

**VI. Mathematische Theorie
der transversalen Schwingungen eines Stabes
von veränderlichem Querschnitt;
von F. Meyer zur Capellen.**

§ 1. Einleitung.

Von G. Kirchhoff¹⁾ sind die Transversalschwingungen eines unendlich dünnen, ursprünglich geraden, homogenen Stabes untersucht worden, der der Breite nach von zwei parallelen Ebenen, der Dicke nach von zwei Ebenen begrenzt ist, welche einen sehr kleinen Winkel miteinander bilden. Hierzu sind von F. Vogel²⁾ einige weitere Ausführungen gemacht und Versuche angestellt worden.

Denkt man sich durch diesen Stab eine Querschnittsebene gelegt, welche die gegeneinander convergirenden Begrenzungsebenen senkrecht durchschneidet, so ist der Querschnitt ein Dreieck, und die Transversalschwingungen des Stabes, welche von G. Kirchhoff und F. Vogel behandelt werden, sind die Vibrationen parallel zur Ebene des Dreiecks. Es scheint nun nicht uninteressant, auch diejenigen Schwingungen zu untersuchen, bei welchen der Stab senkrecht zur Ebene des dreieckigen Querschnittes vibriert. Der Stab, welcher in Folgendem betrachtet werden soll, sei also der Dicke nach von zwei parallelen Ebenen, der Breite nach von zwei Ebenen begrenzt, welche einen sehr kleinen Winkel miteinander bilden.

§ 2. Aufstellung der Differentialgleichung.

Die allgemeine Differentialgleichung ist bekannt³⁾ und leicht mit Hülfe des Hamilton'schen Principes abzuleiten

Es soll die z -Axe mit der Hauptaxe des Stabes zusammenfallen, die durch die Schwerpunkte der Querschnitte geht,

1) G. Kirchhoff, Wied. Ann. 10. p. 501. 1880.

2) F. Vogel, Transversalschwingungen eines keilförmigen Stabes, Inauguraldissertation, Berlin 1881.

3) Rayleigh, Theorie des Schalles. 1. p. 275.

und die Schwingungen sollen parallel der y -Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystemes vor sich gehen.

Wenn dann an den Enden keine Kräfte wirken, welche Arbeit leisten, so ergibt sich¹⁾ als Differentialgleichung der Bewegung, welche für alle Punkte des Stabes erfüllt sein muss:

$$(1) \quad \mu q \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -E \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\kappa \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right),$$

und als Bedingungen für jedes Ende:

$$(2) \quad \kappa \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \delta \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \delta \eta = 0.$$

Hierbei ist μ die Dichtigkeit und E der Elasticitätscoëfficient des Materials, aus welchem der Stab besteht, q die Fläche des Querschnittes, also μq die Masse des letzteren, und $\mu \kappa$ bedeutet das Trägheitsmoment desselben in Beziehung auf eine Axe, welche durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und senkrecht zur Biegungsebene steht, und zwar ist:

$$q = \iint dx \cdot dy, \quad \kappa = \iint y^2 \cdot dx \cdot dy,$$

ferner η die Verrückung des Querschnittes zur Zeit t .

Machen wir nun die Voraussetzung, η sei proportional einer harmonischen Function der Zeit, d. h.:

$$\eta = u \cdot \cos \lambda t,$$

wo u eine Function von z allein bedeutet, so geht die Bewegungsgleichung über in:

$$(4) \quad q \cdot \mu \lambda^2 u = E \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left(\kappa \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} \right).$$

Die Entfernung der beiden parallelen Ebenen von der z -Axe sei $y = \pm h$ und die variable Breite am festen Ende $2b$. Legt man dann den Coordinatenanfangspunkt in die Spitze des Stabes, so ist:

$$q = 4h \cdot \frac{bz}{l}, \quad \kappa = \frac{4h^3}{3} \cdot \frac{bz}{l}.$$

1) Siehe Kirchhoff, l. c.

Durch Einsetzen dieser Werthe wird Gl. (4), wenn wir noch:

$$\frac{3\mu\lambda^2}{h^2E} = a^4 \quad \text{und} \quad za = z'$$

setzen:

$$(I) \quad z'u = \frac{d^2}{dz'^2} \left(z' \frac{d^2u}{dz'^2} \right).$$

§ 3. Lösung der Differentialgleichung.

Um die Differentialgleichung (I) zu lösen, setze man:

$$u = Az'^\alpha + Bz'^\beta + Cz'^\gamma + Dz'^\delta + \dots,$$

wo: $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \dots$

Es muss dann zufolge der Differentialgleichung sein:

$$\begin{aligned} & \alpha(\alpha-1)^2(\alpha-2)Az'^{\alpha-3} + \beta(\beta-1)^2(\beta-2)Bz'^{\beta-3} \\ & + \gamma(\gamma-1)^2(\gamma-2)Cz'^{\gamma-3} + \dots \\ & + \dots - Az'^{\alpha+1} - Bz'^{\beta+1} - Cz'^{\gamma+1} - \dots = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} & \alpha(\alpha-1)^2(\alpha-2) = 0, \\ & \beta-3 = \alpha+1; \quad \beta(\beta-1)^2(\beta-2)B - A = 0, \\ & \gamma-3 = \beta+1; \quad \gamma(\gamma-1)^2(\gamma-2)C - B = 0, \\ & \delta-3 = \gamma+1; \quad \delta(\delta-1)^2(\delta-2)D - C = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Es ist demnach, wenn die willkürliche Constante A weggelassen wird:

$$\begin{aligned} u = z'^\alpha + & \frac{z'^{\alpha+4}}{(\alpha+4)(\alpha+3)^2(\alpha+2)} \\ & + \frac{z'^{\alpha+8}}{(\alpha+8)(\alpha+7)^2(\alpha+6)(\alpha+4)(\alpha+3)^2(\alpha+2)} + \dots \end{aligned}$$

Für diejenigen Functionen u , welche unserer Differentialgleichung genügen sollen, bestimmt sich die Grösse α aus der Gleichung:

$$\alpha(\alpha-1)^2(\alpha-2) = 0,$$

welche drei voneinander verschiedene Lösungen hat, nämlich:

$$\alpha = 0; \quad \alpha = 1; \quad \alpha = 2.$$

Die Wurzel $\alpha = 1$ ist eine Doppelwurzel; daher erhält man zunächst drei particuläre Integrale.

Diese sind:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u_1 &= 1 + \frac{z'^4}{4 \cdot 3^2 \cdot 2} + \frac{z'^8}{8 \cdot 7^2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 2} + \frac{z'^{12}}{12 \cdot 11^2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 7^2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 2} + \dots, \\
 (2) \quad u_2 &= z' + \frac{z'^5}{5 \cdot 4^2 \cdot 3} + \frac{z'^9}{9 \cdot 8^2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4^2 \cdot 3} + \frac{z'^{13}}{13 \cdot 12^2 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8^2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4^2 \cdot 3} + \dots, \\
 (3) \quad u_3 &= z'^2 + \frac{z'^6}{6 \cdot 5^2 \cdot 4} + \frac{z'^{10}}{10 \cdot 9^2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5^2 \cdot 4} + \frac{z'^{14}}{14 \cdot 13^2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 9^2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5^2 \cdot 4} + \dots
 \end{aligned}$$

Ein viertes Integral, entsprechend der doppelten Wurzel $\alpha = 1$, findet man, wenn man auf u für $\alpha = 1$ folgende Betrachtung anwendet:

Führt man in die Differentialgleichung für u den Differentialquotienten von u nach α ein, so erhält man dasselbe Resultat, als ob man die Gleichung nach α differenzirt, d. h. es muss auch $du/d\alpha$ eine Lösung sein. Die Ausführung der angedeuteten Differentiation ergibt:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{d\alpha} &= u \cdot \log z' - \left\{ \frac{z'^{\alpha+4}}{(u+4)(\alpha+3)^2(\alpha+2)} \left(\frac{1}{\alpha+4} + \frac{2}{\alpha+3} + \frac{1}{\alpha+2} \right) \right. \\
 &\quad + \frac{z'^{\alpha+8}}{(u+8)(u+7)^2(\alpha+6)(\alpha+4)(\alpha+3)^2(\alpha+2)} \\
 &\quad \left. \left(\frac{1}{\alpha+4} + \frac{2}{\alpha+3} + \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+8} + \frac{2}{\alpha+7} + \frac{1}{\alpha+6} \right) + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Also ist für $\alpha = 1$:

$$(4) \quad u_4 = u_2 \cdot \log z' - \left\{ \frac{z'^5 \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{4^2} + \frac{1}{3} \right)}{5 \cdot 4^2 \cdot 3} + \frac{z'^9 \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{8^2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{2}{8} + \frac{1}{7} \right)}{9 \cdot 8^2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4^2 \cdot 3} + \dots \right\}.$$

Dieses Integral ist indessen auszuschliessen, weil es für $z' = 0$ unendlich gross wird.

Daher ist das zu betrachtende Integral der Differentialgleichung:

$$(II) \quad u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3,$$

wo C_1 , C_2 und C_3 willkürliche Constanten bedeuten.

§ 4. Berechnung der Schwingungszahlen der Partialtöne.

Da der Stab an seinem dünnen Ende frei ist, so gelten die Bedingungen, dass für $z = 0$:

$$(III) \quad z' \cdot \frac{d^2 u}{dz'^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dz'} \left(z' \cdot \frac{d^2 u}{dz'^2} \right) = 0.$$

Setzt man nun in dem Ausdrücke für:

$$C_1 \cdot z' \cdot \frac{d^2 u_1}{dz'^2} + C_2 \cdot z' \cdot \frac{d^2 u_2}{dz'^2} + C_3 \cdot z' \cdot \frac{d^2 u_3}{dz'^2}$$

$z = 0$, so wird die erste Bedingung (III) erfüllt.

Bildet man nunmehr:

$$C_1 \cdot \frac{d}{dz} \left(z' \cdot \frac{d^2 u_1}{dz'^2} \right) + C_2 \cdot \frac{d}{dz} \left(z' \cdot \frac{d^2 u_2}{dz'^2} \right) + C_3 \cdot \frac{d}{dz} \left(z' \cdot \frac{d^2 u_3}{dz'^2} \right)$$

und setzt $z = 0$, so verschwinden die zwei ersten Glieder, während das dritte nicht verschwindet, weshalb sein muss:

$$C_3 = 0.$$

So reducirt sich das allgemeine Integral auf:

$$(IV) \quad u = C_1 u_1 + C_2 u_2.$$

Das zweite Ende soll so befestigt sein, dass für dasselbe ist:

$$(V) \quad u = 0 \quad \text{und} \quad \frac{du}{dz} = 0.$$

Es finden daher für dasselbe folgende Bedingungen statt:

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 = 0, \quad C_1 \cdot \frac{du_1}{dz'} + C_2 \cdot \frac{du_2}{dz'} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$(VI) \quad u_1 \cdot \frac{du_2}{dz'} - u_2 \cdot \frac{du_1}{dz'} = 0.$$

Setzt man die verschiedenen Reihen ein, so gelangt man zu folgender Gleichung:

$$(VII) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{1^2}{4!2!} z'^4 + \frac{(1.5)^2}{8!4!} z'^8 - \frac{(1.5.9)^2}{12!6!} z'^{12} \\ &\quad + \frac{(1.5.9.13)^2}{16!8!} z'^{16} - \dots \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung hat unendlich viele Wurzeln z' , welche nach der Bedeutung von z' in dieser Gleichung die Tönhöhen der Partialschwingungen bestimmen. Die ersten sechs Wurzeln habe ich zunächst mit Hülfe der gebräuchlichen Näherungsmethoden berechnet und gefunden:

$$\begin{array}{ll} z_1' = 2.6752; & z_5' = 14.9495; \\ z_2' = 5.5715; & z_6' = 18.0830; \\ z_3' = 8.6798; & - - - - - \\ z_4' = 11.8126; & - - - - - \end{array}$$

Die Differenz zweier aufeinander folgender Wurzeln nähert sich augenscheinlich dem Werth π .

Da die Bedingungen (V) für $z = l$ angewandt sind, so ist $z' = al$. Es entspricht also jeder Wurzel z' ein anderes

a , da l constant und gegeben ist, a aber ist durch § 2 bestimmt. Es ist:

$$z_n' = a_n l, \quad a_n^4 = \frac{3\mu\lambda_n^2}{h^2 \cdot E}.$$

Hieraus folgt:

$$(VIII) \quad \lambda_n = z_n'^2 \cdot \frac{h}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{3\mu}}.$$

Die Schwingungszahl eines Theiltones ist demnach der Dicke direct, dem Quadrat der Länge umgekehrt proportional, dagegen unabhängig von der Breite des Stabes am befestigten Ende.

Der Grundton hat also die Schwingungszahl:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (2,6752)^2 \cdot \frac{h}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{3\mu}}, \\ &= 7,156 \cdot \frac{h}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{3\mu}}, \end{aligned}$$

während bei dem in der anderen Ebene schwingenden — keilförmigen — Stabe:

$$\lambda_1 = 5,315 \cdot \frac{h}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{3\mu}}$$

und beim parallelepipedischen:

$$\lambda_1 = 3,516 \cdot \frac{h}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{3\mu}} \quad \text{ist.}^1)$$

Man sieht, dass bei gleichen Werthen von h und l der Grundton des in Untersuchung stehenden Stabes annähernd die Quarte von dem des keilförmigen und die Octave von dem Grundton des parallelepipedischen Stabes ist, sie verhalten sich annähernd wie

$$4:3:2.$$

§ 5. Lage der Knotenpunkte.

In den Knotenpunkten muss sein:

$$u = 0, \text{ d. h. } 0 = C_1 u_1 + C_2 u_2.$$

Bezeichnet man die Werthe von u_1 und u_2 für $z' = z_n'$ mit $u_1^{(n)}$ und $u_2^{(n)}$, so bestimmt sich das Verhältniss der Constanten C_1 und C_2 aus der identischen Gleichung:

$$0 = C_1 u_1^{(n)} + C_2 u_2^{(n)}.$$

1) G. Kirchhoff, l. c.

Man findet daher zur Bestimmung der Lage der Knotenpunkte des n . Partialtones die Gleichung:

$$\text{IX)} \quad o = u_1 \cdot u_2^{(n)} - u_2 \cdot u_1^{(n)},$$

aus der die Wurzeln zu berechnen sind, welche zwischen o und z'_n liegen. Nennt man diese Wurzeln

$$z_n'^{(m)},$$

so ist der zugehörige Werth von z bestimmt durch:

$$z = \frac{z_n'^{(m)}}{z_n} l.$$

Man sieht hieraus, dass die Lage der Knotenpunkte nur von der Ordnung des Tones und der Länge des Stabes abhängt. Es ist:

$u_1^{(1)} = 1,7269;$	$u_2^{(1)} = 3,2535;$
$u_1^{(2)} = 20,2368;$	$u_2^{(2)} = 33,5404;$
$u_1^{(3)} = 353,1895;$	$u_2^{(3)} = 589,7552;$
$u_1^{(4)} = 6858,7606;$	$u_2^{(4)} = 11448,8459;$
$u_1^{(5)} = 139\,412,0587;$	$u_2^{(5)} = 232\,714,2454;$
$u_1^{(6)} = 2\,896\,272,7419;$	$u_2^{(6)} = 4\,834\,613,8111;$

Gleichung IX) ergibt für den Grundton keine Wurzel, kleiner als z_1' , also erfolgt die Grundschiwingung ohne Knoten. Für den zweiten Ton findet man eine Wurzel kleiner als z_2' , welche also einen Knotenpunkt ergibt, und entsprechend hat der m . Theilton ($m-1$) Knotenstellen.

Die Wurzeln sind für die verschiedenen Theiltöne:

$$\begin{aligned} &= 1,8332; \\ &= 1,8542; \quad z_3'^{(2)} = 4,7694; \\ &= 1,8524; \quad z_4'^{(2)} = 4,7848; \quad z_4'^{(3)} = 7,8862; \\ &= 1,8525; \quad z_5'^{(2)} = 4,7842; \quad z_5'^{(3)} = 7,9016; \quad z_5'^{(4)} = 11,0094; \\ &= 1,8525; \quad z_6'^{(2)} = 4,7843; \quad z_6'^{(3)} = 7,9013; \quad z_6'^{(4)} = 11,0371; \quad z_6'^{(5)} = 13,9780. \\ &\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{aligned}$$

Es folgt aus dieser Uebersicht, dass sich die Wurzeln $z_n'^{(m)}$ constanten Werthen nähern. Beachtet man dies, so ergibt die Gleichung für die Entfernung z eines Knotenpunktes vom freien Ende, dass die Abstände der ersten Knotenpunkte vom Nullpunkte bei zwei Tönen nahezu den Quadratwurzeln aus ihren Schwingungszahlen umgekehrt proportional sind, ebenso der zweiten u. s. f.

§ 6. Vergleichung des betrachteten Stabes mit einem Kreissector von sehr kleinem Winkel.

Man kann den Stab betrachten als einen Kreissector von sehr kleinem Winkel, dessen Bogen also unendlich klein gegen den Radius ist. Es müssen dann bei den höheren Tönen Schwingungszahlen und Lage der Knotenpunkte des Sectors nahezu übereinstimmen mit denen des prismatischen Stabes.

Es lautet die allgemeine Differentialgleichung für Platten in Polarcoordinaten:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \pm k^2 \right) w_n = 0. ^{1)}$$

Hierin nimmt r die Stelle von z , w von u ein, und k wird gleich a , wenn man das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation gleich Null setzt.

In dem Falle, dass die Schwingungen symmetrisch um den Mittelpunkt der Platte stattfinden, wird $n = 0$. Daher wird die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{du}{dz} \pm a^2 u = 0.$$

Setzt man wieder, wie in § 2:

$$za = z',$$

so geht dies über in:

$$(X.) \quad \frac{d^2 u}{dz'^2} + \frac{1}{z'} \cdot \frac{du}{dz'} \pm u = 0.$$

Als Lösung ergibt sich für die obere Gleichung mit dem positiven Zeichen die Bessel'sche Function $J_0(z')$ und für die untere mit dem negativen Zeichen $J_0(iz')$, während die beiden anderen Lösungen ebenso wie bei den Schwingungen von kreisförmigen Scheiben ausgeschlossen werden müssen, zufolge der Bedingung, dass für $z = 0$ die Schwingung frei ist.

Nennen wir der Analogie wegen die erstere Function u_2 und die zweite u_1 , sodass ist:

$$u_1 = 1 + \frac{z'^2}{2^2} + \frac{z'^4}{(2 \cdot 4)^2} + \frac{z'^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots$$

$$u_2 = 1 - \frac{z'^2}{2^2} + \frac{z'^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{z'^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots$$

1) Rayleigh 1. p. 395.

Alsdann ist:

$$(XI.) \quad u = C_1 u_1 + C_2 u_2.$$

Da der den Sector begrenzende Bogen fest ist, so gelten für $z = l$ die Bedingungen (V), d. h. es ist:

$$0 = C_1 u_1 + C_2 u_2 \text{ und } 0 = C_1 \cdot \frac{du_1}{dz} + C_2 \cdot \frac{du_2}{dz},$$

woraus, analog (VI), folgt:

$$(XII.) \quad u_2 \cdot \frac{du_1}{dz} - u_1 \cdot \frac{du_2}{dz} = 0.$$

Nun folgt aus den Reihen für u_1 und u_2 , dass sein muss:

$$u_2 \cdot \frac{du_1}{dz} - u_1 \cdot \frac{du_2}{dz} = z' + A_1 \cdot z'^5 + A_2 z'^9 + A_3 \cdot z'^{13} + \dots$$

Zur Bestimmung der Coëfficienten A_1, A_2 etc. kann man aber eine Differentialgleichung vierter Ordnung aufstellen. Nach (X) ist:

$$\frac{d^2 u_1}{dz'^2} + \frac{1}{z'} \cdot \frac{du_1}{dz'} - u_1 = 0$$

$$\text{und } \frac{d^2 u_2}{dz'^2} + \frac{1}{z'} \cdot \frac{du_2}{dz'} + u_2 = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichungen

$$\text{mit } \frac{du_2}{dz'} \text{ und } u_2 \text{ oder } u_2$$

$$\frac{du_1}{dz'} \quad u_1 \quad - u_1$$

und addirt sie jedesmal, so findet man:

$$a) \quad u_2 \cdot \frac{du_1}{dz'} - u_1 \cdot \frac{du_2}{dz'} = -\frac{1}{z'^2} \cdot \frac{d}{dz'} z'^2 \cdot \frac{du_1}{dz'} \cdot \frac{du_2}{dz'},$$

$$b) \quad z' \left(u_2 \cdot \frac{d^2 u_1}{dz'^2} + u_1 \cdot \frac{d^2 u_2}{dz'^2} \right) + \frac{d}{dz'} (u_1 \cdot u_2) = 0,$$

$$c) \quad 2 u_1 \cdot u_2 = \frac{1}{z'} \cdot \frac{d}{dz'} z' \cdot \left(u_2 \cdot \frac{du_1}{dz'} - u_1 \frac{du_2}{dz'} \right).$$

Mit Hülfe der identischen Gleichung:

$$\frac{d^2}{dz'^2} (u_1 \cdot u_2) = u_2 \cdot \frac{d^2 u_1}{dz'^2} + u_1 \cdot \frac{d^2 u_2}{dz'^2} + 2 \frac{du_1}{dz'} \cdot \frac{du_2}{dz'}$$

kann man (b) transformiren in:

$$\frac{du_1}{dz'} \cdot \frac{du_2}{dz'} = \frac{1}{2z'} \cdot \frac{d}{dz'} z' \cdot \frac{d}{dz'} (u_1 \cdot u_2).$$

Mit Rücksicht hierauf und auf Gl. (c) wird schliesslich (a):

$$u_2 \cdot \frac{du_1}{dz'} - u_1 \cdot \frac{du_2}{dz'} \\ = -\frac{1}{4z'^2} \cdot \frac{d}{dz'} z' \cdot \frac{d}{dz'} z' \cdot \frac{d}{dz'} \frac{1}{z'} \cdot \frac{d}{dz'} z' \cdot \left(u_2 \cdot \frac{du_1}{dz'} - u_1 \cdot \frac{du_2}{dz'} \right).$$

Durch Einsetzen der Reihe erhält man:

$$u_2 \cdot \frac{du_1}{dz'} - u_1 \cdot \frac{du_2}{dz'} = z' - \frac{1}{(2.4)2^2.3} z'^5 + \frac{1}{(2.4.6.8)(2.4)^2.5} z'^9 - \dots$$

So wird die Gleichung zur Bestimmung der möglichen Tonhöhen:

$$(XIII) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{1}{(2.4)2^2.3} z'^4 + \frac{1}{(2.4.6.8)(2.4)^2.5} z'^8 \\ &\quad - \frac{1}{(2.4.6.8.10.12)(2.4.6)^2.7} z'^{12} + \dots \end{aligned} \right.$$

Als die ersten sechs Wurzeln dieser Gleichung fand ich

$$\begin{array}{l|l} z_1' = 3,1962; & z_5' = 15,7080; \\ z_2' = 6,3065; & z_6' = 18,8496; \\ z_3' = 9,4391; & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ z_4' = 12,5664; & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

Man sieht, dass die Differenz zweier aufeinander folgenden Wurzeln wie in § 4 gegen π convergirt. Auch hier ist:

$$z_n' = a_n l, \quad a^2 = \frac{\lambda_n}{h} \cdot \sqrt{\frac{E}{3\mu}},$$

und entsprechend der Gl. (VIII) in § 4:

$$(XIV) \quad \lambda_n = z_n'^2 \cdot \frac{h}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{3\mu}}.$$

Demnach ergeben sich alle Töne des Sectors etwas höher, als beim prismatischen Stabe. Es ist das ein auf den ersten Blick auffallendes Resultat; wir werden am Schluss der Abhandlung näher darauf eingehen.

Was die Lage der Knotenpunkte anbetrifft, so findet für diese, analog (IX), die Gleichung statt:

$$(XV) \quad 0 = u_1 \cdot u_2^{(n)} - u_2 \cdot u_1^{(n)},$$

wenn man mit $u_2^{(n)}$ und $u_1^{(n)}$ die Werthe von u_2 und u_1 für z_n' bezeichnet.

Nennt man, wie oben, die Wurzeln der Gl. (XV) $z_n'^{(m)}$,

so ist der zugehörige Werth von z , welches die Entfernung eines Knotenpunktes vom freien Ende angibt:

$$z = \frac{z_n^{(m)}}{z_n} l.$$

Es ist:

$u_1^{(1)} = 5,7292;$	$u_2^{(1)} = -0,3192;$
$u_1^{(2)} = 88,9903;$	$u_2^{(2)} = +0,2252;$
$u_1^{(3)} = 1655,3537;$	$u_2^{(3)} = -0,1838;$
$u_1^{(4)} = 32605,3719;$	$u_2^{(4)} = +0,1574;$
$u_1^{(5)} = 673\,409,1768;$	$u_2^{(5)} = -0,1768;$
$u_1^{(6)} = 14\,205\,189,3803;$	$u_2^{(6)} = +0,1325;$

Als Wurzeln von Gl. (XV) findet man:

$$\begin{aligned} (1) &= 2,3906; \\ (1) &= 2,4055; \quad z_3^{(2)} = 5,5061; \\ (1) &= 2,4048; \quad z_4^{(2)} = 5,5206; \quad z_4^{(1)} = 8,6397; \\ (1) &= 2,4048; \quad z_5^{(2)} = 5,5201; \quad z_5^{(3)} = 8,6543; \quad z_5^{(4)} = 11,7798; \\ (1) &= 2,4048; \quad z_6^{(2)} = 5,5201; \quad z_6^{(3)} = 8,6540; \quad z_6^{(4)} = 11,7926; \quad z_6^{(5)} = 14,9310; \\ & \text{---} \quad \text{---} \end{aligned}$$

Auch hier ist es augenscheinlich, dass sich die Wurzeln constanten Grössen nähern.

Zieht man in Betracht, dass u_1 und u_2 die Bessel'schen Functionen $J_0(iz')$ und $J_0(z')$ sind, und daher die Relationen stattfinden:

$$J_0'(z') = -J_1(z'); \quad J_0'(iz') = \frac{1}{i} J_1(iz'),$$

so kann man Gl. (XII) schreiben:

$$0 = \frac{J_0(z')}{J_1(z')} + i \cdot \frac{J_0(iz')}{J_1(iz')}.$$

Entwickelt man diese Functionen nach fallenden Potenzen von z' , so ist¹⁾:

$$\begin{aligned} J_0(z') &= \sqrt{\frac{2}{\pi z'}} \left\{ \left(1 - \frac{(1 \cdot 3)^2}{1 \cdot 2 (8z')^2} + \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 (8z')^4} - \dots \right) \cos \left(z' - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1^2}{1 \cdot 8z'} - \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 (8z')^3} + \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 (8z')^5} - \dots \right) \sin \left(z' - \frac{\pi}{4} \right) \right\}. \end{aligned}$$

1) Siehe E. Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen. p. 8 u. 57.

$$\begin{aligned}
J_1(z') &= \sqrt{\frac{2}{\pi z'}} \left\{ \left(1 + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2 (8z')^2} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 (8z')^4} + \dots \right) \sin\left(z' - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{8z'} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 (8z')^3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 (8z')^5} - \dots \right) \cos\left(z' - \frac{\pi}{4}\right) \right\}, \\
J_0(iz') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{z'}}{\sqrt{z'}} \left\{ 1 + \frac{1^2}{1 \cdot 8z'} + \frac{(1 \cdot 3)^2}{1 \cdot 2 (8z')^2} + \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 (8z')^3} + \dots \right\}, \\
J_1(iz') &= i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{z'}}{\sqrt{z'}} \left\{ 1 - \frac{3}{8z'} - \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2 (8z')^2} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 (8z')^3} - \dots \right\}.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in Gl. (XII) erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\operatorname{tg}\left(z' - \frac{\pi}{4}\right) = - \frac{1 + \frac{a_1}{8z'} + \frac{a_2}{(8z')^2} + \frac{a_3}{(8z')^3} + \frac{a_4}{(8z')^4} + \dots}{1 + \frac{b_1}{8z'} + \frac{b_2}{(8z')^2} + \frac{b_3}{(8z')^3} + \frac{b_4}{(8z')^4} + \dots},$$

in welcher a und b gewisse Constanten bezeichnen.

Die rechte Seite nähert sich für sehr grosse z' der Grenze -1 . Es wird alsdann:

$$\operatorname{tg}\left(z' - \frac{\pi}{4}\right) = -1, \quad \text{d. h.} \quad z'_n = \pi \cdot n,$$

wo für n der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, ... zu setzen sind.

Für die höheren Töne sind demnach die Schwingungszahlen den Quadraten der aufeinander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe proportional. Schon von der vierten Wurzel an stimmen beim Sector die durch Rechnung gefundenen Werthe mit den Näherungswerthen bis zur fünften Decimale überein, denn es ist:

$$4\pi = 12,5664 = z'_4.$$

Auch beim prismatischen Stabe befolgen die Schwingungszahlen mit sehr hoher Ordnungszahl des Tones immer mehr dies Gesetz, obwohl bis zum sechsten Theiltone die Berechnung einer Tonhöhe und eines Tonintervalles nach der Näherungsformel:

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 \cdot \frac{h}{l} \cdot \sqrt{\frac{E}{3\mu}}$$

noch eine nur rohe Annäherung an den wahren Werth ergibt. Es ist z. B. nach § 4:

$$\frac{z'_6}{z'_5} = 1,463, \quad \text{während} \quad \frac{6^2}{5^2} = 1,44 \text{ ist.}$$

Die Gl. (XV) zur Berechnung der Lage der Knotenpunkte kann man auch schreiben:

$$0 = u_1 \cdot \frac{u_2^{(n)}}{u_1^{(n)}} - u_2.$$

Der Factor $u_2^{(n)}/u_1^{(n)}$ wird nun für grosse z_n' sehr klein; so ist z. B.:

$$\frac{u_2^{(6)}}{u_1^{(6)}} = 0,000\,000\,009 \dots$$

Es müssen daher für sehr grosse z_n' die Wurzeln der Gl. (XV) annähernd übereinstimmen mit den Wurzeln der Gleichung: $J_0(z') = 0$.

Näherungsweise sind also, wie in § 5, die Entfernungen der ersten Knotenpunkte zweier Töne vom Nullpunkte den Quadratwurzeln aus ihren Schwingungszahlen umgekehrt proportional, ebenso der zweiten u. s. f. Es ist, wenn $z'^{(n)}$ die n . Wurzel der Gleichung $J_0(z') = 0$ bezeichnet:

$$\begin{array}{l} z_2'^{(1)} = z_3'^{(1)} = \dots = z_n'^{(1)} = z'^{(1)}, \\ z_3'^{(2)} = z_4'^{(2)} = \dots = z_n'^{(2)} = z'^{(2)}, \\ \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \end{array}$$

Die Wurzeln der Gleichung $J_0(z') = 0$ entnehmen wir einer von Stokes angegebenen Formel.¹⁾ Diese sind:

$$\begin{array}{l|l} z'^{(1)} = 2,4048; & z'^{(5)} = 14,9311; \\ z'^{(2)} = 5,5201; & \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \\ z'^{(3)} = 8,6540; & z'^{(m)} = \frac{\pi}{4} (4m - 1). \\ z'^{(4)} = 11,7926; & \end{array}$$

Diesen letzteren Näherungswerth findet man folgendermassen:

$J_0(z')$ kann geschrieben werden:

$$J_0(z') = \frac{1}{\sqrt{\pi z'}} \left\{ \left(1 - \frac{(1.3)^2}{1.2 \cdot (8z')^2} + \frac{(1.3.5.7)^2}{1.2.3.4 \cdot (8z')^4} - \dots \right) (\cos z' + \sin z') \right. \\ \left. + \left(\frac{1^2}{1.8z'} - \frac{(1.3.5)^2}{1.2.3 \cdot (8z')^3} + \frac{(1.3.5.7.9)^2}{1.2.3.4.5 \cdot (8z')^5} - \dots \right) (\sin z' - \cos z') \right\}.$$

Setzt man dies gleich Null, so folgt:

$$\operatorname{tg} z' = - \frac{1 - \frac{1^2}{1.8z'} - \frac{(1.3)^2}{1.2 \cdot (8z')^3} + \frac{(1.3.5)^2}{1.2.3 \cdot (8z')^5} + \frac{(1.3.5.7)^2}{1.2.3.4 \cdot (8z')^7} - \dots}{1 + \frac{1^2}{1.8z'} - \frac{(1.3)^2}{1.2 \cdot (8z')^3} - \frac{(1.3.5)^2}{1.2.3 \cdot (8z')^5} + \frac{(1.3.5.7)^2}{1.2.3.4 \cdot (8z')^7} + \dots}.$$

1) cf. Lord Rayleigh, Theorie des Schalles. 1. p. 363. 1880.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXIII.

Für sehr grosse z' convergirt die rechte Seite gegen -1 , d. h. es wird:

$$\operatorname{tg} z' = -1 \quad \text{und} \quad z' = \frac{\pi}{4}(4m - 1),$$

wo für m die Zahlen 1, 2, 3, 4, zu setzen sind.

Demnach ist der zum m . Knotenpunkte des n . Partialtones gehörige Werth von z annähernd:

$$z = \frac{4m - 1}{4n} l.$$

§ 7. Schlussbetrachtung.

Ich möchte noch zur Vergleichung die Werthe von z , welche zu den Knotenpunkten der Partialtöne gehören, sowohl für den prismatischen Stab wie für den Sector zusammenstellen, hierbei $l = 1$ angenommen.

Werthe von z für die Knotenpunkte des prismatischen Stabes.

Oberton	1. Knoten	2. Knoten	3. Knoten	4. Knoten	5. Knoten	
1.	—	—	—	—	—	
2.	0,3290	—	—	—	—	
3.	0,2136	0,5495	—	—	—	
4.	0,1568	0,4051	0,6676	—	—	
5.	0,1239	0,3200	0,5286	0,7363	—	
6.	0,1024	0,2646	0,4369	0,6104	0,7730	

Werthe von z für die Knotenpunkte des Sectors.

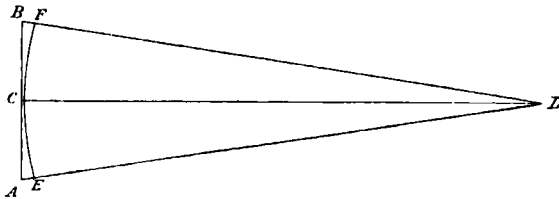
Oberton	1. Knoten	2. Knoten	3. Knoten	4. Knoten	5. Knoten	m . Knoten
1.	—	—	—	—	—	—
2.	0,3791	—	—	—	—	—
3.	0,2548	0,5833	—	—	—	—
4.	0,1914	0,4393	0,6875	—	—	—
5.	0,1531	0,3514	0,5509	0,7499	—	—
6.	0,1276	0,2929	0,4591	0,6256	0,7921	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
n .	<u>2,4048</u>	<u>5,5201</u>	<u>8,6540</u>	<u>11,9726</u>	<u>14,9312</u>	<u>$4m - 1$</u>
	$\pi \cdot n$	$\pi \cdot n$	$\pi \cdot n$	$\pi \cdot n$	$\pi \cdot n$	$4n$

Es ist aus diesen Tabellen ersichtlich, dass die Lage der Knotenpunkte des prismatischen Stabes auch bei hoher Ordnung des Tones keineswegs mit der des Sectorstabes zusammenfällt. Wenn der Stab an der Einklemmungsstelle

durch einen Kreis vom Radius l begrenzt wird, so liegen die Knoten sämtlich dem festen Ende näher, als wenn er ein Dreieck von der Höhe l bildet.

Wir haben gesehen, dass der Kreissector von unendlich kleinem Winkel, von dem man meinen sollte, dass er dieselben Töne und Knotenlinien ergäbe, wie ein Stab von der Form eines sehr langen, gleichschenkligen Dreieckes, höhere Schwingungszahlen für jeden Einzelton hat, als dieser. Woran liegt es nun, dass nach der Theorie die beiden Stäbe sich ungleich verhalten, während sie in Wirklichkeit doch als gleich betrachtet werden müssen? Dies hat seinen Grund darin, dass die Schwingungsform des Sectors eine andere ist.

Wir haben hier ein sehr interessantes Beispiel für die Anwendung eines von Lord Rayleigh ausgesprochenen Gesetzes.¹⁾ Hier heisst es: Wenn die Kanten festgeklemt sind, so ist eine Entfernung jedes äusseren Theiles mit einer Tonerhöhung verbunden. So findet er auch, dass die Tonhöhe eines regulären Polygons zwischen denen des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises liegt.



Es sei AB die festgekleimte Kante des Dreieckstabs von der Höhe $DC = l$; dann können wir aus diesem die Schwingungen des Sectorstabs erhalten, indem wir eine Gebundenheit einführen, bei der die Kante ECF festgekleimt ist. Die Wirkung der Gebundenheit ist die, die Tonhöhe jeder Componente zu steigern. Der Theil $ABFCE$, der während der Bewegung in Ruhe bleibt, kann dann entfernt werden. Es muss also der Sectorstab DEF höhere Schwingungszahlen der Partialtöne ergeben, als der Dreieckstab DAB .

Dasselbe Princip kann angewandt werden zur Vergleichung des prismatischen Stabes mit dem parallelepipedischen.

1) Lord Rayleigh 1. § 230.

$$\begin{array}{lcl} z'_6 \text{ des Sectors} & = 18,8496 & \\ z'_6 \text{ des prismatischen Stabes} & = 18,0830 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} z'_6 \text{ des Sectors} \\ z'_6 \text{ des prismatischen Stabes} \end{array}} \right\} \text{Diff.} = 0,7666, \\ z'_6 \text{ des parallelepipedischen Stabes} & = 17,2788 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} z'_6 \text{ des Sectors} \\ z'_6 \text{ des parallelepipedischen Stabes} \end{array}} \right\} \text{Diff.} = 0,8042. \end{array}$$

Der Werth von $\pi/4$ aber ist:

$$\frac{\pi}{4} = 0,7854.$$

Demnach wird der Näherungswerth für z'_n der höheren Theiltöne des prismatischen Stabes sein:

$$z'_n = \frac{\pi}{4} (4n - 1).$$

Es ist dann:

$$\begin{array}{lcl} z'_{(n)} \text{ des Sectors} & = \pi \cdot n & \\ z'_{(n)} \text{ des prismatischen Stabes} & = \pi/4 (4n - 1) & \left. \vphantom{\begin{array}{l} z'_{(n)} \text{ des Sectors} \\ z'_{(n)} \text{ des prismatischen Stabes} \end{array}} \right\} \text{Diff.} = \pi/4, \\ z'_{(n)} \text{ des parallelepiped. Stabes} & = \pi/2 (2n - 1) & \left. \vphantom{\begin{array}{l} z'_{(n)} \text{ des Sectors} \\ z'_{(n)} \text{ des parallelepiped. Stabes} \end{array}} \right\} \text{Diff.} = \pi/4. \end{array}$$

Ebenso verhält es sich mit den Grössen $z'_n{}^{(m)}$, d. h. den Wurzeln der Gleichung für die Lage der Knotenpunkte. Auch hier nähern sich die Differenzen zwischen den $z'_n{}^{(m)}$ des Sectors und des prismatischen Stabes einerseits und denen des letzteren und des parallelepipedischen Stabes andererseits dem Werthe $\pi/4$. So ist demnach:

$$\begin{array}{lcl} z'_n{}^{(m)} \text{ des Sectors} & = \pi/4 (4m - 1) & \\ z'_n{}^{(m)} \text{ des prismatischen Stabes} & = \pi/4 (2m - 1) & \left. \vphantom{\begin{array}{l} z'_n{}^{(m)} \text{ des Sectors} \\ z'_n{}^{(m)} \text{ des prismatischen Stabes} \end{array}} \right\} \text{Diff.} = \pi/4. \\ z'_n{}^{(m)} \text{ des parallelepiped. Stabes} & = 4/\pi (2m - 3) & \left. \vphantom{\begin{array}{l} z'_n{}^{(m)} \text{ des Sectors} \\ z'_n{}^{(m)} \text{ des parallelepiped. Stabes} \end{array}} \right\} \text{Diff.} = \pi/4. \end{array}$$

Hiernach ist für den prismatischen Stab der zum m . Knotenpunkte des n . Partialtones gehörige Werth von z , welches die Entfernung des Knotens vom freien Ende angibt:

$$z = \frac{2(2m - 1)}{4n - 1} l.$$

Hiernach ist z. B. für den vierten Knotenpunkt des fünften Partialtones:

$$\begin{array}{l} z = 0,7368 l, \text{ während er in Wirklichkeit ist:} \\ z = 0,7363 l. \end{array}$$

Zur Uebersicht möchte ich die Näherungswerthe von z'_n und $z'_n{}^{(m)}$ der drei Stäbe in einer kleinen Tabelle zusammenstellen:

	z'_n	$z'_{n^{(m)}}$
Sector	$\pi \cdot n$	$\frac{\pi}{4} (4m - 1)$
Prismatischer Stab . .	$\frac{\pi}{4} (4n - 1)$	$\frac{\pi}{2} (2m - 1)$
Parallelepipedischer Stab	$\frac{\pi}{2} (2n - 1)$	$\frac{\pi}{4} (4m - 3)$

Dies merkwürdige Resultat wird sich auch wohl direct beweisen lassen. Jedenfalls aber darf man für den prismatischen Stab für z'_n und $z'_{n^{(m)}}$ obige Näherungswerthe annehmen und hierauf eine Berechnung der ersten Wurzeln, der Gl. (VII) und (IX) gründen, indem man ähnlich wie Lord Rayleigh¹⁾ verfährt und resp. setzt:

$$z'_n = \frac{\pi}{4} (4n - 1) - (-1)^n \alpha,$$

$$z'_{n^{(m)}} = \frac{\pi}{2} (2m - 1) - (-1)^m \beta,$$

und hierin α und β als sehr kleine Grössen behandelt, also ihre Potenzen vernachlässigt.

Zum Schluss möchte ich Hrn. Privatdocent Dr. A. Elsas in Marburg meinen Dank aussprechen, mich zu gegenwärtiger Abhandlung veranlasst zu haben.

VII. *Das Wärmeleitungsvermögen harten und weichen Stahles; von Fr. Kohlrausch.*

(Aus den Sitzungsber. d. Würzburger phys.-med. Ges., vom Dec. 1887, mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Man weiss durch Mousson²⁾, besonders aber durch die eingehende Untersuchung von Barus³⁾, dass das electrische Leitungsvermögen des Stahls von dem Härtezustande abhängt:

1) Lord Rayleigh, Theorie des Schalles. 1. § 174. 1880.

2) Mousson, Neue Denkschr. d. Schweiz. Ges. 14. p. 1. 1855.

3) Barus, Dissert. Würzburg; Wied. Ann. 7. p. 399. 1879.