noti) a quelle equazioni delle altre in numero di  $m < p$ , in guisa da ottenere un sistema completo. Il quale perciò ammetterà  $p - m = h$  soluzioni comuni distinte, ed allora, prendendo  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-h+1}$  uguali a queste soluzioni, i coefficienti

$$B_{s,n}, B_{s,n-1}, \dots, B_{s,n-h+1} \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

risulteranno nulli. Quanto all'equazione (5), può avvenire che essa sia una combinazione lineare delle equazioni di quel sistema completo; nel qual caso è chiaro, per le cose dette, che anche tutti i coefficienti  $E_n, E_{n-1}, \dots, E_{n-h+1}$  saranno nulli. Così l'equazione data sarà ridotta ad  $h$  variabili di meno. Ma se la (5) non soddisfa a tale condizione, bisognerà unirla a quel sistema completo, ed esaminare quante soluzioni distinte ammette il nuovo sistema così formato. Se sono un numero di  $q$  ( $q < h$ ), l'equazione data si potrà ridurre a  $q$  variabili di meno.

In particolare, affinchè la (1) sia riducibile a due sole variabili è necessario e basta: 1) che  $A$  sia nullo insieme a tutti i minori fino a quelli del 3° ordine almeno; 2) che, se quelli del secondo ordine non sono tutti nulli, il sistema

$$\begin{aligned} A_{r1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + A_{r2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + A_{rn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} &= 0 \\ A_{s1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + A_{s2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + A_{sn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} &= 0, \end{aligned}$$

essendo  $r$  e  $s$  scelti convenientemente, sia completo; e siano tutti nulli i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rn} \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{sn} \\ C_1 - K_1 & C_2 - K_2 & \dots & C_n - K_n \end{vmatrix};$$

3) che, se anche i minori del 2° ordine di  $A$  sono nulli, il sistema

$$\begin{aligned} (+) \quad & A_{r_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dots + A_{r_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0 \\ & (C_1 - K_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dots + (C_n - K_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}$$

sia completo; nel qual caso, per ottenere la riduzione, si prenderanno per  $y_3, y_4, \dots, y_n$  le  $n-2$  soluzioni di questo sistema; e sarà anche utile di prendere per  $y_2$  una soluzione della (+) distinta dalle precedenti.

Se in quest'ultimo caso fossero nulli i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} A_{r_1} & A_{r_2} & \dots & A_{r_n} \\ C_1 - K_1 & C_2 - K_2 & \dots & C_n - K_n \end{vmatrix},$$

l'equazione data sarebbe riducibile alle derivate ordinarie.

2. Considereremo ora le equazioni del tipo (1) riducibili alla forma

$$(6) \quad A_{11} V[U(Z)] + \sum_1^n G_i \frac{\partial Z}{\partial x_i} + NZ = 0,$$

essendo  $A_{11} \neq 0$ , e

$$(7) \quad \begin{cases} U(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \lambda_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ V(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \mu_n \frac{\partial f}{\partial x_n}. \end{cases}$$

Tale riduzione è possibile quando la forma quadratica  $\sum_1^n A_{rr} \xi_r \xi_r$ , si può porre sotto la forma

$$(b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + \dots + b_n \xi_n)(a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n).$$

Allora è facile vedere che  $\frac{b_i}{b_1} = \lambda_i$ , e  $\frac{a_i}{a_1} = \mu_i$ , sono le due radici dell'equazione

$$(8) \quad A_{11} \lambda^2 - 2 A_{1s} \lambda + A_{ss} = 0 \quad (s = 2, 3, \dots, n).$$

Per mezzo delle (2), l'equazione data (1) si trasforma nella (1'), i cui coefficienti sono definiti dalle formule (3). Ma la (1) essendo riducibile alla forma (6), si ha evidentemente

$$\left. \begin{aligned} B_{ii} &= A_{11} U(y_i) V(y_i) \\ 2 B_{ij} &= A_{11} [U(y_i) V(y_j) + U(y_j) V(y_i)] \end{aligned} \right\} i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Supponendo  $B_{ii} \neq 0$ , si ricava subito

$$\frac{B_{ii}}{B_{ii}} = \frac{U(y_i)}{U(y_i)} \cdot \frac{V(y_i)}{V(y_i)}, \quad \frac{2B_{ii}}{B_{ii}} = \frac{U(y_i)}{U(y_i)} + \frac{V(y_i)}{V(y_i)};$$

per conseguenza possiamo porre

$$(9) \quad \frac{U(y_i)}{U(y_i)} = \lambda'_i, \quad \frac{V(y_i)}{V(y_i)} = \mu'_i,$$

essendo  $\lambda'_i$  e  $\mu'_i$  le due radici dell'equazione

$$(8') \quad B_{ii} \lambda'^2 - 2B_{ii} \lambda' + B_{ii} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

Sviluppiamo ora le operazioni indicate dal simbolo  $V[U(y_i)]$ . Separando i termini del secondo ordine da quelli del primo, e notando che

$$\lambda_r \mu_s + \mu_r \lambda_s = \frac{b_r}{b_i} \frac{a_s}{a_i} + \frac{b_s}{b_i} \frac{a_r}{a_i} = \frac{2A_{rs}}{A_{ii}},$$

si ottiene facilmente la formula

$$A_{ii} V[U(y_i)] = \sum_{r,s}^n A_{rs} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_r \partial x_s} + A_{ii} \sum_2^n V(\lambda_s) \frac{\partial y_i}{\partial x_s}.$$

Di qui possiamo ricavare la somma doppia e sostituirla nella espressione di  $E_i$ , data dall'ultima delle (3); si trova

$$E_i = A_{ii} V[U(y_i)] + C_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i} + \sum_2^n [C_s - A_{ii} V(\lambda_s)] \frac{\partial y_i}{\partial x_s} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ma

$$U(y_i) = \lambda'_i U(y_i); \quad (i \neq 1)$$

quindi

$$E_i = A_{ii} V[U(y_i)] + C_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i} + \sum_2^n [C_s - A_{ii} V(\lambda_s)] \frac{\partial y_i}{\partial x_s}$$

$$E_i = A_{ii} \lambda'_i V[U(y_i)] + A_{ii} V(\lambda'_i) U(y_i) + C_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i} + \sum_2^n [C_s - A_{ii} V(\lambda_s)] \frac{\partial y_i}{\partial x_s} \\ (i = 2, \dots, n);$$

dalle quali, eliminando  $V[U(y_i)]$ , si ottiene

$$\lambda'_i E_i - E_i = -A_{ii} V(\lambda'_i) U(y_i) \\ + C_i \left( \lambda'_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i} - \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \right) + \sum_2^n [C_s - A_{ii} V(\lambda_s)] \left( \lambda'_i \frac{\partial y_i}{\partial x_s} - \frac{\partial y_i}{\partial x_s} \right).$$

Osservando poi che, in virtù delle (9), si ha

$$\lambda'_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i} - \frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \sum_2^n \lambda_s \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_s} - \lambda'_i \frac{\partial y_i}{\partial x_s} \right),$$

la precedente formula si può cambiare nella seguente :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda'_i E_i - E_i + A_{ii} V(\lambda'_i) U(y_i) \\ = \sum_2^n [C_i \lambda_i - C_i + A_{ii} V(\lambda_i)] \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_i} - \lambda'_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \right) \quad (i = 2, \dots, n). \end{array} \right.$$

Notiamo ora che

$$\frac{\partial \lambda'_i}{\partial x_i} = \sum_1^n \frac{\partial \lambda'_i}{\partial y_r} \frac{\partial y_r}{\partial x_i},$$

e quindi

$$V(\lambda'_i) = \sum_1^n V(y_r) \frac{\partial \lambda'_i}{\partial y_r};$$

ma, essendo

$$V(y_r) = \mu'_r V(y_i),$$

si deduce

$$V(\lambda'_i) = V(y_i) V_i(\lambda'_i),$$

avendo posto

$$\sum_1^n \mu'_r \frac{\partial f}{\partial y_r} = V_i(f), \quad (\mu'_i = 1).$$

Da tutto ciò risulta che

$$A_{ii} V(\lambda'_i) U(y_i) = A_{ii} U(y_i) V(y_i) V_i(\lambda'_i) = B_{ii} V_i(\lambda'_i);$$

per conseguenza la formula (10) diventa :

$$\begin{aligned} & \lambda'_i E_i - E_i + B_{ii} V_i(\lambda'_i) \\ &= \sum_2^n [\lambda_i C_i - C_i + A_{ii} V(\lambda_i)] \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_i} - \lambda'_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

che potremo scrivere più semplicemente sotto la forma

$$(11) \quad I'_i = \sum_2^n I_i \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_i} - \lambda'_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \right) \quad (i = 2, \dots, n),$$

ponendo

$$I_i = A_{ii} V(\lambda_i) + \lambda_i C_i - C_i, \quad I'_i = B_{ii} V_i(\lambda'_i) + \lambda'_i E_i - E_i.$$

Si osservi che  $I'_i$  è formata coi coefficienti dell'equazione trasformata nello stesso modo come  $I_i$  è formata con quelli della proposta.

Le formule (11) sono quelle alle quali volevamo giungere. Esse dimostrano che le espressioni  $I_i$  formano un sistema di  $n - 1$  invarianti simultanei della equazione data. Il determinante

$$D = \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_i} - \lambda'_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \right|$$



dell'ordine  $n - 1$  è diverso da zero. Infatti, sviluppandolo convenientemente e ordinandolo secondo le  $\lambda'$ , si trova

$$D = \frac{\partial(y_2, y_3, \dots, y_n)}{\partial(x_2, x_3, \dots, x_n)} - \lambda'_2 \frac{\partial(y_1, y_3, \dots, y_n)}{\partial(x_2, x_3, \dots, x_n)} - \lambda'_3 \frac{\partial(y_1, y_2, y_4, \dots, y_n)}{\partial(x_2, \dots, x_n)} - \text{ecc.}$$

Tenendo poi conto delle (9), e sostituendo al simbolo  $U(f)$  la sua espressione, si ottiene infine, dopo facili riduzioni,

$$D = \frac{1}{U(y_1)} \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)};$$

ciò che dimostra l'asserto.

Si ottiene un secondo sistema d'invarianti simultanei scambiando le  $\lambda$  con le  $\mu$ . Essi hanno quindi l'espressione

$$J_s = A_{11} U(\mu_s) + \mu_s C_1 - C_s \quad (s = 2, \dots, n).$$

Per le equazioni a due variabili, questo doppio sistema d'invarianti simultanei si riduce ai due invarianti che si trovano calcolati nella mia Nota menzionata.

Dalle cose dette risulta facilmente che l'equazione data si può scrivere nei due modi seguenti:

$$A_{11} V[U(Z)] + C_1 U(Z) - \sum_2^n I_s \frac{\partial Z}{\partial x_s} + NZ = 0$$

e

$$A_{11} U[V(Z)] + C_1 V(Z) - \sum_2^n J_s \frac{\partial Z}{\partial x_s} + NZ = 0.$$

Per conseguenza se  $N = 0$ , e gl'invarianti di un sistema sono nulli, l'integrazione dell'equazione data si riduce subito all'integrazione successiva di due equazioni lineari del 1° ordine.

P. BURGATTI.