

SOPRA UNA NUOVA SPECIE DI CONVERGENZA IN MEDIA.

Memoria di **Pia Nalli** (Palermo).

Adunanza del 23 novembre 1913.

Una successione di funzioni, reali o complesse,

$$f_1(s), f_2(s), \dots, f_n(s), \dots$$

integrabili nel senso di LEBESGUE in un intervallo (a, b) , insieme ai quadrati dei loro moduli, si dice convergente in media ¹⁾ verso una funzione $g(s)$, integrabile in (a, b) insieme al quadrato del suo modulo, quando è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |g(s) - f_n(s)|^2 ds = 0.$$

Per questa funzione si avrà

$$\int_a^b |g(s)|^2 ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(s)|^2 ds.$$

Data una successione di funzioni

$$f_1(s), f_2(s), \dots, f_n(s), \dots$$

integrabili in (a, b) insieme ai quadrati dei loro moduli, se è

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_m(s) - f_n(s)|^2 ds = 0,$$

esistono infinite funzioni verso le quali la successione $[f_n(s)]$ converge in media, ma due qualunque di queste funzioni differiscono solamente nei punti di un insieme di misura nulla; in altre parole, se $g(s)$ ed $h(s)$ sono due di tali funzioni, si avrà

$$\int_a^b |g(s) - h(s)|^2 ds = 0.$$

Un caso particolare della convergenza in media è quello in cui si ha

$$f_n(s) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(s),$$

¹⁾ E. FISCHER, *Sur la convergence en moyenne* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXLIV (1^{er} semestre 1907), pp. 1022-1024]; H. WEYL, *Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten* [Mathematische Annalen, t. LXVII (1909), pp. 225-245].

dove $[\varphi_n(s)]$ è una successione di funzioni ortogonale nell'intervallo (a, b) , soddisfacente cioè alle condizioni

$$\int_a^b \varphi_h(s) \overline{\varphi_k(s)} ds = \begin{cases} 0 & (h \neq k) \\ 1 & (h = k), \end{cases}$$

dove $\overline{\varphi_k(s)}$ indica la funzione complessa coniugata di $\varphi_k(s)$.

Il risultato enunciato prende in questo caso la forma particolare seguente ²⁾:

Se $[\varphi_n(s)]$ è una successione di funzioni ortogonale nell'intervallo (a, b) ed $[a_n]$ una successione di costanti tali che la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$$

sia convergente, esiste una funzione $g(s)$, determinata a meno dei punti di un insieme di misura nulla, per la quale si ha:

$$\int_a^b g(s) \overline{\varphi_n(s)} ds = a_n, \quad \int_a^b |g(s)|^2 ds = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2.$$

Il problema che mi son proposto e che ha dato origine al presente lavoro è il seguente:

Data una successione di funzioni, $[f_n(s)]$, integrabili insieme ai quadrati dei loro moduli in ogni intervallo finito, soddisfacenti alle condizioni

$$(\alpha) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_m(s) - f_n(s)|^2 ds \right] = 0,$$

$$(\beta) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s)|^2 ds = l_n,$$

costruire una funzione $g(s)$ per la quale si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s) - f_n(s)|^2 ds \right] = 0$$

e

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s)|^2 ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s)|^2 ds \right].$$

Nel presente lavoro risolvo il problema nel caso in cui la successione $[f_n(s)]$ è uniformemente limitata ³⁾: i metodi usati possono servire con leggere modificazioni, nel caso generale che la successione $[f_n(s)]$ non sia uniformemente limitata, a risolvere quest'altro problema:

Data una successione $[f_n(s)]$ di funzioni limitate soddisfacenti alle (α) e (β) ed una successione $[\omega'_n]$ di numeri reali e positivi illimitata, costruire una funzione $g(s)$ per la

²⁾ F. RIESZ, *Ueber orthogonale Funktionensysteme* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematische-physikalische Klasse, Jahrgang 1907, pp. 116-122].

³⁾ In una Nota di prossima pubblicazione ho tolto la restrizione che la successione $[f_n(s)]$ sia uniformemente limitata.

quale si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega_r} \int_{-\omega_r}^{\omega_r} |g(s) - f_n(s)|^2 ds \right] = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega_r} \int_{-\omega_r}^{\omega_r} |g(s)|^2 ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s)|^2 ds \right],$$

essendo $[\omega_r]$ una successione contenuta in $[\omega_n']$ e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega_r = \infty.$$

Nell'ultimo n° del presente lavoro considero il caso in cui è

$$f_n(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(s),$$

essendo $[\varphi_j(s)]$ una successione di funzioni limitate soddisfacenti alle condizioni:

$$(\gamma) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \varphi_h(s) \overline{\varphi_k(s)} ds = \begin{cases} 0 & (h \neq k) \\ 1 & (h = k) \end{cases}$$

e le $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ costanti, ed enuncio un teorema analogo a quello di F. RIESZ.

Una successione di funzioni soddisfacenti alle (γ) è per esempio la seguente:

$$\varphi_h(s) = e^{\lambda_h s} \quad (h = 1, 2, \dots),$$

dove $[\lambda_h]$ è una successione di costanti reali distinte, o, nel campo delle funzioni reali, la seguente:

$$\varphi_h(s) = \sqrt{2} (a_h \cos \lambda_h s + b_h \sin \lambda_h s) \quad (h = 1, 2, \dots),$$

dove a_h e b_h sono costanti una delle quali è nulla e l'altra eguale all'unità, le λ_h sono costanti ed è

$$\lambda_h \neq \lambda_k \quad \text{per} \quad a_h = a_k, \quad b_h = b_k.$$

Questa nuova specie di ortogonalità in un intervallo infinito non offre una perfetta analogia con l'ortogonalità in un intervallo finito: così, per esempio, mentre un sistema di funzioni ortogonale in un intervallo finito è numerabile ⁴⁾ lo stesso non può dirsi di un sistema ortogonale nel nuovo senso, come mostra l'esempio del sistema

$$S \equiv (\cos \lambda s),$$

dove λ percorre tutti i valori dell'intervallo $(0, \infty)$.

1. Sia

$$f_1(s), f_2(s), \dots, f_n(s), \dots$$

una successione di funzioni, reali o complesse, definite per tutti i valori di s dell'intervallo $(-\infty, \infty)$ ed integrabili, nel senso di H. LEBESGUE, insieme ai quadrati dei loro moduli, in ogni intervallo finito.

Supponiamo che esista

$$(1) \quad \eta_{n,m} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_m(s) - f_n(s)|^2 ds$$

⁴⁾ E. SCHMIDT, *Sur la puissance des systèmes orthogonaux de fonctions continues* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXLIII (2^e semestre 1906), pp. 955-957].

e sia

$$(2) \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} \eta_{n, m} = 0.$$

Esista inoltre

$$(3) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s)|^2 ds = l_n.$$

Dimostreremo che si può costruire una funzione $R(x)$, della variabile intera e positiva x , positiva, crescente e illimitata, in modo che, fissato $\varepsilon > 0$, si possa determinare un intero ν tale che, per $n > m \geq \nu$ ed $\omega \geq R(n)$, sia

$$(4) \quad \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_m(s) - f_n(s)|^2 ds < \varepsilon.$$

Infatti, se

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \dots$$

è una successione a termini positivi, decrescenti e tendenti a zero, in corrispondenza ad ε_r potremo determinare un intero ν_r in modo che, per $m, n \geq \nu_r$, sia

$$\eta_{m, n} < \varepsilon_r.$$

Per $m = \nu_1 + 1$ denotiamo con $\omega_m^{(1)}$ il più piccolo intero positivo per cui si ha, essendo $\omega \geq \omega_m^{(1)}$,

$$(5) \quad \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_{\nu_1}(s) - f_m(s)|^2 ds < \varepsilon_1.$$

Per ogni intero $m > \nu_1 + 1$ denotiamo con $\omega_m^{(1)}$ il più piccolo intero maggiore di $\omega_{m-1}^{(1)}$ per cui è soddisfatta la (5) quando è $\omega \geq \omega_m^{(1)}$.

Porremo per $\nu_1 < m \leq \nu_2$

$$R(m) = \omega_m^{(1)}.$$

Per $m = \nu_2 + 1$ denotiamo con $\omega_m^{(2)}$ il più piccolo intero maggiore di $\omega_m^{(1)}$ per cui si ha, essendo $\omega \geq \omega_m^{(2)}$,

$$(6) \quad \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_{\nu_2}(s) - f_m(s)|^2 ds < \varepsilon_2.$$

Per ogni intero $m > \nu_2 + 1$ denotiamo con $\omega_m^{(2)}$ il più piccolo intero maggiore di $\omega_{m-1}^{(2)}$ e di $\omega_m^{(1)}$ per cui è soddisfatta la (6) quando è $\omega \geq \omega_m^{(2)}$.

Porremo per $\nu_2 < m \leq \nu_3$

$$R(m) = \omega_m^{(2)}.$$

In generale, per $m = \nu_r + 1$ denotiamo con $\omega_m^{(r)}$ il più piccolo intero maggiore di $\omega_{m-1}^{(r-1)}$ per cui si ha, essendo $\omega \geq \omega_m^{(r)}$,

$$(7) \quad \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_{\nu_r}(s) - f_m(s)|^2 ds < \varepsilon_r.$$

Per ogni intero $m > \nu_r + 1$ denotiamo con $\omega_m^{(r)}$ il più piccolo intero maggiore di $\omega_{m-1}^{(r)}$ ed $\omega_m^{(r-1)}$ per cui è soddisfatta la (7) quando è $\omega \geq \omega_m^{(r)}$.

Porremo per $\nu_r < m \leq \nu_{r+1}$

$$R(m) = \omega_m^{(r)}.$$

La funzione $R(x)$ sarà così definita per x intero e maggiore di v_1 , sarà positiva, crescente e illimitata.

Per $n > m > v_r$, tenuto conto della (7) e della relazione evidente

$$|f_m(s) - f_n(s)|^2 \leq 2|f_{v_r}(s) - f_n(s)|^2 + 2|f_{v_r}(s) - f_m(s)|^2,$$

si avrà, per $\omega \geq R(n)$,

$$\frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_m(s) - f_n(s)|^2 ds < 4\epsilon_r,$$

il che dimostra che è soddisfatta la (4).

2. Poniamo

$$(8) \quad \sigma_n = \limsup_{\substack{m > n \\ \omega \geq R(m)}} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_m(s) - f_n(s)|^2 ds.$$

Sarà per la (4)

$$(8^*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0.$$

Scegliamo una successione di numeri interi positivi

$$n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$$

in modo che la serie

$$\sigma_{n_1} + \sigma_{n_2} + \dots + \sigma_{n_p} + \dots$$

risulti convergente e nello stesso tempo in modo che, posto

$$(9) \quad \omega'_l = R(n_l),$$

si abbia

$$(10) \quad \omega'_l > \omega'_1 + \omega'_2 + \dots + \omega'_{l-1} \quad (l = 2, 3, \dots).$$

Sia

$$l_1, l_2, \dots, l_h, \dots$$

una successione a termini positivi, decrescenti e tendenti a zero e

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_h + \dots$$

una serie convergente a termini positivi.

Determiniamo un indice j_1 tanto grande che sia

$$2 \sum_{p=j_1}^{\infty} \sigma_{n_p} < l_1^2 \delta.$$

Posto allora

$$\omega_1 = R(n_{j_1+2}), \quad \omega_2 = R(n_{j_1+3}) \dots \omega_k = R(n_{j_1+k+1}) \dots$$

avremo per la (10)

$$(11) \quad \omega_l > \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{l-1} \quad (l = 2, 3, \dots).$$

Per ogni $\omega > R(n_{j_1+1})$ chiamiamo $(A_{\omega, l})$ l'insieme dei punti s in $(-\omega, \omega)$ dove risulti

$$|f_{n_{j_1}}(s) - f_{n_p}(s)| > l_1$$

per qualche $p > j_1$ ed $R(n_p) < \omega$. Ci proponiamo di determinare un limite superiore per $m(A_{\omega, l})$, dove $m(E)$ denota la misura dell'insieme (E) .

Denotiamo con k_ω il più grande degli interi p per i quali risulta

$$R(n_p) < \omega,$$

sia cioè

$$R(n_{k_\omega}) < \omega \leq R(n_{k_\omega+1}).$$

Indichiamo con $\Delta_\omega(s)$ una funzione di s definita in $(-\omega, \omega)$ ed eguale, per ogni valore di s , al massimo di

$$|f_{n_{j_1}}(s) - f_{n_p}(s)|$$

per $j_1 < p \leq k_\omega$.

Si avrà

$$|f_{n_{j_1}}(s) - f_{n_p}(s)| \leq |f_{n_{j_1}}(s) - f_{n_{k_\omega}}(s)| + |f_{n_{k_\omega}}(s) - f_{n_p}(s)|$$

e quindi

$$\Delta_\omega(s) \leq |f_{n_{j_1}}(s) - f_{n_{k_\omega}}(s)| + [\text{mass}_{j_1 < p \leq k_\omega} |f_{n_{k_\omega}}(s) - f_{n_p}(s)|],$$

$$[\Delta_\omega(s)]^2 \leq 2\{|f_{n_{j_1}}(s) - f_{n_{k_\omega}}(s)|^2 + |f_{n_{j_1+1}}(s) - f_{n_{k_\omega}}(s)|^2 + \dots + |f_{n_{k_\omega-1}}(s) - f_{n_{k_\omega}}(s)|^2\}.$$

Concludiamo per la (8)

$$(12) \quad \int_{-\omega}^{\omega} [\Delta_\omega(s)]^2 ds \leq 2 \cdot 2 \omega (\sigma_{n_{j_1}} + \sigma_{n_{j_2}} + \dots + \sigma_{n_{k_\omega-1}}) \leq 4 \omega \sum_{p=j_1}^{\infty} \sigma_{n_p}.$$

I punti di $(A_{\omega,1})$ sono tutti e soli i punti in cui risulta

$$\Delta_\omega(s) > l_1,$$

e perciò

$$\int_{-\omega}^{\omega} [\Delta_\omega(s)]^2 ds \geq \int_{(A_{\omega,1})} [\Delta_\omega(s)]^2 ds \geq l_1^2 \cdot m(A_{\omega,1}),$$

cioè

$$m(A_{\omega,1}) \leq \frac{1}{l_1^2} \int_{-\omega}^{\omega} [\Delta_\omega(s)]^2 ds,$$

e per la (12)

$$m(A_{\omega,1}) < 2 \omega \delta_1;$$

e questo vale per qualunque $\omega > R(n_{j_1+1})$.

Analogamente, se determiniamo un indice $j_2 > j_1$ in modo da avere

$$2 \sum_{p=j_2}^{\infty} \sigma_{n_p} < l_2^2 \delta_2$$

e, per $\omega > R(n_{j_2+1})$, chiamiamo $(A_{\omega,2})$ l'insieme dei punti in $(-\omega, \omega)$ dove risulti

$$|f_{n_{j_2}}(s) - f_{n_p}(s)| > l_2$$

per qualche $p > j_2$ ed $R(n_p) < \omega$, avremo

$$m(A_{\omega,2}) < 2 \omega \delta_2.$$

In generale, in corrispondenza all'indice r determineremo un indice $j_r > j_{r-1}$, in modo che, indicando per $\omega > R(n_{j_r+1})$ con $(A_{\omega,r})$ l'insieme dei punti s in $(-\omega, \omega)$ dove risulti

$$|f_{n_{j_r}}(s) - f_{n_p}(s)| > l_r$$

per qualche $p > j_r$ ed $R(n_p) < \omega$, si abbia

$$(13) \quad m(A_{\omega_r}) < 2\omega\delta_r.$$

3. Costruiamo ora nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ un insieme (B_i) nel seguente modo.

Escludiamo dall'intervallo $(-\omega_1, \omega_1)$ i punti di (A_{ω_1}) , dai punti degli intervalli $(-\omega_2, -\omega_1)$ e (ω_1, ω_2) escludiamo i punti di (A_{ω_2}) , dai punti degli intervalli $(-\omega_3, -\omega_2)$ ed (ω_2, ω_3) escludiamo i punti di (A_{ω_3}) e così via: in generale dai punti degli intervalli $(-\omega_r, -\omega_{r-1})$ ed (ω_{r-1}, ω_r) escludiamo i punti di (A_{ω_r}) . Otterremo così un insieme $(B_{i,1})$.

Osserviamo che se ω è compreso tra ω_{r-1} ed ω_r , essendo

$$\omega_{r-1} = R(n_{j_1+r}), \quad \omega_r = R(n_{j_1+r+1}),$$

i punti di (A_{ω_r}) che cadono nell'intervallo $(-\omega, \omega)$ sono tutti e soli i punti di (A_{ω_1}) ; possiamo perciò dire che nel costruire l'insieme $(B_{i,1})$ abbiamo escluso dagli intervalli $(-\omega, -\omega_{r-1})$, (ω_{r-1}, ω) tutti e soli i punti di (A_{ω_1}) .

Sull'insieme $(B_{i,1})$ così ottenuto operiamo nel seguente modo.

Togliamo dai punti di $(B_{i,1})$ compresi nell'intervallo

$$(-\omega_{j_2-j_1+1}, \omega_{j_2-j_1+1}) \quad (\omega_{j_2-j_1+1} = R(n_{j_2+2}))$$

ed esterni a $(-\omega_{j_2-j_1}, \omega_{j_2-j_1})$ i punti di $(A_{\omega_{j_2-j_1+1,2}})$, ed in generale, per $r \geq j_2 - j_1 + 1$, togliamo dai punti di $(B_{i,1})$ che cadono negli intervalli $(-\omega_r, -\omega_{r-1})$ ed (ω_{r-1}, ω_r) i punti di (A_{ω_r}) . Otterremo così un insieme $(B_{i,2})$. Se ω è compreso tra ω_{r-1} ed ω_r possiamo dire che nel costruire l'insieme $(B_{i,2})$ abbiamo tolto dai punti di $(B_{i,1})$ che cadono negli intervalli $(-\omega, -\omega_{r-1})$ ed (ω_{r-1}, ω) , tutti e soli i punti di (A_{ω_2}) .

In modo analogo costruiremo in generale un insieme $(B_{i,h})$ ($h = 1, 2, 3 \dots$) togliendo dai punti di $(B_{i,h-1})$ che cadono negli intervalli $(-\omega_r, -\omega_{r-1})$ ed (ω_{r-1}, ω_r) ($r \geq j_h - j_1 + 1$) i punti di (A_{ω_r}) .

L'insieme formato dai punti comuni a tutti gli insiemi $(B_{i,h})$, ($h = 1, 2, 3, \dots$) sarà l'insieme (B_i) che ci proponevamo di costruire.

4. Denotiamo con (C_i) l'insieme complementare di (B_i) e con $(C_{i,\omega})$ la parte di (C_i) compresa in $(-\omega, \omega)$.

Ci proponiamo di determinare un limite superiore per $m(C_{i,\omega})$.

Sia

$$\omega_{j_h-j_1+r} < \omega \leq \omega_{j_h-j_1+r+1}, \quad (r \geq 0) \quad (j_h + r + 1 \leq j_{h+1}).$$

$(C_{i,\omega})$ sarà costituito da punti che appartengono almeno ad uno dei seguenti insiemi

$$(A_{\omega_{i,1}}) \quad l = (1, 2, \dots, j_h - j_1 + r),$$

$$(A_{\omega_{i,2}}) \quad l = (j_2 - j_1 + 1, j_2 - j_1 + 2, \dots, j_h - j_1 + r),$$

$$(A_{\omega_{i,3}}) \quad l = (j_3 - j_1 + 1, j_3 - j_1 + 2, \dots, j_h - j_1 + r),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(A_{\omega_{i,h}}) \quad l = (j_h - j_1 + 1, j_h - j_1 + 2, \dots, j_h - j_1 + r),$$

$$(A_{\omega_{i,1}}), \quad (A_{\omega_{i,2}}), \quad \dots, \quad (A_{\omega_{i,h}}).$$

La misura di $(C_{1,\omega})$ non supererà la somma delle misure di questi insiemi, sarà per la (13)

$$m(C_{1,\omega}) \leq 2\delta_1(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{j_2-j_1}) + 2(\delta_1 + \delta_2)(\omega_{j_2-j_1+1} + \omega_{j_2-j_1+2} + \dots + \omega_{j_3-j_1}) \\ + 2(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)(\omega_{j_3-j_1+1} + \dots + \omega_{j_4-j_1}) + \dots + 2(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_h)(\omega_{j_h-j_1+1} + \dots + \omega_{j_{h-1}+r} + \omega)$$

e quindi

$$m(C_{1,\omega}) < 2 \cdot \sum_{p=1}^h \delta_p \cdot \left(\sum_{p=1}^{j_h-j_1+1} \omega_p + \omega \right) < 2\omega \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p \left(\frac{1}{\omega_{j_h-j_1+1}} \sum_{p=1}^{j_h-j_1+1} \omega_p + 1 \right)$$

e per la (11)

$$m(C_{1,\omega}) < 2\omega \cdot 3 \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p.$$

5. Nell'insieme (B_1) così costruito, definiamo una funzione $g_1(s)$ nel seguente modo.

Denotando con $(B_{1,\omega})$ la parte di (B_1) compresa in $(-\omega, \omega)$, poniamo in $(B_{1,\omega_{j_2-j_1}})$, $g_1(s) = f_{n_{j_1}}(s)$, nei punti di $(B_{1,\omega_{j_3-j_1}})$, non compresi in $(B_{1,\omega_{j_2-j_1}})$, poniamo $g_1(s) = f_{n_{j_2}}(s)$: in generale nei punti di $(B_{1,\omega_{j_r-j_1}})$, non compresi in $(B_{1,\omega_{j_{r-1}-j_1}})$, poniamo $g_1(s) = f_{n_{j_r}}(s)$.

Se è $p \geq j_1$ e precisamente

$$p = j_1 + r \quad (r \geq 0)$$

sarà in tutti i punti di (B_1) esterni a $(-\omega_{r-1}, \omega_{r-1})$

$$|g_1(s) - f_{n_p}(s)| \leq 2l_1.$$

Così se è $p \geq j_2$ sarà per s sufficientemente grande in (B_1)

$$|g_1(s) - f_{n_p}(s)| \leq 2l_2$$

e così via: possiamo dire che in generale dato $\varepsilon > 0$ si può determinare p' , intero, in modo che per $p \geq p'$ ed $s \geq \omega' = \omega'(p)$ sia

$$|g_1(s) - f_{n_p}(s)| < \varepsilon,$$

e da ciò si conclude facilmente che, dato $\varepsilon > 0$, si può determinare un intero p' in modo che, per $p \geq p'$ ed $\omega \geq \omega' = \omega'(p)$, sia

$$\frac{1}{2\omega} \int_{(B_{1,\omega})} |g_1(s) - f_{n_p}(s)|^2 ds < \varepsilon.$$

6. Costruiamo ora un insieme (B_2) aggiungendo all'insieme (B_1) i punti di $(-\omega_{r+1}, -\omega_r)$ e di (ω_r, ω_{r+1}) ($r \geq j_2 - j_1$) che appartengono ad $(A_{\omega_{r+1},1})$ e non appartengono a nessuno degli insiemi $(A_{\omega_{r+1},h})$ con $h > 1$.

Indicando allora con $(C_{2,\omega})$ la parte dell'insieme (C_2) , complementare di (B_2) , compresa in $(-\omega, \omega)$, si avrà per considerazioni analoghe a quelle usate nel n° 3

$$m(C_{2,\omega}) < 2\delta_1(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{j_2-j_1}) + 2\omega \cdot 3 \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p.$$

7. Nell'insieme (B_2) così costruito definiamo una funzione $g_2(s)$ ponendo in $(B_{2, \omega_{j_2-j_1}})$, $g_2(s) = f_{n_{j_1}}(s)$ e nei punti di $(B_{2, \omega_{j_r-j_1}})$, non compresi in $(B_{2, \omega_{j_{r-1}-j_1}})$, $g_2(s) = f_{n_{j_{r-1}}}(s)$.

L'insieme (B_2) contiene così l'insieme (B_1) ed è in (B_1) $g_2(s) = g_1(s)$.

Avremo anche che, dato $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un intero p' in modo da avere, per $p \geq p'$ ed $\omega \geq \omega' = \omega'(p)$,

$$\frac{1}{2\omega} \int_{(B_2, \omega)} |g_2(s) - f_{n_p}(s)|^2 ds < \varepsilon.$$

8. Generalmente, per $l = 1, 2, 3, \dots$ definiremo una funzione $g_l(s)$ in un insieme (B_l) che comprende (B_{l-1}) ed in modo che sia in (B_{l-1}) $g(s) = g_{l-1}(s)$.

L'insieme (B_l) si otterrà aggiungendo a (B_{l-1}) i punti di $(-\omega_{r+1}, -\omega_r)$ e di (ω_r, ω_{r+1}) , ($r \geq j_l - j_1$) che appartengono ad $(A_{\omega_{r+1}, l-1})$ senza appartenere a nessuno degli insiemi $(A_{\omega_{r+1}, h})$ con $h > l - 1$.

Si avrà

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} m(C_{l, \omega}) &< 2\delta_1(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{j_2-j_1}) + 2\delta_2(\omega_{j_2-j_1+1} + \dots + \omega_{j_3-j_1}) + \dots \\ &\dots + 2\delta_{l-1}(\omega_{j_{l-1}-j_1+1} + \dots + \omega_{j_l-j_1}) + 2\omega \cdot 3 \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p. \end{aligned} \right.$$

Si avrà infine, fissato $\varepsilon > 0$, per $p \geq p'$ ed $\omega \geq \omega' = \omega'(p)$,

$$(14^*) \quad \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g_l(s) - f_{n_p}(s)|^2 ds < \varepsilon.$$

9. Procedendo nel modo suesposto verremo a definire una funzione $g(s)$ in un insieme (B) , costituito dai punti che appartengono almeno ad uno degli insiemi (B_l) , ponendo in (B_l) $g(s) = g_l(s)$.

Nell'insieme (C) , complementare di (B) , porremo $g(s) = 0$.

Si vede facilmente che l'insieme (C) è costituito da punti che appartengono almeno ad uno degli insiemi

$$\begin{aligned} A_{\omega_{l,1}} \quad (l = 1, 2, \dots, j_2 - j_1), \\ A_{\omega_{l,2}} \quad (l = j_2 - j_1 + 1, j_2 - j_1 + 2, \dots, j_3 - j_1), \\ \dots \end{aligned}$$

e perciò, indicando con (C_ω) la parte di (C) compresa in $(-\omega, \omega)$, sarà per la (13)

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} m(C_\omega) &\leq 2\delta_1(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{j_2-j_1}) + 2\delta_2(\omega_{j_2-j_1+1} + \dots + \omega_{j_3-j_1}) + \dots \\ &\dots + 2\delta_h(\omega_{j_h-j_1+1} + \dots + \omega_{j_{h-1}-j_1+r} + \omega), \end{aligned} \right.$$

supposto

$$\omega_{j_h-j_1+r} < \omega \leq \omega_{j_h-j_1+r+1} \quad (r \geq 0, j_h + r + 1 \leq j_{h+1}).$$

Dalla (15) si trae, indicando per semplicità con H_i il coefficiente di $2\delta_i$ ($i=1, 2, \dots, b$),

$$m(C_\omega) < 2\delta_1 H_1 + 2\delta_2 H_2 + \dots + 2\delta_i H_i + 2(\delta_{i+1} + \delta_{i+2} + \dots + \delta_b)(\omega_{j_{i+1}-j_1+1} + \dots + \omega_{j_{b-1}+r} + \omega),$$

$$\frac{m(C_\omega)}{2\omega} < \frac{1}{\omega} (\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2 + \dots + \delta_i H_i) + (\delta_{i+1} + \dots + \delta_b) \left(\frac{\omega_{j_{i+1}-j_1+1} + \dots + \omega_{j_{b-1}+r}}{\omega_{j_{b-1}+r}} + 1 \right)$$

e per la (11)

$$\frac{m(C_\omega)}{2\omega} < \frac{1}{\omega} (\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2 + \dots + \delta_i H_i) + 3 \sum_{p=i+1}^{\infty} \delta_p,$$

e quindi

$$(16) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{m(C_\omega)}{2\omega} = 0.$$

Dalla (14) si trae facilmente che, fissato $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un intero λ in modo che, per $l \geq \lambda$ ed $\omega \geq \omega' = \omega'(l)$, sia

$$(17) \quad \frac{m(C_{l,\omega})}{2\omega} < \varepsilon.$$

10. Dalla (14*) del n° 7 si conclude facilmente che, fissato l ed $\varepsilon > 0$ si può determinare μ in modo che, per $m \geq \mu$ ed $\omega \geq \omega' = \omega'(m)$, sia

$$(18) \quad \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l,\omega)} |g(s) - f_m(s)|^2 ds < \varepsilon.$$

Infatti, se è $m > n_p$, dalla relazione

$$|g(s) - f_m(s)|^2 \leq 2|g(s) - f_{n_p}(s)|^2 + 2|f_{n_p}(s) - f_m(s)|^2,$$

si trae, per $\omega > R(m)$,

$$\frac{1}{2\omega} \int_{(B_l,\omega)} |g(s) - f_m(s)|^2 ds \leq 2 \cdot \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l,\omega)} |g(s) - f_{n_p}(s)|^2 ds + 2\sigma_m$$

e quindi, per le (8*) ed (14*), la (18).

Supponendo ora, come al n° 1, l'esistenza del

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_m(s)|^2 ds = l_m$$

avremo, supposto $n > m$, dalla relazione evidente

$$[f_m(s)]^2 = [f_n(s)]^2 + 2[f_m(s) - f_n(s)] \cdot f_m(s) + [f_m(s) - f_n(s)]^2,$$

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_m(s)|^2 ds - \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s)|^2 ds \right| \leq \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |[f_m(s)]^2 - [f_n(s)]^2| ds \\ & \leq \frac{1}{2\omega} \cdot 2 \int_{-\omega}^{\omega} |f_m(s) - f_n(s)| \cdot |f_m(s)| ds + \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_m(s) - f_n(s)|^2 ds. \end{aligned} \right.$$

Ma per l'ineguaglianza di SCHWARZ è

$$\int_{-\omega}^{\omega} |f_m(s) - f_n(s)| \cdot |f_m(s)| ds \leq \left[\int_{-\omega}^{\omega} |f_m(s) - f_n(s)|^2 ds \cdot \int_{-\omega}^{\omega} |f_m(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}$$

e quindi, se nel primo membro della (19) si fa tendere ω ad ∞ , si avrà

$$|l_m - l_n| \leq 2(l_m \sigma_m)^{\frac{1}{2}} + \sigma_m$$

e questa, dimostrando che $[l_n]$ è limitata, dimostra anche che esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = L.$$

Sia $L' > L$.

Posto

$$P \equiv \left| \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s)|^2 ds - \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |f_n(s)|^2 ds \right|,$$

si avrà:

$$P \leq \frac{2}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s) - f_n(s)| \cdot |f_n(s)| ds + \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |f_n(s) - g(s)|^2 ds$$

e per l'ineguaglianza di SCHWARZ:

$$P \leq 2 \left[\frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s)|^2 ds \cdot \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s) - f_n(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |f_n(s) - g(s)|^2 ds.$$

Determiniamo ν in modo che per $n \geq \nu$ ed $\omega \geq \omega' = \omega'(n)$ sia

$$\frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s)|^2 ds < L'.$$

Fissato $n \geq \nu$ ed l , dato $\varepsilon > 0$, determiniamo $m > n$ in modo che, per ω sufficientemente grande, sia

$$\frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s) - f_m(s)|^2 ds < \varepsilon$$

e ciò è possibile per la (18); allora, per ω sufficientemente grande, essendo

$$|g(s) - f_n(s)|^2 \leq 2|g(s) - f_m(s)|^2 + 2|f_m(s) - f_n(s)|^2,$$

sarà

$$P \leq 2[L'(2\varepsilon + 2\sigma_n)]^{\frac{1}{2}} + 2\varepsilon + 2\sigma_n$$

ed essendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$$

possiamo concludere che, fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare, per $n \geq \nu'$ e fisso, $\omega' = \omega'(l)$, in modo da avere, per $\omega \geq \omega'$,

(20)

$$P < \varepsilon.$$

Supponiamo ora che le funzioni $f_n(s)$ siano limitate, sia cioè

$$|f_n(s)| < A_n.$$

Avremo, posto

$$Q \equiv \left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s)|^2 ds - \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |f_n(s)|^2 ds \right|,$$

$$Q \equiv \frac{1}{2\omega} \int_{(C_l, \omega)} |f_n(s)|^2 ds \leq A_n^2 \frac{m(C_{l, \omega})}{2\omega}$$

e quindi, per la (17), fissato n ed $\varepsilon > 0$ possiamo determinare λ in modo che, per $l \geq \lambda$ ed $\omega \geq \omega' = \omega'(l)$ sia

$$(21) \quad Q < \varepsilon.$$

Si ha poi

$$\left| \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s)|^2 ds - L \right| \leq |l_n - L| + \left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s)|^2 ds - l_n \right| + Q + P.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ fissiamo n tanto grande da avere

$$|l_n - L| < \varepsilon,$$

e nello stesso tempo tanto grande da soddisfare alla (20) per $\omega \geq \omega'(l)$.

Determiniamo λ in modo da poter soddisfare alla (21) quando è $l \geq \lambda$ ed $\omega \geq \omega''(l)$.

Fissato $l \geq \lambda$ possiamo determinare $\omega = \omega'''(l)$ in modo da avere

$$\left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s)|^2 ds - l_n \right| < \varepsilon,$$

$$P < \varepsilon, \quad Q < \varepsilon$$

e quindi

$$\left| \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s)|^2 ds - L \right| < 4\varepsilon.$$

Concludiamo che, fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare λ in modo che, per $l \geq \lambda$ ed $\omega \geq \omega'(l)$, sia

$$(22) \quad \left| \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s)|^2 ds - L \right| < \varepsilon.$$

II. Dalla (22) per $l \geq \lambda$ si ha:

$$L - \varepsilon \leq \liminf_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s)|^2 ds \leq \limsup_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s)|^2 ds \leq L + \varepsilon.$$

Se è $l' > l$, sarà

$$\frac{1}{2\omega} \int_{(B_{l'}, \omega)} |g(s)|^2 ds \geq \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s)|^2 ds$$

e quindi

$$\liminf_{\omega=\infty} (\sup) \frac{1}{2\omega} \int_{(B_{l'}, \omega)} |g(s)|^2 ds \geq \liminf_{\omega=\infty} (\sup) \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s)|^2 ds.$$

Dalla (22) si trae perciò, essendo ε arbitrario,

$$(23) \quad \lim_{l=\infty} \left(\liminf_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s)|^2 ds \right) = \lim_{l=\infty} \left(\limsup_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s)|^2 ds \right) = L.$$

12. Supponiamo ora che la funzione $g(s)$ sia limitata, sia cioè

$$|g(s)| < A,$$

il che avviene in particolare quando è

$$|f_n(s)| < A$$

qualunque sia n .

Avremo

$$\left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s)|^2 ds - \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s)|^2 ds \right| = \frac{1}{2\omega} \int_{(C_l, \omega)} |g(s)|^2 ds \leq A^2 \frac{m(C_{l, \omega})}{2\omega}.$$

Si ha inoltre

$$(24) \quad \left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s)|^2 ds - L \right| \leq \frac{1}{2\omega} \int_{(C_l, \omega)} |g(s)|^2 ds + \left| \frac{1}{2\omega} \int_{(B_l, \omega)} |g(s)|^2 ds - L \right|.$$

Per le (17) e (22) fissato $\varepsilon > 0$ si può fare in modo, fissando l sufficientemente grande, che, a partire da un certo valore di ω , il secondo membro della (24) sia minore di ε , ciò dimostra che *esiste*

$$(25) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s)|^2 ds$$

e che questo limite è eguale ad L .

13. Supposta la $|g(s)|$ limitata ed $f_n(s)$ limitata, fissando un intero positivo m e considerando, invece della successione $[f_n(s)]$, la successione

$$[f_n(s) - f_m(s)],$$

potremo far corrispondere a quest'ultima successione la funzione limitata

$$g(s) - f_m(s),$$

e per quanto si è detto alla fine del n° precedente si avrà:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s) - f_m(s)|^2 ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s) - f_m(s)|^2 ds \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{n,m}$$

e per la (2)

$$(26) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s) - f_m(s)|^2 ds \right] = 0.$$

Da quest'ultima relazione si può viceversa far discendere facilmente la (25).

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Se

$$f_1(s), f_2(s), \dots, f_n(s), \dots$$

è una successione di funzioni definite per tutti i valori di s dell'intervallo $(-\infty, \infty)$, uniformemente limitata (esiste cioè una costante A per la quale si ha $|f_n(s)| < A$, qualunque sieno n ed s) e soddisfacente alle condizioni (1), (2) e (3) del n° 1, si può costruire una funzione $g(s)$, definita in tutti i punti di $(-\infty, \infty)$, limitata, integrabile (nel senso di LEBESGUE) insieme al quadrato del suo modulo in ogni intervallo finito,

per la quale si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s) - f_n(s)|^2 ds \right] = 0$$

e

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s)|^2 ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s)|^2 ds \right].$$

14. Applichiamo i risultati ottenuti al seguente caso particolare.

Si abbiano le funzioni limitate $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ..., $\varphi_n(s)$... soddisfacenti alle condizioni

$$(27) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \varphi_h(s) \bar{\varphi}_k(s) ds = \begin{cases} 0 & (h \neq k) \\ 1 & (h = k), \end{cases}$$

dove $\bar{\varphi}_k(s)$ indica la funzione complessa coniugata di $\varphi_k(s)$.

Sia

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

una successione di costanti e poniamo

$$f_n(s) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(s).$$

La successione $[f_n(s)]$ soddisfa alle (1) e (3) del n° 1; condizione necessaria e sufficiente perchè soddisfi anche alla (2) è che la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$$

risulti convergente.

Soddisfatta questa condizione, se la successione $[f_n(s)]$ è uniformemente limitata si potrà costruire una funzione $g(s)$ per la quale si abbia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s) - f_n(s)|^2 ds \right] = 0$$

e

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s)|^2 ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_n(s)|^2 ds \right] = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2.$$

Si avrà quindi, poichè è

$$\left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} [g(s) - f_n(s)] \bar{\varphi}_k(s) ds \right| \leq \left[\frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s) - f_n(s)|^2 ds \cdot \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |\varphi_k(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} g(s) \bar{\varphi}_k(s) ds = a_k.$$

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Se $[\varphi_n(s)]$ è una successione di funzioni limitate soddisfacenti alle (27) ed $[a_n]$ una successione di costanti tali che la serie

$$\sum |a_j|^2$$

risulti convergente e la successione $[f_n(s)]$

$$f_n(s) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(s)$$

uniformemente limitata, si può costruire una funzione $g(s)$, limitata, per la quale si abbia

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} g(s) \bar{\varphi}_j(s) ds = a_j, \quad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s)|^2 ds = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2.$$

La funzione $g(s)$ di quest'ultimo teorema, come pure quella del teorema precedente, più generale, non è evidentemente unica, ma è chiaro che per due funzioni $g(s)$ ed $h(s)$ soddisfacenti alla (26) si avrà

$$(28) \quad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |g(s) - h(s)|^2 ds = 0,$$

ed inversamente, se $h(s)$ soddisfa alla (28) e $g(s)$ alla (26) anche $h(s)$ soddisferà a quest'ultima.

Palermo, novembre 1913.

PIA NALLI.