

Ueber die Darstellung der Functionen complexer Variablen, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. Fuchs* in Greifswald.)

Um eine mehrdeutige Function $f(z)$ einer complexen Variablen von einem Punkte A der z -Ebene längs einer vorgeschriebenen Curve L bis zu einem anderen Punkte B der Ebene fortzusetzen, wird bekanntlich die Curve L in solche Abschnitte zerlegt, dass jeder einzelne einem Gebiete angehört, innerhalb dessen $f(z)$ eindeutig und stetig ist. Die innerhalb dieser Einzelgebiete gültigen Entwicklungen dienen alsdann dazu, den Werth der Function von Abschnitt zu Abschnitt, und demnach auch den Endwerth in B zu berechnen. Dieses Verfahren leidet ausser an der grossen Beschwerlichkeit in der praktischen Durchführung an dem wesentlichen theoretischen Mangel, dass dasselbe nicht a priori den Zusammenhang zwischen den Werthen der Function am Anfang und am Ende des Weges L erkennen lässt. Selbst wenn es gelingt, für die Function $f(z)$ eine einheitliche analytische Darstellung, welche in der ganzen Ebene gültig ist, zu finden, z. B. eine solche, wie ich sie für die Integrale linearer Differentialgleichungen in den *Annali di Matemat. d. d. Brioschi e Cremona*, Ser. II., tom. IV., fasc. I. gegeben habe, werden der Natur der Sache nach die einzelnen Glieder der Entwicklung vom Fortsetzungswege abhängig sein, es wird mithin dieselbe Schwierigkeit auf die einzelnen Glieder zurückfallen.

Die folgende Arbeit hat die hier aufgeworfene Frage zu ihrem Ausgangspunkte genommen. In derselben wird gezeigt, dass man durch algebraische Hilfsmittel die z -Ebene in zwei Gebiete G_1 und G_2 zerlegen kann von folgender Beschaffenheit:

Das eine Gebiet G_2 ist ein endliches, das andere G_1 der übrig bleibende unendlich grosse Theil der Ebene.

Die Grenze zwischen beiden Gebieten ist eine sich selbst nicht schneidende algebraisch bestimmbare Curve, und die sämmtlichen endlichen singulären Punkte der Function befinden sich auf derselben.

Innerhalb des Gebietes G_2 ist $f(z)$ eindeutig und stetig, innerhalb G_1 nur für $z = \infty$ nicht eindeutig und stetig. Es werden für jedes dieser Gebiete Reihenentwicklungen der Function gegeben, welche bezüglich innerhalb der ganzen Fläche gültig sind. Die Entwicklung innerhalb G_1 liefert die durch die Umläufe um ∞ von einander verschiedenen Werthe auf ähnliche Weise, wie eine nach Potenzen von z fortschreitende Reihe. — Die Herleitung dieser Entwicklungen setzt nur voraus, dass man einen Zweig einer bestimmten algebraischen Function von z , der innerhalb G_1 eindeutig und stetig ist, für jeden Werth von z innerhalb dieses Gebietes zu berechnen verstehe.

Der Zusammenhang der Functionswerthe des einen und anderen Gebietes ist von dem Verhalten der Function in den Umgebungen der auf der Grenze liegenden singulären Punkte derselben abhängig. Ist derselbe ermittelt, und führt eine Curve L von einem Punkte A des einen Gebietes zu einem Punkte B des anderen Gebietes, so lässt sich, wenn der Ausgangswerth der Function in A bestimmt ist, der Werth derselben in B berechnen, ohne dass man die Zwischenstufen der Werthe längs der Curve durchzumachen hätte.

Der Zusammenhang wird für die Integrale linearer Differentialgleichungen aufgestellt, und somit für diese das gestellte Problem vollständig gelöst.

Erste Abtheilung.

1.

Es sei

$$(1.) \quad F(w) = \frac{f(w)}{wg(w)},$$

worin $f(w)$ und $g(w)$ ganze rationale Functionen bedeuten, welche für $w = 0$ nicht verschwinden. Ferner seien die beiden complexen Variablen w und w_1 mit einander durch die Gleichung

$$(2.) \quad \psi(w, w_1) = \frac{F(w_1) - F(w)}{w_1 - w} = 0$$

verbunden.

Dem Werthe $w = 0$ entsprechen von Null verschiedene Wurzeln w_1 der Gleichung (2.). Ist daher K_r eine mit dem Radius r um den Anfang der w beschriebene Kreislinie, so befinden sich die einem Punkte w der

Fläche desselben zugehörigen Wurzeln w_1 der Gleichung (2.) sämmtlich ausserhalb K_r , wenn r eine gewisse Grenze nicht überschreitet.

Diese Grenze sei $r = R$, und K die mit R beschriebene Kreislinie. Es befindet sich alsdann der Annahme nach keiner der irgend einem Werthe w des Inneren von K entsprechenden Werthe w_1 ebenfalls innerhalb K . Es ist aber auch keiner dieser Werthe w_1 auf der Peripherie K gelegen. Gesetzt nämlich, es entspräche einem Werthe $w = w^{(0)}$ des Inneren ein Werth $w_1 = w_1^{(0)}$ der Peripherie von K , so würde auch wegen der Symmetrie der Gleichung (2.) in Bezug auf w und w_1 , dem Werthe $w = w_1^{(0)}$ der Peripherie ein Werth $w_1 = w^{(0)}$ des Inneren von K entsprechen. Da aber w_1 , so lange es endlich ist, sich mit w stetig ändert, so würde alsdann auch einem dem $w = w_1^{(0)}$ hinlänglich nahe im Inneren von K gelegenen Punkte w ein Werth w_1 entsprechen, der in der Nähe von $w_1 = w^{(0)}$ ebenfalls im Inneren von K befindlich wäre. — Aus demselben Grunde ist auch kein Punkt w_1 , der einem Punkte w der Peripherie K entspricht, im Inneren gelegen. — Es wird daher auf der Peripherie K einen oder mehrere Werthe w geben, zu denen ebenfalls auf der Peripherie befindliche Werthe w_1 gehören.

Der Kreis K ist demnach der grösste der Kreise K_r , welche die Eigenschaft haben, dass die irgend einem Werthe w des Inneren derselben zugehörigen Werthe w_1 ausserhalb derselben befindlich sind. Sein Radius R ist eine von Null verschiedene Grösse. Wir wollen den Kreis K den *zur Function $F(w)$ zugehörigen Grenzkreis* nennen.

Innerhalb des Kreises K liegt keine Wurzel der Gleichung

$$(3.) \quad F'(w) = 0,$$

wo $F'(w)$ die Ableitung von $F(w)$ bedeutet. Denn sei w_0 eine Wurzel dieser Gleichung, so genügt der Gleichung (2.) $w_1 = w = w_0$. Befände sich nun w_0 im Inneren von K , so würde auch Werthen w innerhalb K , die hinlänglich nahe an w_0 liegen, Werthe w_1 ebenfalls innerhalb K in der Nähe von w_0 entsprechen.

Die Wurzeln der Gleichung:

$$(4.) \quad g(w) = 0$$

liegen ausserhalb K . Denn da dem Punkte $w = 0$ des Inneren von K ausser $w_1 = \infty$ die Wurzeln der Gleichung $g(w_1) = 0$ zugehören, so befindet sich jede der letzteren aus den oben angegebenen Gründen ausserhalb K .

Hieraus ergibt sich auch, dass nur, wenn $g(w)$ eine Constante und

$f(w)$ eine für $w = 0$ nicht verschwindende ganze rationale Function ersten Grades ist, der Grenzkreis die unendliche Ebene umfasst, in allen übrigen Fällen aber ist R eine endliche Grösse.

2.

Beschreibt der Punkt w einen Kreis K_r , so beschreiben die zugehörigen Wurzeln der Gleichung (2.) vor. Nummer Curvenzweige $\mathfrak{C}'_r, \mathfrak{C}''_r, \dots$, welche wir als die mit K_r zusammengehörigen Curvenzweige bezeichnen. — Ein Punkt w von K_r und ein Punkt w_1 einer Curve \mathfrak{C}_r sollen entsprechend heissen, wenn w_1 mit w durch die Gleichung (2.) vor. Nummer verbunden ist.

Die mit einer vom Grenzkreise K eingeschlossenen Kreislinie K_r zusammengehörigen Curvenzweige haben nach der vor. Nummer weder mit dem Inneren noch mit der Peripherie von K einen Punkt gemeinschaftlich: Die mit K zusammengehörigen Curvenzweige dagegen haben mit der Peripherie von K einen oder mehrere Punkte gemeinschaftlich, treten aber nirgendwo in das Innere desselben ein. Die letzteren Curven seien $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \dots$, und es habe \mathfrak{C}' mit K den Punkt w' gemeinschaftlich. Es können alsdann zwei Fälle eintreten:

Entweder ist w' als Punkt von \mathfrak{C}' dem w' als Punkt von K entsprechend. Es wird alsdann die Gleichung (2.) in vor. Nummer durch $w_1 = w = w'$ befriedigt, d. h. es ist w' eine Wurzel der Gleichung (3.) vor. Nummer.

Oder es ist w' als Punkt von \mathfrak{C}' einem anderen Punkte $w = w''$ von K entsprechend. Es erlangt alsdann, wenn nicht die Curve \mathfrak{C}' längs einer w' enthaltenden endlichen Strecke auf K fällt, der Modul von w_1 längs der Curve \mathfrak{C}' für den Werth $w = w''$ den Minimalwerth R . Es ist also unter allen Umständen, wenn man

$$w = r e^{\varphi i}, \quad w_1 = r_1 e^{\varphi_1 i}$$

setzt, $\frac{dr_1}{d\varphi}$ für $w = w''$, $w_1 = w'$ Null oder unendlich.

Nun folgt aus Gleichung (2.) vor. Nummer

$$(1.) \quad \frac{\partial \psi}{\partial w} [e^{\varphi i} dr + w i d\varphi] + \frac{\partial \psi}{\partial w_1} [e^{\varphi_1 i} dr_1 + w_1 i d\varphi_1] = 0.$$

Bewegt sich w auf der Peripherie K , w_1 auf \mathfrak{C}' , so ist $dr = 0$, also

$$(2.) \quad \frac{\partial \psi}{\partial w} w i + \frac{\partial \psi}{\partial w_1} \left[e^{\varphi_1 i} \frac{dr_1}{d\varphi} + w_1 i \frac{d\varphi_1}{d\varphi} \right] = 0.$$

Bezeichnen wir den Werth von

$$\frac{\frac{\partial \psi}{\partial w} w}{\frac{\partial \psi}{\partial w_1} w_1} \quad \text{für } w = w'', \quad w_1 = w'$$

mit $A + Bi$, so folgt aus Gleichung (2.)

$$(3.) \quad \frac{dr_1}{d\varphi} = RB, \quad \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = -A \quad \text{für } w = w'', \quad w_1 = w'.$$

Da R weder Null noch unendlich ist, so folgt also

$$B = 0 \quad \text{oder} \quad B = \infty.$$

Es sei 1) $B = \infty$, so ist auch, da $\frac{\partial \psi}{\partial w}$ für $w = w'', w_1 = w'$ nach No. 1 endlich ist, $\frac{\partial \psi}{\partial w_1}$ für dieselben Werthe Null, d. h.

$$\frac{F'(w')}{w' - w''} - \left[\frac{F(w') - F(w'')}{(w' - w'')^2} \right] = 0,$$

d. h. da w' und w'' von einander verschieden angenommen wurden, und nach Gleichung (2.) vor. Nummer

$$F'(w') = 0.$$

Es wäre demnach w' eine Wurzel der Gleichung (3.) vor. Nummer.

Es sei 2) $B = 0$.

Die Durchschnittspunkte eines Kreises K_r mit den mit K_r zusammengehörigen Curvenzweigen ergeben sich aus der Gleichung (2.) vor. Nummer, wenn man in derselben $w = re^{\varphi i}$ und $w_1 = re^{\varphi_1 i}$ setzt. Die Sonderung des reellen und imaginären Theiles liefert alsdann zwei Gleichungen zur Bestimmung der Werthe paare φ und φ_1 als Functionen von r , welche Durchschnittspunkten entsprechen, derart, dass der Durchschnittspunkt $re^{\varphi_1 i}$ der Kreislinie K_r und der mit ihr zusammengehörigen Curve \mathfrak{C}_r dem Punkte $re^{\varphi i}$ des Kreises K_r entspricht.

Die Durchschnittspunkte sind imaginär für alle Kreise innerhalb K ; es ist wenigstens einer reell für K selber. Für diesen Punkt sei $w = w'' = Re^{\varphi'' i}$, $w_1 = w' = Re^{\varphi' i}$. Ist für diese Werthe $\frac{\partial \psi}{\partial w_1}$ nicht Null, d. h. w' nicht Wurzel der Gleichung (3.) vor. Nummer, so entsprechen den Werthen w innerhalb einer hinlänglich kleinen den Punkt w'' umgebenden geschlossenen Curve Werthe von w_1 ebenfalls innerhalb einer den Punkt w' umgebenden ge-

geschlossenen Curve, und zwar die innerhalb K fallenden Werthe w_1 den ausserhalb K fallenden Werthen w . Daher werden die Kreise K_r für Werthe von $r > R$ bis zu einer gewissen Grenze von einer der mit ihnen zusammengehörigen Curven geschnitten. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, dass die mit K zusammengehörigen Curven, welche K treffen, in ihrer ganzen Ausdehnung auf K fallen. In diesem Falle können die Durchschnittspunkte für $r > R$ wenigstens bis zu einer gewissen Grenze ebenfalls imaginär sein.

Für die Grössen φ und φ_1 als Functionen von r ergibt sich aus Gleichung (1.)

$$(4.) \quad \frac{\partial \psi}{\partial w} \left[e^{\varphi i} + w i \frac{d\varphi}{dr} \right] + \frac{\partial \psi}{\partial w_1} \left[e^{\varphi_1 i} + w_1 i \frac{d\varphi_1}{dr} \right] = 0.$$

Der Annahme nach ist $\frac{\partial \psi}{\partial w_1}$ für $w = w''$, $w_1 = w'$ nicht Null. Es ergibt sich also aus Gleichung (4.) für $w = w''$, $w_1 = w'$:

$$(5.) \quad A \left[\frac{1}{R} + i \frac{d\varphi}{dr} \right] + \frac{1}{R} + i \frac{d\varphi_1}{dr} = 0.$$

Wenn nun nicht die mit K zusammengehörigen und K treffenden Curvenzweige in ihrer ganzen Ausdehnung auf K fallen, so sind nach dem Obigen φ und φ_1 für $r \geq R$ bis zu einer gewissen Grenze reelle Functionen von r . Es folgt alsdann aus Gleichung (5.)

$$(A+1) \frac{1}{R} = 0,$$

oder da R endlich und von Null verschieden:

$$(6.) \quad A = -1.$$

Die Gleichung (1.) giebt alsdann für $w = w''$, $w_1 = w$

$$(7.) \quad \frac{dr_1}{R} + i d\varphi_1 = \frac{dr}{R} + i d\varphi,$$

woraus sich ergibt:

$$(8.) \quad dr_1 = dr, \quad d\varphi_1 = d\varphi.$$

Ist aber w dem w'' in beliebiger Richtung unendlich benachbart und innerhalb K gelegen, also dr negativ, so muss den obigen Eigenschaften des Grenzkreises K zu Folge das zugehörige w_1 ausserhalb K unendlich nahe an w' liegen, also dr_1 positiv sein, was der ersten Gleichung (8.) widerspricht.

Demnach muss für $w = w''$, $w_1 = w'$, $\frac{\partial \psi}{\partial w_1}$ verschwinden, oder $w' = w''$ sein.

Wir gelangen also in beiden Fällen zu dem Resultat:

Wenn die mit K zusammengehörigen und K treffenden Curven nicht in ihrer ganzen Ausdehnung auf K fallen, so sind die Durchschnittspunkte derselben mit K Wurzeln der Gleichung (3.) vor. Nummer.

3.

Der Fall, dass die mit dem Grenzkreise zusammengehörigen und denselben treffenden Curven in ihrer ganzen Ausdehnung auf ihn fallen, tritt z. B. ein, wenn

$$(1.) \quad \begin{cases} f(w) = A_0 + A_1 w + A_2 w^2, \\ g(w) = 1. \end{cases}$$

Die Gleichung (2.) No. 1 wird:

$$(2.) \quad A_0 - A_2 w w_1 = 0.$$

Mit einem Kreise K_r gehört eine einzige Curve zusammen, nämlich ein Kreis $K_{r'}$, dessen Radius

$$(3.) \quad r' = \frac{1}{r} \bmod. \frac{A_0}{A_2}.$$

Da beide Kreise concentrisch sind, so können sie sich nur treffen, wenn sie zusammenfallen, wenn also

$$(4.) \quad r' = r = \sqrt{\bmod. \frac{A_0}{A_2}} = R.$$

Der Kreis mit dem durch diese Gleichung bestimmten Radius ist der Grenzkreis für dieses Beispiel.

Die Gleichung (3.) No. 1 wird:

$$(5.) \quad A_0 - A_2 w^2 = 0.$$

Man sieht, dass die Wurzeln dieser Gleichung sich auf der Peripherie des Grenzkreises befinden.

Wir wollen zeigen, dass *allgemein wenn die mit dem Grenzkreise zusammengehörigen und ihn treffenden Curven in ihrer ganzen Ausdehnung auf denselben fallen, auf der Peripherie desselben sich Wurzeln der Gleichung (3.) No. 1 befinden.*

Es folgt nämlich für die correspondirenden Punkte der Peripherie K und einer mit K zusammengehörigen und auf sie fallenden Curve, da gleichzeitig $dr = 0$, $dr_1 = 0$ aus Gleichung (1.) vor. Nummer

$$(6.) \quad \frac{\partial \psi}{\partial w} w d\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial w_1} w_1 d\varphi_1 = 0.$$

Hieraus ergibt sich, dass für solche correspondirenden Punkte

$$\frac{\frac{\partial \psi}{\partial w} w}{\frac{\partial \psi}{\partial w_1} w_1} = A$$

reell ist. Es geht daher für solche correspondirenden Punkte die Gleichung (1.) vor. Nummer über in:

$$A\left(\frac{dr}{R} + i d\varphi\right) + \frac{dr_1}{R} + i d\varphi_1 = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$(7.) \quad dr_1 = -A dr, \quad d\varphi_1 = -A d\varphi.$$

Bezeichnen wir wieder mit $w = w''$, $w_1 = w'$ zwei solche correspondirenden Punkte, so entspricht den Eigenschaften des Grenzkreises zu Folge einem dem w'' unendlich benachbarten im Inneren von K befindlichen Werth w ein dem w' unendlich benachbarter ausserhalb K befindlicher Werth w_1 , d. h. einem negativen dr ein positives dr_1 . Die erste Gleichung (7.) ergibt daher, dass A positiv ist. Bewegt sich nun der Punkt w , um die Peripherie K zu erzeugen, so bewegt sich gleichzeitig w_1 , um die correspondirenden Punkte der mit K zusammengehörigen Curve zu erzeugen. Aus der zweiten Gleichung (7.) ergibt sich, dass sich die beiden auf der Peripherie K bewegenden Punkte w und w_1 in entgegengesetzter Richtung bewegen, und da w jedenfalls einen vollständigen Umlauf vollzieht, so folgt, dass sie sich begegnen müssen, also zwei correspondirende Punkte zusammenfallen. Für solche aber geht die Gleichung (2.) No. 1 über in

$$F'(w) = 0.$$

Da innerhalb des Grenzkreises keine Wurzel der Gleichung (3.) No. 1 befindlich ist, so ergibt sich als Resultat der Untersuchung dieser drei Nummern der Satz:

Der Radius des Grenzkreises ist der Modul derjenigen Wurzel der Gleichung

$$(A.) \quad F'(w) = 0,$$

welche unter allen Wurzeln derselben den kleinsten Modul hat.

4.

Es werde die complexe Grösse z mit der complexen Grösse w durch die Gleichung

$$(1.) \quad z = F(w)$$

verbunden, wo $F(w)$ dieselbe Bedeutung hat wie in No. 1.

Jedem Kreise K_r in der w Ebene entspricht eine geschlossene Curve C_r in der z Ebene; dem Grenzkreise K entspreche die geschlossene Curve C , welche *Grenzcurve* heissen möge.

Die den Kreisen K_r innerhalb K entsprechenden Curven C_r schneiden sich weder selbst noch unter einander. Denn von den einem solchen Schnittpunkte z zugehörigen Wurzeln w der Gleichung (1.) müssten mindestens zwei verschiedene sich innerhalb des Grenzkreises K befinden. Dieselben seien w und w_1 , so würden sie die Gleichung:

$$(2.) \quad \frac{F(w) - F(w_1)}{w - w_1} = 0$$

befriedigen. Dieses ist aber der Definition des Grenzkreises zu Folge nicht möglich.

Eliminirt man z zwischen der Gleichung

$$(3.) \quad \frac{d[g(w) \cdot w]}{dw} \cdot z - \frac{df(w)}{dw} = 0$$

und der Gleichung (1.), so erhält man die Gleichung

$$(4.) \quad F'(w) = 0.$$

Die den Wurzeln dieser Gleichung entsprechenden Werthe von z sind also die Verzweigungspunkte der algebraischen Function w von z , Gleichung (1.).

Zwei Curven C_r und C_s , welche zwei unendlich benachbarten Kreisen innerhalb K entsprechen, liegen so, dass diejenigen Punkte, welche zwei unendlich benachbarten Punkten der beiden Kreise entsprechen, selber unendlich benachbart sind, dass also die eine Curve von der anderen ganz umschlossen wird.

Da nun C_r für unendlich kleine r ganz im Unendlichen, für endliche von Null verschiedene, hinlänglich kleine r ganz im Endlichen sich befindet, so folgt, dass von zwei Curven C_r , die zu verschiedenen Kreisen innerhalb K gehören, diejenige die andere umgiebt, welche dem kleineren Kreise entspricht, und dass die Curve C_0 sich nach allen Richtungen ins Unendliche erstreckt.

Es sei F die von der Grenzcurve C in der z Ebene eingeschlossene Fläche, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden, dass, wenn r von Null bis R wächst, die Ebene z sich mit einer Schaar geschlossener, continuirlich aneinander liegender und sich umschliessender Curven C_r erfüllt, welche die ganze Ebene mit Ausschluss der Fläche F einfach bedecken. Diese von ihnen bedeckte Fläche heisse F' .

Es entspricht alsdann jedem Punkte der vom Grenzkreise eingeschlossenen Fläche in der w Ebene nur ein Punkt der Fläche F' in der z Ebene, und umgekehrt, oder beide Flächen sind Abbildungen von einander.

5.

Es seien in der z Ebene die Punkte $z_1, z_2, \dots z_{m+1}$ gegeben, so kann man die ganze rationale Function m^{ten} Grades $\varphi(w)$ so bestimmen, dass die Function

$$(1.) \quad z = \frac{\varphi(w)}{w}$$

für die willkürlichen Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+1}$ in der w Ebene resp. die Werthe $z_1, z_2, \dots z_{m+1}$ liefert. In der That sei

$$f(w) = (w - \alpha_1)(w - \alpha_2) \dots (w - \alpha_{m+1}),$$

$$f_i(w) = \frac{f(w)}{w - \alpha_i},$$

so ist

$$(2.) \quad \varphi(w) = \sum_1^{m+1} \frac{\alpha_i z_i}{f'_i(\alpha_i)} f_i(w),$$

wo $f'_i(w)$ die Ableitung von $f(w)$ bedeutet, die gesuchte Function.

Allgemeiner ist die Function:

$$(3.) \quad z = \frac{\varphi(w) + \psi(w)f(w)}{w},$$

für eine beliebige rationale Function von w , die für keinen der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+1}$ unendlich wird, von derselben Eigenschaft.

Der Radius des Grenzkreises der Function (3.) ist nach No. 3 der kleinste Modul der Wurzeln der Gleichung:

$$(4.) \quad w\varphi'(w) - \varphi(w) + w[\psi(w)f'(w) + f(w)\psi'(w)] - \psi(w)f(w) = 0,$$

wo die Ableitungen durch obere Accente angedeutet sind.

Es seien insbesondere $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+1}$ die $m+1$ Wurzeln der Gleichung:

$$(5.) \quad w^{m+1} - 1 = 0,$$

so geht die Gleichung (4.) über in:

$$(6.) \quad w\varphi'(w) - \varphi(w) + \psi(w)[mw^{m+1} + 1] + w\psi'(w)(w^{m+1} - 1) = 0.$$

Ist der Radius des Grenzkreises der Function (1.) grösser als Eins, oder was dasselbe ist, sind die Moduln der Wurzeln der Gleichung:

$$(7.) \quad w\varphi'(w) - \varphi(w) = 0$$

sämmtlich grösser als Eins, so wählen wir $\psi(w) = 0$. Ist dagegen der Modul von mindestens einer der Wurzeln der Gleichung (7.) kleiner oder gleich Eins, so wählen wir $\psi(w)$ so, dass die Moduln der Wurzeln der Gleichung (6.) sämtlich grösser als Eins werden. Den Nachweis der Möglichkeit einer solchen Wahl und die wirkliche Herstellung einer der gemachten Anforderung genügenden Function $\psi(w)$ wollen wir im Folgenden geben.

6.

Wir wählen:

$$(1.) \quad \psi(w) = \frac{a}{w^{m+1} - \beta},$$

wo a und β Constanten, und zwar letztere von Eins verschieden. Setzen wir zur Abkürzung

$$(2.) \quad w\varphi'(w) - \varphi(w) = G(w),$$

so geht die Gleichung (6.) vor. Nummer über in:

$$(3.) \quad G(w) - \frac{a[w^{2(m+1)} - (m+2-m\beta)w^{m+1} + \beta]}{(w^{m+1} - \beta)^2} = 0.$$

Zunächst wollen wir β so bestimmen, dass die Function:

$$(4.) \quad H(w) = \frac{w^{2(m+1)} - (m+2-m\beta)w^{m+1} + \beta}{(w^{m+1} - \beta)^2}$$

innerhalb des mit dem Radius Eins um den Anfang der w beschriebenen Kreises E und auf der Peripherie weder Null noch unendlich wird. Ist dieses erreicht, so sei M der Minimalwerth des Moduls von $H(w)$ innerhalb und auf der Peripherie von E , N der Maximalwerth des Moduls von $G(w)$ innerhalb desselben Kreises und dessen Peripherie, so darf man a nur so wählen, dass

$$(5.) \quad M \bmod. a > N,$$

um zu erreichen, dass die Wurzeln der Gleichung (3.) oder

$$(6.) \quad G(w) - aH(w) = 0$$

sämmtlich ausserhalb E befindlich sind.

Es ist nun erstlich ersichtlich, dass

$$\bmod. \beta > 1$$

sein muss. Setzt man nämlich den Zähler von $H(w)$ gleich Null, so ist $\bmod. \beta$ das Product der Moduln der Wurzeln der gebildeten Gleichung, welche sämtlich grösser als Eins sein sollen.

24 *

Wählt man $\text{mod. } \beta > 1$, so wird $H(w)$ innerhalb E und auf der Peripherie von E nicht unendlich. Wie β näher zu bestimmen ist, damit $H(w)$ auch innerhalb derselben Grenzen nicht verschwinde, soll nunmehr gezeigt werden.

7.

Aus der Abhandlung des Herrn *Hermite* (extrait d'une lettre à M. *Borchardt*, dieses Journal, Bd. 52, p. 45) ergibt sich nämlich leicht folgender Satz:

Es sei gegeben die Gleichung:

$$(1.) \quad F(z) = 0,$$

wo $F(z)$ eine ganze rationale Function mit beliebig complexen Coefficienten. Substituiren wir

$$(2.) \quad z = \rho \cdot \frac{i u - 1}{i u + 1},$$

wo $i = \sqrt{-1}$ und ρ reell und positiv, und bezeichnen die dadurch entstandene Gleichung mit:

$$(3.) \quad R(u) = 0,$$

so ist die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung, in denen der Coefficient von i positiv oder negativ ist, respective gleich der Anzahl der Wurzeln der Gleichung (1.) die ausserhalb oder innerhalb der mit dem Radius ρ um den Nullpunkt der z beschriebenen Kreisfläche liegen.

In der That folgt aus Gleichung (2.)

$$(4.) \quad u = i \cdot \frac{z + \rho}{z - \rho} = \frac{2\rho y}{(x - \rho)^2 + y^2} + i \cdot \frac{(x^2 + y^2 - \rho^2)}{(x - \rho)^2 + y^2},$$

wenn man

$$z = x + yi$$

setzt. Da der Punkt z sich ausserhalb oder innerhalb des mit dem Radius ρ beschriebenen Kreises befindet, je nachdem

$$x^2 + y^2 - \rho^2 \geq 0,$$

so ist der Satz bewiesen.

Um die Anzahl der Wurzeln der Gleichung (3.) mit positiven und negativen Coefficienten von i zu finden, bedienen wir uns eines Satzes, welchen Herr *Hermite* in derselben Abhandlung (p. 44) gegeben. Danach

ist eine quadratische Form \mathfrak{F} zu bilden, welche in eine Summe von Quadraten linearer Functionen ihrer Variablen mit reellen Coefficienten zu verwandeln ist. Es ist alsdann die Anzahl der positiven und negativen Quadrate resp. gleich der Anzahl der Wurzeln der Gleichung (3.) mit positiven und negativen Coefficienten von i^*).

Für unseren Zweck sei die Gleichung (1.) eine quadratische:

$$(5.) \quad F(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 = 0$$

und $\rho = 1$, so verwandelt die Substitution

$$(6.) \quad z = \frac{i u - 1}{i u + 1}$$

dieselbe in:

$$(7.) \quad -(A_0 + A_1 + A_2)u^2 + 2i(A_0 - A_2)u + A_0 - A_1 + A_2 = 0.$$

Setzt man

$$(8.) \quad \begin{cases} a + a'i = -(A_0 + A_1 + A_2), \\ b + b'i = 2i(A_0 - A_2), \\ c + c'i = A_0 - A_1 + A_2, \end{cases}$$

so ist

$$(9.) \quad \frac{1}{2}\mathfrak{F} = (a'b - ab')z_1^2 + 2(a'c - ac')z_1 z_0 + (b'c - bc')z_0^2 **).$$

Verwandelt man diese quadratische Form in eine Summe von zwei Quadraten, so befinden sich innerhalb des Kreises mit dem Radius Eins eine, zwei, oder keine Wurzel der Gleichung (5.), je nachdem eines der Quadrate, beide, oder keines das negative Vorzeichen hat.

*) Bei dieser Gelegenheit bemerken wir, dass, wenn man bloss wissen will, ob überhaupt innerhalb des Kreises mit dem Radius ρ eine Wurzel der Gleichung (1.) enthalten ist, oder was dasselbe besagt, ob überhaupt der Coefficient von i in einer Wurzel der Gleichung (3.) negativ ist, diese Frage häufig schon durch folgenden Satz entschieden werden kann:

Ist der Coefficient irgend eines der Quadrate der Form \mathfrak{F} negativ, so befinden sich Wurzeln der Gleichung (1.) innerhalb des mit ρ beschriebenen Kreises.

In der That bleibt bekanntlich die Anzahl der positiven und negativen Vorzeichen in der in eine Summe von Quadraten transformirten Form \mathfrak{F} für jede Transformation dieselbe. Man kann aber immer eine solche Transformation vornehmen, bei welcher das Quadrat mit dem negativen Vorzeichen beibehalten wird (vergl. *Serret cours d'algèbre sup. t. I., p. 426*).

**) In der *Hermite'schen* Abhandlung (S. 44) sind irrthümlicherweise die Coefficienten der Form (9.) des Textes mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen.

8.

Die Gleichung, welche man erhält, wenn man den Zähler der Function $H(w)$ (No. 6, Gleichung (4.)) gleich Null setzt, lautet:

$$(1.) \quad \beta - (m+2-m\beta)v + v^2 = 0,$$

wo

$$(2.) \quad v = w^{m+1}$$

gesetzt ist. Diese Gleichung, verglichen mit Gleichung (5.) vor. Nummer giebt statt Gleichung (7.) vor. Nummer:

$$(3.) \quad (m+1)(1-\beta)u^2 + 2i(\beta-1)u + m+3-(m-1)\beta = 0.$$

Es sei demnach β reell, so ist

$$(4.) \quad \begin{cases} a = (m+1)(1-\beta), & a' = 0, \\ b = 0, & b' = 2(\beta-1), \\ c = m+3-(m-1)\beta, & c' = 0. \end{cases}$$

Es ist alsdann

$$(5.) \quad \frac{1}{2}\mathfrak{F} = 2(m+1)(1-\beta)^2 z_1^2 + 2(\beta-1)[m+3-(m-1)\beta] z_0^2,$$

eine Form, die nur Quadrate enthält.

Die Gleichung (1.) hat keine Wurzel v innerhalb des Kreises mit dem Radius Eins, oder was dasselbe ist, die Gleichung

$$(6.) \quad H(w) = 0$$

hat keine Wurzel w innerhalb des Kreises E , wenn

$$2(\beta-1)[m+3-(m-1)\beta] > 0,$$

oder, da nach No. 6 der absolute Werth von β grösser als Eins sein muss,

$$(7.) \quad 1 < \beta < \frac{m+3}{m-1}.$$

Wir wählen

$$(8.) \quad \beta = \frac{m+1}{m-1}.$$

Die Function $\psi(w)$ in No. 6 lautet alsdann

$$(9.) \quad \psi(w) = \frac{a(m-1)}{(m-1)w^{m+1} - (m+1)}$$

und die Function $H(w)$ wird:

$$(10.) \quad H(w) = \frac{(m-1)[(m-1)w^{2(m+1)} + 2w^{m+1} + m+1]}{[(m-1)w^{m+1} - (m+1)]^2}.$$

In der That folgt aus der Gleichung:

$$(11.) \quad (m-1)w^{2(m+1)} + 2w^{m+1} + m + 1 = 0$$

$$w^{m+1} = \frac{-1 \pm i\sqrt{m^2-2}}{m-1}.$$

Da der Modul dieses Ausdruckes

$$\sqrt{\frac{m+1}{m-1}} > 1,$$

so hat die Gleichung (11.) keine innerhalb E oder auf der Peripherie E befindliche Wurzel.

9.

Der Minimalwerth M des Moduls der Function $H(w)$ innerhalb des Kreises E ergibt sich

$$(1.) \quad M = \frac{\sqrt{(m-1)(m^5+m^4+m^3-3m^2-6m+2)}}{m^4+2m^3+4m^2+2m-1}.$$

Wählt man daher a so, dass

$$(2.) \quad M \bmod a > N,$$

so ist der Radius des Grenzkreises, der zur Function:

$$(3.) \quad z = \frac{\varphi(w)}{w} + \frac{a(m-1)(w^{m+1}-1)}{[(m-1)w^{m+1}-(m+1)]w}$$

gehört, grösser als Eins.

Es ist zu bemerken, dass es nicht erforderlich ist, den Maximalwerth N des Moduls von $G(w)$ innerhalb E wirklich aufzusuchen. Es lässt sich vielmehr jedesmal unmittelbar eine positive Zahl N' angeben, unterhalb welcher sich N befinden muss, und die Ungleichung (2.) ist a potiori befriedigt, wenn

$$(2^a.) \quad M \bmod a \geq N'.$$

Das Quadrat einer solchen Zahl N' wird erhalten, wenn man in $G(w)$ für w setzt $re^{i\varphi}$, alsdann $G(w)$ mit dem conjugirten Werthe multiplicirt, endlich in dem so erhaltenen Quadrate des Moduls von $G(w)$ die negativen Vorzeichen in positive verwandelt und an die Stelle von $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, r die Einheit setzt.

Ebenso kann man in die Ungleichung (2.) statt M jede kleinere positive Zahl M' setzen; z. B. für $m \geq 2$

$$(4.) \quad M' = \frac{(3m-1)\sqrt{m-1}}{9m^4} \quad \text{oder auch} \quad M' = \frac{3m-1}{9m^4}.$$

10.

Es sei wie in No. 5

$$f(w) = w^{m+1} - 1 \quad \text{und} \\ \varphi(w) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\alpha_i z_i}{f'(\alpha_i)} f_i(w).$$

Wenn die Gleichung

$$(1.) \quad w \varphi'(w) - \varphi(w) = 0$$

innerhalb E befindliche Wurzeln hat, so ist es häufig möglich, durch eine Permutation der Grössen z_1, z_2, \dots, z_{m+1} in dem Ausdrucke für $\varphi(w)$, welche einer veränderten Zuordnung dieser Grössen zu den auf der Peripherie von E liegenden Einheitswurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}$ gleichkommt, zu bewirken, dass für die veränderte Function $\varphi_1(w)$ die sämtlichen Wurzeln der Gleichung:

$$(1^a.) \quad w \varphi_1'(w) - \varphi_1(w) = 0$$

ausserhalb E liegen. Wir werden in No. 12 ein solches Beispiel kennen lernen.

In solchen Fällen reicht die Substitution:

$$(2.) \quad z = \frac{\varphi_1(w)}{w}$$

aus, um einen Grenzkreis zu erzielen, dessen Peripherie E umgiebt.

Wenn aber für jede Permutation der Grössen z_1, z_2, \dots, z_{m+1} einige oder mehrere Wurzeln der Gleichung (1.) innerhalb E befindlich sind, so muss man zur Substitution (3.) vor. Nummer seine Zuflucht nehmen, deren zugehöriger Grenzkreis den Kreis E umgiebt.

Es sei z. B.

$$m = 3, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 0, 1, \quad z_3 = 0, 1, i, \quad z_4 = -0, 1.$$

Für $m = 3$ ist allgemein

$$(3.) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(w) &= \frac{1}{4} [z_1 + i z_2 - z_3 - i z_4 + (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) w \\ &\quad + (z_1 - i z_2 - z_3 + i z_4) w^2 + (z_1 - z_2 + z_3 - z_4) w^3], \end{aligned} \right.$$

daher wird die Gleichung (1.):

$$(4.) \quad G(w) = -[z_1 + i z_2 - z_3 - i z_4] + [z_1 - i z_2 - z_3 + i z_4] w^2 + 2[z_1 - z_2 + z_3 - z_4] w^3 = 0.$$

Für unser numerisches Beispiel ist der Modul des Coefficienten von w^3 in dieser Gleichung stets grösser als der von w^0 , welche Permutation der Grössen z_1, z_2, z_3, z_4 auch gewählt werde. Es hat demnach in diesem Falle die Gleichung (4.) mindestens eine Wurzel, deren Modul kleiner als Eins, die also innerhalb E liegt.

Für die obige Permutation lautet die Gleichung (4.):

$$(5.) \quad G(w) = -(1 + 0,1.i) + (1 - 0,3.i)w^2 + 2(1 + 0,1.i)w^3 = 0.$$

Man erhält

$$(6.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mod.}^2 G(w) = 1,01 - (1,94 \cos 2\varphi + 0,8 \sin 2\varphi)r^2 - 4,04 \cos 3\varphi r^3 \\ \quad + 1,09 r^4 + (3,88 \cos \varphi - 1,6 \sin \varphi)r^5 + 4,04 r^6, \end{array} \right.$$

wenn

$$w = r e^{\varphi i}$$

gesetzt wird. Werden in (6.) die negativen Vorzeichen in positive verwandelt und statt r sowie statt der Cosinusse und Sinusse die positive Einheit gesetzt, so ist innerhalb E

$$(7.) \quad \text{mod.}^2 G(w) < 18,4.$$

In unserem Falle ist

$$(8.) \quad M = \frac{\sqrt[3]{154}}{88}.$$

Wir bestimmen demnach

$$(9.) \quad \frac{\sqrt[3]{154}}{88} \text{ mod. } a \geq \sqrt[3]{18,4},$$

und können danach

$$(10.) \quad a \geq 31$$

annehmen. Die Substitution (3.) vor. Nummer wird alsdann

$$(11.) \quad z = \frac{(1 + 0,1.i)(1 + w + w^3) + (1 - 0,3.i)w^2}{4w} + \frac{31}{4} \cdot \frac{(w^4 - 1)}{(w^4 - 2)w}.$$

Der dieser zugehörige Grenzkreis umgiebt den Kreis E .

11.

Fassen wir nunmehr die Hauptresultate der vorhergehenden Untersuchung zusammen.

I. Es sei

$$(1.) \quad F(w) = \frac{f(w)}{w g(w)},$$

wo $f(w)$ und $g(w)$ ganze rationale Functionen der complexen Variablen w sind, die für $w = 0$ nicht verschwinden, und R der kleinste unter den Moduln der Wurzeln der Gleichung:

$$(2.) \quad F'(w) = 0.$$

Es bedeute ferner K die in der Ebene der w mit dem Radius R um den Null-

punkt beschriebene Kreislinie, C die Curve der z Ebene, welche diesem Kreise vermittelt der rationalen Function

$$(3.) \quad z = F(w)$$

zugehört, so entspricht jedem Punkte innerhalb K nur ein Punkt in dem ausserhalb C liegenden unendlichen Flächenraume F' , und umgekehrt, d. h. die Flächen K und F' sind Abbildungen von einander.

Wir nennen K den Grenzkreis und die Curve C die Grenzcurve, welche zur Function (3.) gehören.

II. Sind in der z Ebene $m+1$ Punkte $z_1, z_2, \dots z_{m+1}$ gegeben, so lassen sich die Functionen $f(w)$ und $g(w)$ folgendermassen bestimmen:

1) Der Radius R des Grenzkreises ist grösser als Eins, so dass die Curve C_e in der z Ebene, welche dem Kreise E mit dem Radius Eins in der w Ebene entspricht, ganz der Fläche F' angehört.

2) Den Punkten $z_1, z_2, \dots z_{m+1}$ entsprechen in willkürlicher Zuordnung $m+1$ Punkte auf der Peripherie E , welche die $m+1$ Wurzeln der Einheit darstellen.

Aus dieser Bestimmung ergibt sich, dass einerseits die innere Fläche des Kreises E und die äussere unendliche Fläche der Curve C_e , andererseits der Ring zwischen den Kreisen K und E und der Ring zwischen den Curven C und C_e Abbildungen von einander sind.

Wir wollen die Curve C_e den zu dieser so bestimmten Substitution (3.) zugehörigen *Absonderungsschnitt* nennen.

12.

Um zum Vorhergehenden ein Beispiel zu geben, seien vier Punkte z_1, z_2, z_3, z_4 in der z Ebene gegeben, derart dass

$$z_3 = -z_1, \quad z_4 = -z_2,$$

und man setze nach No. 5

$$(1.) \quad z = \frac{1}{2w} \{z_1 + z_2 i + (z_1 - z_2 i) w^2\},$$

so liefern die vier auf der Peripherie des mit der Längeneinheit um den Anfang der w beschriebenen Kreises E liegenden Punkte $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = i, \alpha_3 = -1, \alpha_4 = -i$ resp. die vier Werthe z_1, z_2, z_3, z_4 .

Es sei

$$z = x + y i, \quad z_k = x_k + y_k i,$$

und es bewege sich w auf der Peripherie des mit dem Radius r um den Anfang der w beschriebenen Kreises K_r , so dass

$$w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

alsdann folgt aus Gleichung (1.) oder

$$(1^a.) \quad z = \frac{1}{2} \left\{ z_1 \left(w + \frac{1}{w} \right) - z_2 i \left(w - \frac{1}{w} \right) \right\}$$

$$(2.) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left\{ (x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi) \left(r + \frac{1}{r} \right) - (y_1 \sin \varphi - y_2 \cos \varphi) \left(r - \frac{1}{r} \right) \right\}, \\ y = \frac{1}{2} \left\{ (x_1 \sin \varphi - x_2 \cos \varphi) \left(r - \frac{1}{r} \right) + (y_1 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi) \left(r + \frac{1}{r} \right) \right\}. \end{cases}$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ und setzt:

$$(3.) \quad \begin{cases} p = x_2 \left(r + \frac{1}{r} \right) - y_1 \left(r - \frac{1}{r} \right), & p_1 = x_1 \left(r - \frac{1}{r} \right) + y_2 \left(r + \frac{1}{r} \right), \\ p_2 = x_1 \left(r + \frac{1}{r} \right) + y_2 \left(r - \frac{1}{r} \right), & p_3 = -x_2 \left(r - \frac{1}{r} \right) + y_1 \left(r + \frac{1}{r} \right), \end{cases}$$

so ergibt sich als Gleichung der Curve C_r in der z Ebene:

$$(4.) \quad 4(p_1^2 + p_3^2)x^2 - 8(pp_1 + p_2p_3)xy + 4(p^2 + p_2^2)y^2 = (p_1p_2 - pp_3)^2.$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse dar, deren Mittelpunkt im Anfang der z , wenn

$$p_1p_2 - pp_3 \geq 0.$$

Die Längen der Halbaxen der Ellipsen a_r und b_r ergeben sich auf bekannte Weise, wenn man

$$(5.) \quad x_1 + y_2 = \alpha, \quad x_1 - y_2 = \alpha', \quad y_1 + x_2 = \beta, \quad y_1 - x_2 = \beta'$$

setzt:

$$(6.) \quad \begin{cases} a_r^2 = \left(\frac{\frac{1}{r} \sqrt{\alpha'^2 + \beta^2} + r \sqrt{\alpha^2 + \beta'^2}}{2} \right)^2, \\ b_r^2 = \left(\frac{\frac{1}{r} \sqrt{\alpha'^2 + \beta^2} - r \sqrt{\alpha^2 + \beta'^2}}{2} \right)^2. \end{cases}$$

Die Ellipse verwandelt sich in ein System zweier zusammenfallender gerader Linien, wenn

$$p_1p_2 - pp_3 = 0$$

oder

$$(7.) \quad (\alpha^2 + \beta'^2)r^2 - (\alpha'^2 + \beta^2)\frac{1}{r^2} = 0.$$

Diese Gleichung hat eine reelle positive Wurzel:

$$(8.) \quad r = \sqrt[4]{\frac{\alpha'^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta'^2}}.$$

Für $r=0$ sind die Axen der Ellipse unendlich gross, für wachsende Werthe von r nehmen die Quadrate der Halbaxen ab, bis für den Werth (8.) von r

$$a_r^2 = \sqrt{(\alpha^2 + \beta'^2)(\alpha'^2 + \beta^2)}, \quad b_r^2 = 0,$$

d. h. die Ellipse eine mit der Axe $2a_r$ zusammenfallende Doppellinie wird.

Für Werthe von r , die grösser sind als der Werth (8.), nehmen a_r^2 und b_r^2 wieder fortwährend mit wachsendem r zu.

Bekanntlich sind die Richtungen der beiden Axen der Ellipse die der beiden durch die Gleichung:

$$(9.) \quad (pp_1 + p_2p_3)x^2 + (p_1^2 + p_3^2 - p^2 - p_2^2)xy - (pp_1 + p_2p_3)y^2 = 0$$

dargestellten auf einander senkrechten Geraden. Nun ist

$$pp_1 + p_2p_3 = 4(x_2y_2 + x_1y_1), \quad p_1^2 + p_3^2 - p^2 - p_2^2 = 4(y_2^2 + y_1^2 - x_2^2 - x_1^2),$$

also von r unabhängig. Es sind demnach die Richtungen der Axen für alle Ellipsen dieselben; die der Axen $2a_r$ coïncidirt mit der geraden Doppellinie, in welche die Ellipse für den Werth (8.) von r übergeht, und deren Gleichung ist:

$$(10.) \quad (\alpha\sqrt{\alpha'^2 + \beta^2} - \alpha'\sqrt{\alpha^2 + \beta'^2})x - (-\beta'\sqrt{\alpha'^2 + \beta^2} + \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta'^2})y = 0.$$

Die Gleichung, welche den Grenzkreis liefert (s. Gleichung (A.) No. 3) ist

$$(11.) \quad w^2(z_1 - z_2i) - (z_1 + z_2i) = 0.$$

Hieraus ergibt sich als Radius desselben

$$(12.) \quad R = \sqrt[4]{\frac{\alpha'^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta'^2}}.$$

Durch Vergleichung von (8.) und (12.) folgt, dass die Grenzcurve C die gerade Doppellinie ist, welche sich in der Richtung der Linie (10.) nach beiden Seiten des Anfangspunktes bis zum Abstände $\sqrt[4]{(\alpha^2 + \beta'^2)(\alpha'^2 + \beta^2)}$ erstreckt. Die Fläche F' ist demnach die durch diese Doppellinie begrenzte unendliche Ebene.

Ist

$$(13.) \quad x_2y_1 - x_1y_2 \geq 0,$$

d. h. liegen z_1 und z_2 nicht mit dem Nullpunkte in gerader Linie, so kann man voraussetzen, dass der Ausdruck (13.) positiv ist, da eine Vertauschung

von z_1 und z_2 demselben das entgegengesetzte Vorzeichen verschafft, wenn er negativ ausfällt.

Es ist aber unter dieser Voraussetzung $R > 1$, es genügt also die Substitution (1.) auch der in vor. Nummer unter II. aufgestellten Bedingung, dass der Kreis E innerhalb des Grenzkreises sich befindet.

Liegen aber z_1 und z_2 mit dem Nullpunkte in gerader Linie, so ist

$$(14.) \quad x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0$$

und demnach $R = 1$. Der Kreis E fällt alsdann mit dem Grenzkreis K , die Grenzcurve mit dem Absonderungsschnitt zusammen.

In diesem Falle ist nach No. 9 Gleichung (3.) an die Stelle der Substitution (1.) die folgende zu setzen:

$$(15.) \quad z = \frac{1}{2w} \{z_1 + z_2 i + (z_1 - z_2 i) w^2\} + \frac{a(w^4 - 1)}{(w^4 - 2)w},$$

wo a nach No. 9 zu bestimmen ist. Der zu dieser Substitution gehörige Grenzkreis umschliesst den Kreis E .

Eine andere Behandlung dieses Falles, wo die Gleichung (14.) befriedigt wird, ergibt sich aus der folgenden Nummer.

13.

Die in No. 5 — 11 getroffene Bestimmung der Function $F(w)$ (No. 11 Gleichung (3.)) kann durch allgemeinere ersetzt werden, welche von der in No. 11 erwähnten darin abweichen, dass den Punkten z_1, z_2, \dots, z_{m+1} $m+1$ willkürliche Punkte auf der Peripherie von E entsprechen.

In gewissen Fällen kann man sich auch einfacherer Functionen bedienen, um eine einfach zusammenhängende Fläche in der z Ebene so zu bestimmen, dass auf deren Begrenzung C_e gegebene Punkte sich befinden, und dass sie ganz einer anderen einfach zusammenhängenden Fläche angehört, die eine Abbildung einer Kreisfläche K in der w Ebene ist, derart, dass die Begrenzung C_e einem Kreise E entspricht.

Liegen z. B. die Punkte z_1, z_2, \dots, z_{m+1} auf einer geraden Linie L , welche gegen die reelle Axe der z Ebene unter dem Winkel ϑ geneigt ist und vom Anfangspunkte den Abstand l hat, und setzt man

$$(1.) \quad z = \frac{e^{\alpha i} + e^{\beta i} w}{1 + e^{(\alpha + \beta - 2\vartheta)i} w} + i l e^{\vartheta i},$$

wo α und β beliebige reelle Grössen sind, so entspricht jedem Punkte der w Ebene nur ein Punkt der z Ebene, und umgekehrt.

Ist

$$z = x + yi,$$

so ergibt sich für

$$w = e^{\varphi i},$$

$$(2.) \quad \begin{cases} x = \pm l \sin \vartheta + \cos \vartheta \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha - \beta - \varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta + \varphi}{2} - \vartheta\right)}, \\ y = \mp l \cos \vartheta + \sin \vartheta \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha - \beta - \varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta + \varphi}{2} - \vartheta\right)}. \end{cases}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\sin \vartheta$, die zweite mit $\cos \vartheta$ und subtrahirt, so folgt:

$$(3.) \quad x \sin \vartheta - y \cos \vartheta = \pm l.$$

Dieses ist die Gleichung der Linie L . Während also w die Peripherie E beschreibt, bewegt sich der Punkt z auf der geraden Linie L .

Umgekehrt ergeben die Gleichungen (2.) zu jedem Punkte der Linie L einen Punkt der Peripherie E .

Die gerade Linie L theilt die z Ebene in zwei Hälften T und T' , wovon die eine dem Inneren, die andere dem Aeusseren des Kreises E entspricht.

14.

Um noch ein zweites Beispiel für eine einfachere Bestimmung, wie sie in vor. Nummer angedeutet worden, zu geben, seien z_1, z_2, z_3, z_4 vier beliebige Punkte in der z Ebene, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ vier beliebige Punkte auf dem Kreise E in der w Ebene, und es werden die Coefficienten in der Function

$$(1.) \quad z = \frac{A_0 + A_1 w + A_2 w^2}{B_0 + B_1 w + B_2 w^2}$$

so bestimmt, dass $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ in willkürlicher Zuordnung den Punkten z_1, z_2, z_3, z_4 entsprechen. Hierzu sind die Gleichungen:

$$(2.) \quad A_0 + A_1 \alpha_k + A_2 \alpha_k^2 - B_1 \alpha_k z_k = (B_0 + B_2 \alpha_k^2) z_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

zu erfüllen. Zu diesen fügen wir die Bestimmung:

$$(3.) \quad A_0 B_2 - A_2 B_0 = 0$$

hinzu. Aus den Gleichungen (2.) folgt:

$$(4.) \quad \begin{cases} \mathcal{A}A_i = z_i B_0 + \lambda_i B_2, & (i = 0, 1, 2) \\ \mathcal{A}B_1 = z_3 B_0 + \lambda_3 B_2, \end{cases}$$

wo

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & -\alpha_1 z_1 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & -\alpha_2 z_2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & -\alpha_3 z_3 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & -\alpha_4 z_4 \end{vmatrix}$$

und z_i , λ_i aus \mathcal{A} hervorgehen, wenn man die $i+1^{\text{te}}$ Verticalreihe resp. durch z_1 , z_2 , z_3 , z_4 und $\alpha_1^2 z_1$, $\alpha_2^2 z_2$, $\alpha_3^2 z_3$, $\alpha_4^2 z_4$ ersetzt.

Die Bestimmung ist immer ausführbar, wenn α_1 , α_2 , α_3 , α_4 so gewählt werden, dass \mathcal{A} nicht verschwindet, was immer möglich ist.

Es seien w und w_1 zwei Werthe von w , welchen dasselbe z zugehört, so folgt aus Gleichung (1.) mit Rücksicht auf (3.)

$$(5.) \quad B_0 - B_2 w w_1 = 0.$$

Beschreibt daher w um den Nullpunkt einen Kreis mit dem Radius r , so beschreibt w_1 ebenfalls einen Kreis, dessen Radius gleich $\frac{1}{r} \bmod. \frac{B_0}{B_2}$.

Hieraus folgt, ähnlich wie in No. 3, dass innerhalb des Kreises K mit dem Radius

$$(6.) \quad R = \sqrt{\bmod. \frac{B_0}{B_2}}$$

nicht zwei verschiedenen Werthen w gleiche Werthe z entsprechen können.

Dieser Kreis ist also der zur Function (1.) gehörige Grenzkreis in dem Sinne der No. 1.

Durch Substitution der Werthe von A_0 und A_2 aus (4.) in (3.) erhält man:

$$(7.) \quad z_2 B_0^2 + (\lambda_2 - z_0) B_0 B_2 - \lambda_0 B_2^2 = 0.$$

Nun ergibt sich aber

$$(8.) \quad \lambda_0 = -z_2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4,$$

also

$$(9.) \quad \bmod. \lambda_0 = \bmod. z_2.$$

Demnach ist der Modul des Products der beiden Wurzeln $\frac{B_0}{B_2}$ der Glei-

chung (7.) gleich Eins, also die eine grösser und die andere kleiner als Eins, oder beide gleich Eins.

Die beiden Werthe w_1 und w_2 , für welche z unendlich wird, sind durch die Gleichung

$$(10.) \quad w^2 + \frac{B_1}{B_2}w + \frac{B_0}{B_2} = 0$$

gegeben. Da hiernach

$$(11.) \quad \text{mod. } w_1 w_2 = \text{mod. } \frac{B_0}{B_2} = R^2,$$

so ist

$$\text{mod. } w_1 \geq R, \quad \text{mod. } w_2 \leq R,$$

d. h. von diesen beiden Werthen befindet sich der eine innerhalb, der andere ausserhalb des Grenzkreises, oder beide auf dem Umfange desselben.

Es sei C diejenige geschlossene Curve in der z Ebene, welche dem Grenzkreise K entspricht, und F' derjenige Flächentheil der von derselben zerschnittenen unendlichen z Ebene, welche den Punkt $z = \frac{A_0}{B_0}$ enthält, so ist das Innere von K eine Abbildung von F' . Aus Gleichung (5.) ergibt sich, dass auch das Aeussere von K Abbildung von F' ist.

Wenn $R \geq 1$, so wollen wir das Innere von K , wenn $R < 1$, das Aeussere mit φ bezeichnen.

Es sei ferner E der mit dem Radius Eins um den Nullpunkt der w beschriebene Kreis, so fällt die zugehörige Curve C_e in der z Ebene ganz in F' . Je nachdem $R \geq 1$ oder $R < 1$, bezeichnen wir das Innere oder das Aeussere des Kreises E mit ψ , während der von C_e abgegrenzte Flächentheil von F' , welcher den Punkt $z_0 = \frac{A_0}{B_0}$ enthält, mit ε bezeichnet werden soll.

Die Flächentheile ψ und ε , so wie die Reste $F' - \varepsilon$ und $\varphi - \psi$ sind Abbildungen von einander.

In dem Falle, dass w_2 innerhalb ψ sich befindet, entspricht ein excentrischer Punkt w_2 der Fläche ψ dem Unendlichkeitspunkte von z . Allein man kann durch Anwendung einer linearen Substitution die Fläche ψ und einen daran anstossenden Ringflächentheil, welcher einen Theil des von K und E gebildeten Ringes ausmacht und seinerseits von E und einem den Nullpunkt umgebenden excentrischen Kreise begrenzt wird, so abbilden, dass der Fläche ψ eine Kreisfläche E' , dem Punkte w_2 der Mittelpunkt des letzteren Kreises, endlich dem Ringflächentheile ein Kreisring entspricht, der vom Kreise E'

und einem ihn umgebenden concentrischen Kreise gebildet wird. Dieses wollen wir in der folgenden Nummer nachweisen.

15.

Setzen wir

$$(1.) \quad w = w_2 + \frac{t}{a + bt}$$

und bestimmen a und b so, dass, wenn t sich auf der Peripherie eines um den Nullpunkt der complexen Variablen t mit dem Radius Eins beschriebenen Kreises E' bewegt, w die Peripherie des Kreises E beschreibt.

Aus (1.) folgt:

$$(2.) \quad t = \frac{-aw_2 + aw}{1 + bw_2 - bw}.$$

Bezeichnet man die conjugirten complexen Werthe mit oberen Accenten, so ist für solche t , die auf der Peripherie E' liegen:

$$(3.) \quad tt' = 1.$$

Für die zugehörigen Werthe w ergibt sich aus den Gleichungen (2.) und (3.)

$$(4.) \quad \left\{ \begin{aligned} (aa' - bb')ww' - [(aa' - bb')w_2' - b]w - [(aa' - bb')w_2 - b']w' \\ + (aa' - bb')w_2w_2' - bw_2 - b'w_2' - 1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Die Forderung, dass diese Gleichung den Kreis E darstellen soll, liefert die Gleichungen

$$(5.) \quad \left\{ \begin{aligned} (aa' - bb')w_2' - b &= 0, \\ (aa' - bb')w_2w_2' - bw_2 - b'w_2' - 1 &= bb' - aa'. \end{aligned} \right.$$

Aus diesen beiden Gleichungen in Verbindung mit den sich daraus durch Vertauschung von i mit $-i$ ergebenden folgt:

$$(6.) \quad b = \frac{w_2'}{1 - w_2w_2'}, \quad aa' = \frac{1}{(1 - w_2w_2')^2}.$$

Die erste Gleichung liefert für b einen endlichen Werth, da in unserem Falle

$$w_2w_2' = (\text{mod. } w_2)^2 \leq 1.$$

Die zweite Gleichung (6.) liefert den Modul von a , während das Argument dieser Grösse unbestimmt bleibt.

Da für $t = 0$, $w = w_2$ einen Punkt im Inneren von ψ darstellt, so ist das Innere des Kreises E' das Bild der Fläche ψ .

Irgend einem um den Anfang der t mit dem Radius r beschriebenen Kreise in der t Ebene entspricht nach den Relationen (1.) und (6.) ein Kreis

in der w Ebene, dessen Gleichung:

$$(7.) \quad (1-r^2 w_2 w'_2) w w' - (1-r^2) w'_2 w - (1-r^2) w_2 w' + w_2 w'_2 - r^2 = 0,$$

welcher mit dem Kreise E excentrisch ist und denselben nicht schneidet.

Ist $R > 1$, so ist $r > 1$, ist $R < 1$, so ist $r < 1$, und in beiden Fällen so gross zu wählen, dass der Kreis (7.) noch ganz in der Fläche φ befindlich ist, damit der Ring zwischen dem Kreise E' und dem mit r beschriebenen Kreise K' die Abbildung des vom Kreise K und von dem durch die Gleichung (7.) dargestellten Kreise gebildeten excentrischen Ringes.

Man kann übrigens $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ stets so wählen, dass die Wurzeln der Gleichung (7.) vor. Nummer nicht gleich werden. Nimmt man alsdann für $\frac{B_0}{B_2}$ diejenige Wurzel, deren Modul grösser als Eins, so ist auch der Radius des Grenzkreises grösser als Eins (s. Gleichung (6.) vor. Nummer).

II. Abtheilung.

1.

Es sei $f(z)$ eine Function, welche nur eine endliche Anzahl von Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkten enthält. Soll dieselbe von einem Punkte A bis zu einem Punkte B der z Ebene fortgesetzt werden, so geschieht dieses bekanntlich mittelst des *Taylor'schen* Satzes angewendet auf eine Reihe von Kreisen, welche den Unstetigkeits- und Verzweigungspunkten ausweichen und zusammen das zwischen A und B sich erstreckende Curvenstück enthalten. Dieses Verfahren ist, abgesehen von seiner Beschwerlichkeit in praktischer Beziehung, nicht geeignet a priori über den Zusammenhang der Werthe der Function in den beiden Grenzen des von A nach B sich erstreckenden Weges eine Vorstellung zu verschaffen.

Theilt man die Ebene in eine gewisse Anzahl Gebiete G derart, dass eine einheitliche, für alle Fortsetzungswege direct brauchbare analytische Darstellung innerhalb eines jeden derselben und gleichzeitig das Gesetz des Ueberganges aus einem Gebiete in das andere bekannt ist, so kann man den Werth in B angeben, sobald der in A und der Weg L , der von A nach B führt, gegeben ist, ohne erst alle Zwischenstufen von Werthen, welche den übrigen Punkten von L angehören, zu bestimmen.

Die einfachste Art einer solchen Darstellung würde im Allgemeinen

diejenige sein, für welche die Anzahl der Gebiete G den kleinsten Werth hat. Diese kleinste Zahl ist zwei.

Wir wollen in der That zeigen, wie man die Ebene z in zwei Gebiete G_1 und G_2 zerlegen kann derart, dass innerhalb eines jeden dieser Gebiete eine einheitliche analytische Darstellungsweise der angegebenen Art vorhanden ist, und ihr Zusammenhang durch die analytische Natur der Function $f(z)$ vermittelt wird.

2.

Sind nämlich $z_1, z_2, \dots z_{m+1}$ die endlichen Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkte (singulären Punkte) der Function $f(z)$ und

$$(1.) \quad z = F(w),$$

wo $F(w)$ die in No. 11, Abth. I. angeführten Eigenschaften besitzt, so wird der zur Substitution (1.) zugehörige Absonderungsschnitt C_c die sämtlichen Punkte $z_1, z_2, \dots z_{m+1}$ in sich aufnehmen und die Ebene z in zwei einfach zusammenhängende Gebiete G_1, G_2 theilen, wovon das erstere sich ins Unendliche erstreckt, das letztere von endlicher Ausdehnung ist.

Der Punkt $z = \infty$ ist im Allgemeinen auch ein singulärer Punkt der Function $f(z)$, demnach auch der Punkt $w = 0$ im Allgemeinen ein singulärer Punkt von

$$f(F(w)) = f_1(w),$$

ausserdem sind in der Fläche des Kreises E nur noch die auf der Peripherie desselben liegenden $m+1^{\text{ten}}$ Wurzeln der Einheit $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+1}$ singuläre Punkte der Function $f_1(w)$.

Es werde nun vorausgesetzt, dass es in der Umgebung von $w = 0$ eine Darstellung der Function $f_1(w)$ gebe,

$$(2.) \quad f_1(w) = \psi_0(w),$$

so ist diese innerhalb E gültig.

Ist alsdann w_0 diejenige Wurzel der Gleichung (1.), welche für $z = \infty$ verschwindet, so ist

$$(3.) \quad f(z) = \psi_0(w_0)$$

eine Darstellung der Function $f(z)$ für das Gebiet G_1 , da die Kreisfläche E und das Gebiet G_1 Abbildungen von einander sind.

Innerhalb des Gebietes G_2 ist die Function $f(z)$ eindeutig, endlich und

continuirlich. Es ist demnach

$$(4.) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{t-z} dt,$$

das Integral erstreckt über den inneren Rand des Absonderungsschnittes C_e . Da der Ring zwischen C_e und der ganz von C_e umschlossenen Grenzcurve C und der Kreisring zwischen E und dem Grenzkreise K Abbildungen von einander sind, so ist auch

$$(5.) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_1(w)}{F(w)-z} \cdot F'(w) dw,$$

das Integral über den äusseren Rand des Kreises E erstreckt.

Die Function $f_1(w)$ ist innerhalb des Kreisinges zwischen K und E eindeutig, endlich und continuirlich, ist also in diesem Gebiete nach ganzen positiven und negativen Potenzen von w entwickelbar. Die Bestimmung der Coefficienten dieser Entwicklung ist namentlich von dem Verhalten von $f_1(w)$ in der Umgebung der singulären Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+1}$ abhängig.

Da die Function $f_1(w)$ am inneren Rande von E durch die Entwicklung (2.) berechenbar ist, so kann ihre Bestimmung am äusseren Rande auch erfolgen vermittelt der Entwicklung (2.) unter Zuhülfenahme der Beziehungen, welche für den Umlauf von w um je einen Punkt α sich ergeben.

Es sind demnach auf die eine oder andere Weise die Functionswerthe am äusseren Rande von E bekannt, und der Ausdruck (5.) giebt die Entwicklung von $f(z)$ im Gebiete G_2 .

Wird die Function $f(z)$ aus dem einen der Gebiete G_1 und G_2 in das andere fortgesetzt, so lässt sich zu dem Werthe der Function am Anfang des Weges der Werth am Ende desselben resp. vermittelt der Entwicklungen (3.) und (5.) bestimmen, ohne dass die Functionswerthe für die Zwischenpunkte des Weges zu berechnen wären, wenn nur das Verhalten der Function in der Umgebung der singulären Punkte $z_1, z_2, \dots z_{m+1}$ bekannt ist.

3.

Die Entwicklung (2.) vor. Nummer ist mit Hülfe der algebraischen Function w_0 von z gebildet. Die Entwickelbarkeit im Gebiete G_1 ist also von der Kenntniss der Function w_0 innerhalb desselben Gebietes abhängig. Die algebraischen Functionen dürfen jedoch bei der Darstellung transcender Functionen mit Recht als bekannte Elemente vorausgesetzt und verwendet werden.

In gewissen besonderen Fällen lässt sich w_0 durch die *Lagrangesche* Reihe bestimmen.

Ist nämlich r der kleinste Radius der um den Anfang der z beschriebenen Kreise, welche die sämtlichen Werthe von z einschliessen, für die die Gleichung (1.) vor. Nummer gleiche Wurzeln w besitzt, so ist w_0 mit Hülfe der *Lagrangeschen* Reihe für die Fläche ausserhalb des Kreises mit dem Radius r nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickelbar. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich nach den *Cauchyschen* Principien (man vergl. die elegante Abhandlung des Herrn *Rouché*: sur la série de *Lagrange*. Journ. de l'école polytechn., cah. 39, p. 193 sqq., auch aufgenommen in *Serret*, cours d'algèbre supérieure, 3. édition, p. 462 sqq.).

Gelingt es nun in besonderen Fällen die Function $F(w)$ so zu bestimmen, dass der Absonderungsschnitt C_c ganz in dieses Gebiet, für welches die *Lagrangesche* Reihe gilt, hineinfällt, so gilt dieselbe a potiori im Gebiete G_1 , welches alsdann ein Theil jenes ersteren Gebietes ist.

4.

Wir machen nunmehr von den vorhergehenden Principien Anwendung auf die Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

Es sei gegeben die Differentialgleichung

$$(1.) \quad p_n \frac{d^n y}{dz^n} + p_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + p_0 y = 0,$$

deren Coefficienten p_n, p_{n-1}, \dots, p_0 ganze rationale Functionen von z sind. Alsdann sind ausser $z = \infty$ die einzigen singulären Punkte der Integrale derselben die Wurzeln der Gleichung:

$$(2.) \quad p_n = 0 \quad (\text{vergl. meine Abh., dieses Journal Bd. 66, No. 1}).$$

Dieselben seien z_1, z_2, \dots, z_{m+1} .

Es sei

$$(3.) \quad z = F(w),$$

wo $F(w)$ die in No. 11, Abth. I. charakterisirte rationale Function bedeutet, und es werde durch die singulären Punkte die zur Substitution (3.) gehörige Absonderungcurve C_c gelegt und dadurch die z Ebene in die beiden in No. 2 charakterisirten Gebiete G_1 und G_2 getheilt.

Es sollen folgende Aufgaben gelöst werden:

I. Eine analytische Darstellung eines Fundamentalsystems von Integralen der Differentialgleichung (1.): $y_1, y_2, \dots y_n$ gültig für das Gebiet G_1 zu finden.

II. Eine analytische Darstellung eines Fundamentalsystems von Integralen der Differentialgleichung (1.): $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ gültig innerhalb des Gebietes G_2 anzugeben.

III. Den Uebergang von dem einen der beiden Systeme zu dem anderen längs einer vorgeschriebenen den Absonderungsschnitt überschreitenden Linie zu bestimmen.

5.

Substituirt man für z den Werth aus Gleichung (3.) vor. Nummer in die Differentialgleichung vor. Nummer, so erhält man:

$$(1.) \quad \Psi(w)^{n-1} [w g(w)]^\lambda R(w) \frac{d^n y}{dw^n} + q_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dw^{n-1}} + q_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dw^{n-2}} + \dots + q_0 y = 0,$$

worin die Coefficienten der Ableitungen von y ganze rationale Functionen von w sind, und zwar ist $R(w)$ der Zähler des Resultats der Substitution von z aus Gleichung (3.) vor. Nummer in p_n , ferner

$$(2.) \quad \Psi(w) = w g(w) f'(w) - f(w) [g(w) + w g'(w)],$$

wo $f(w)$ und $g(w)$ die in No. 5—10 Abth. I. bestimmten Functionen und $f'(w)$, $g'(w)$ ihre Ableitungen bedeuten. Der Exponent λ ist abhängig vom Grade der Functionen $p_n, p_{n-1}, \dots p_0$.

Die endlichen singulären Punkte der Differentialgleichung (1.) sind:

1) die Wurzeln der Gleichung:

$$\Psi(w) = 0$$

oder, was dasselbe bedeutet, die Wurzeln der Gleichung:

$$(3.) \quad F'(w) = 0;$$

2) der Punkt $w = 0$ und die Wurzeln der Gleichung

$$(4.) \quad g(w) = 0;$$

3) die Werthe w , für welche z einen der Werthe $z_1, z_2, \dots z_{m+1}$ erhält. Der Definition des Grenzkreises K gemäss befindet sich innerhalb desselben keiner der singulären Punkte No. 1), folglich enthält um so weniger die Kreisfläche E einen derselben.

Da ferner der Definition des Grenzkreises gemäss nicht zwei verschiedenen Punkten innerhalb desselben ein und derselbe Werth z entspricht, so folgt, dass von den verschiedenen Werthen w , welche je einem Punkte $z_1, z_2, \dots z_{m+1}$ entsprechen, nur je einer, nämlich die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+1}$ auf der Peripherie des Kreises E sich innerhalb K befinden.

Endlich ist von den singulären Punkten No. 2) nur der Punkt $w = 0$ innerhalb K gelegen, da die Wurzeln der Gleichung (4.) ausserhalb K befindlich sind (s. No. 1 Abth. I.).

In meinen Abhandlungen, dieses Journal, Bd. 66, No. 3 und Bd. 68, No. 1, ist gezeigt, dass es ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) $y_1, y_2, \dots y_n$ von der Beschaffenheit giebt, dass sein Ausdruck in der Umgebung von $w = 0$ ist:

$$(5.) \quad y_a = w^{k_a} \cdot \varphi_a, \quad a = 1, 2, \dots n$$

wo k_a das $\frac{1}{2\pi i}$ fache des Logarithmus der a^{ten} Wurzel der dort (Bd. 66, No. 3) als Fundamentalgleichung charakterisirten Gleichung n^{ten} Grades und φ_a eine in der Umgebung von $w = 0$ eindeutige Function bedeutet, wenn nämlich die Wurzeln der Fundamentalgleichung sämmtlich verschieden sind.

Sind dagegen λ Wurzeln $k_1, k_2, \dots k_\lambda$ gleich k , so treten an die Stelle der Elemente $y_1, y_2, \dots y_\lambda$ in Gleichung (5.) die folgenden:

$$(5^a.) \quad y_a = w^k \sum_1^a \varphi_{ab} (\log w)^{b-1}, \quad a = 1, 2, \dots \lambda,$$

wo φ_{ab} in der Umgebung von $w = 0$ ebenfalls eindeutig ist.

Die Umgebung des Punktes $w = 0$ ist im vorliegenden Falle die ganze Kreisfläche E , die Begrenzung ausgeschlossen. Deshalb sind die Ausdrücke (5.) und (5^a.) für diese ganze Fläche gültig.

Bekanntlich lassen sich die Functionen φ_a und φ_{ab} nach ganzen positiven und negativen Potenzen von w entwickeln. Substituirt man also nach Vorschrift der No. 2 für w die Wurzel w_0 in die Ausdrücke (5.) und (5^a.), so erhält man eine analytische Darstellung eines Fundamentalsystems von Integralen der Differentialgleichung (1.) No. 4, $y_1, y_2, \dots y_n$, gültig für das Gebiet G_1 , wie es in der Aufgabe I. No. 4 verlangt wurde.

6.

Wie in meinen oben erwähnten Abhandlungen l. c. nachgewiesen, giebt es ebenso wie zum Punkte $w = 0$ zu den singulären Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+1}$

je ein zugehöriges Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) vor. Nummer, dessen Darstellung in der Umgebung des zugehörigen singulären Punktes analog den Formen (5.) und (5^a.) vor. Nummer sind. Das zum singulären Punkte α_x zugehörige Fundamentalsystem werde mit $y_{x1}, y_{x2}, \dots y_{xn}$ bezeichnet.

Da sich jedes Integral linear, homogen und mit constanten Coefficienten durch die Elemente eines Fundamentalsystems darstellen lässt, so hat man Gleichungen von folgender Form:

$$(1.) \quad y_a = \sum_{x=1}^n b_{ac}^{(x)} y_{xc} \quad \begin{matrix} a = 1, 2, \dots n, \\ x = 1, 2, \dots m+1. \end{matrix}$$

Es ist unsere Aufgabe, die Grössen $b_{ac}^{(x)}$ zu bestimmen.

Es sei $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n$ irgend ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) vor. Nummer, und man setze:

$$(2.) \quad \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1}\zeta_1}{dw^{n-1}} & \frac{d^{n-2}\zeta_1}{dw^{n-2}} & \dots & \zeta_1 \\ \frac{d^{n-1}\zeta_2}{dw^{n-1}} & \frac{d^{n-2}\zeta_2}{dw^{n-2}} & \dots & \zeta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^{n-1}\zeta_n}{dw^{n-1}} & \frac{d^{n-2}\zeta_n}{dw^{n-2}} & \dots & \zeta_n \end{vmatrix} = D(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n)$$

und

$$(3.) \quad e^{-\int \frac{q_{n-1}}{\Psi(w)^{n-1} [w\eta(w)]^2 R(w)} dw} = \chi(w),$$

so ist

$$(4.) \quad D(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n) = C\chi(w),$$

wo C von w unabhängig ist (vergl. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 2).

Nachdem über die additive Constante des in Gleichung (3.) enthaltenen Integrals ein für allemal verfügt worden, ist die Constante C in Gleichung (4.) vollständig bestimmt, wenn das Fundamentalsystem $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n$ gegeben ist. Der Werth dieser Constanten für das Fundamentalsystem $y_{x1}, y_{x2}, \dots y_{xn}$ sei $C^{(x)}$; man hat alsdann die Gleichung:

$$(5.) \quad D(y_{x1}, y_{x2}, \dots y_{xn}) = C^{(x)}\chi(w).$$

Die Constanten $C^{(x)}$ sind von Null verschieden, und die Function $\chi(w)$ wird für Werthe von w , die nicht zu den singulären gehören, weder Null noch unendlich (vergl. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 2).

Ersetzt man in $D(y_{x1}, y_{x2}, \dots y_{xn})$ das Element y_{xc} durch y_a , so erhält man aus Gleichung (1.) und den $n-1$ ersten Ableitungen derselben:

$$(6.) \quad D(y_{x1}, \dots y_{xc-1}, y_a, y_{xc+1}, \dots y_{xn}) = h_{ac}^{(x)} \cdot D(y_{x1}, y_{x2}, \dots y_{xn}).$$

Setzt man

$$(7.) \quad D(y_{x1}, y_{x2}, \dots y_{xc-1}, y_a, y_{xc+1}, \dots y_{xn}) = C_{ca}^{(x)} \cdot \chi(w),$$

so ist $C_{ca}^{(x)}$ eine Constante, die Null oder von Null verschieden ist, je nachdem $y_{x1}, \dots y_{xc-1}, y_a, y_{xc+1}, \dots y_{xn}$ kein Fundamentalsystem darstellt oder ein solches darstellt (s. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 2).

Dividirt man die Gleichung (7.) durch die Gleichung (5.), so folgt:

$$(8.) \quad D(y_{x1}, \dots y_{xc-1}, y_a, y_{xc+1}, \dots y_{xn}) C^{(x)} = D(y_{x1}, y_{x2}, \dots y_{xn}) C_{ca}^{(x)}.$$

7.

Es sei um α_x ein Kreis (x) beschrieben, welcher ganz in der Fläche des Grenzkreises K sich befindet, und keinen der übrigen singulären Punkte enthält, so sind die oben (vor. Nummer) erwähnten Reihenentwicklungen des Fundamentalsystems $y_{x1}, y_{x2}, \dots y_{xn}$ innerhalb des Kreises (x) gültig, also für jeden Punkt seiner Fläche ausser α_x diese Functionen nebst ihren Ableitungen bestimmbar. Ist α ein von α_x verschiedener Punkt des gemeinsamen Flächentheils von (x) und E , so sind für diesen Punkt nach den beiden vorhergehenden Nummern sowohl die Reihenentwicklungen für $y_1, y_2, \dots y_n$, als auch die für $y_{x1}, y_{x2}, \dots y_{xn}$ gültig.

Setzt man daher in Gleichung (8.) vor. Nummer α statt w , und deutet dieses durch Hinzufügung des Index α an, so liefern die Gleichungen:

$$(1.) \quad D(y_{x1}, y_{x2}, \dots y_{xn})_{\alpha} C_{ca}^{(x)} = D(y_{x1}, \dots y_{xc-1}, y_a, y_{xc+1}, \dots y_{xn})_{\alpha} C^{(x)} \\ \alpha = 1, 2, \dots n, \quad c = 1, 2, \dots n, \quad x = 1, 2, \dots m+1$$

die Verhältnisse $C_{ca}^{(x)} : C^{(x)}$.

Setzt man ebenso in Gleichung (6.) vor. Nummer α für w , so folgt:

$$(2.) \quad D(y_{x1}, y_{x2}, \dots y_{xn})_{\alpha} h_{ac}^{(x)} = D(y_{x1}, \dots y_{xc-1}, y_a, y_{xc+1}, \dots y_{xn})_{\alpha}.$$

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) ergibt sich

$$(3.) \quad C^{(x)} h_{ac}^{(x)} = C_{ca}^{(x)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots n, \quad c = 1, 2, \dots n, \quad x = 1, 2, \dots m+1.$$

Aus No. 6 folgt auch, dass die Verhältnisse $C_{ca}^{(x)} : C^{(x)}$ von α unabhängig sind.

8.

Gehört die Differentialgleichung (1.) No. 4 zur Klasse derjenigen, die ich in meiner Abhandlung, Bd. 66, No. 4 dahin charakterisirt habe, dass ihre

Integrale für irgend einen singulären Punkt a nach Multiplication mit einer bestimmten Potenz von $z-a$ und für $z = \infty$ nach Multiplication mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{z}$ nicht mehr unendlich sind, so kann die Bestimmung der Grössen $b_{ac}^{(*)}$ vereinfacht werden.

Es sei wiederum α_x einer der auf der Peripherie von E liegenden singulären Punkte, $r_1, r_2, \dots r_n$ die n Wurzeln der zu diesem gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (1.) No. 5, sowie $\eta_{x1}, \eta_{x2}, \dots \eta_{xn}$ das Fundamentalsystem von Integralen derselben Differentialgleichung, dessen Elemente der Reihe nach zu den obigen Wurzeln als Exponenten gehören (s. meine Abhandlung, Bd. 66 No. 4 und Bd. 68 No. 4), und es werde vorausgesetzt, dass die Grössen r so geordnet sind, dass der reelle Theil von r_b nicht kleiner ist als der reelle Theil von r_a , wenn $b > a$. Man hat alsdann innerhalb (x) :

$$(1.) \quad \eta_{xa} = (w - \alpha_x)^{r_a} G_a(w),$$

wo $G_a(w)$ die Form hat:

$$(2.) \quad G_a(w) = \psi_0 + \psi_1 \log(w - \alpha_x) + \psi_2 [\log(w - \alpha_x)]^2 + \dots + \psi_\lambda [\log(w - \alpha_x)]^\lambda,$$

in welcher $\psi_0, \psi_1, \dots \psi_\lambda$ nach positiven ganzzahligen Potenzen von $w - \alpha_x$ fortschreitende Reihen vorstellen, welche für $w = \alpha_x$ nicht gleichzeitig verschwinden (s. meine Abhandlung, Bd. 66).

Ebenso seien die Wurzeln der zum singulären Punkte $w = 0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung $r_1, r_2, \dots r_n$, so ist innerhalb E

$$(3.) \quad \eta_a = w^{r_a} H_a,$$

wo H_a die Form hat

$$(4.) \quad H_a = \tau_0 + \tau_1 \log w + \tau_2 (\log w)^2 + \dots + \tau_\lambda (\log w)^\lambda,$$

in welcher $\tau_0, \tau_1, \dots \tau_\lambda$ nach positiven ganzzahligen Potenzen fortschreitende Reihen sind, die für $w = 0$ nicht sämmtlich verschwinden.

9.

Multiplicirt man die 1^{te}, 2^{te}, \dots n^{te} Horizontalreihe der Determinante $D(\eta_{x1}, \eta_{x2}, \dots \eta_{xn})$ resp. mit $(w - \alpha_x)^{-r_1}, (w - \alpha_x)^{-r_2}, \dots (w - \alpha_x)^{-r_n}$, ferner die 1^{te}, 2^{te}, \dots n^{te} Verticalreihe resp. mit $(w - \alpha_x)^{n-1}, (w - \alpha_x)^{n-2}, \dots (w - \alpha_x)^0$, so sind die einzelnen Elemente der transformirten Determinante für $w = \alpha_x$ nur unendlich wie ein Ausdruck

$$L = a + b \log(w - \alpha_x) + \dots + l [\log(w - \alpha_x)]^s,$$

(s. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 6), und der Ausdruck

$$(1.) \quad D(\eta_{x1}, \eta_{x2}, \dots \eta_{xn})(w - \alpha_x) \quad - \sum_i r_i + \frac{n(n-1)}{2}$$

für $w = \alpha_x$ weder Null noch unendlich (s. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 4).

Hieraus folgt auch, dass zur Berechnung des Ausdruckes (1.) für $w = \alpha_x$ nicht die Kenntniss der gesammten Reihenentwicklungen von $\eta_{x1}, \eta_{x2}, \dots \eta_{xn}$ nöthig ist, dass es vielmehr genügt, von jeder derselben nur die n ersten Glieder zu ermitteln, und dass die übrigen Glieder, da sie zum Ausdrucke (1.) für $w = \alpha_x$ nichts beitragen, bei der Berechnung desselben wegzulassen sind.

Der Werth des Ausdruckes (1.) für $w = \alpha_x$ heisse $I^{(x)}$.

Aus Gleichung (8.) No. 6 und vor. Nummer ergibt sich, dass der Ausdruck

$$(2.) \quad D(\eta_{x1}, \dots \eta_{xc-1}, \eta_a, \eta_{xc+1}, \dots \eta_{xn})(w - \alpha_x) \quad - \sum_i r_i + \frac{n(n-1)}{2}$$

für $w = \alpha_x$ nicht unendlich wird.

Multiplicirt man aber die 1^{te}, 2^{te}, $c-1$ ^{te}, $c+1$ ^{te}, ... n ^{te} Horizontalreihe von $D(\eta_{x1}, \dots \eta_{xc-1}, \eta_a, \eta_{xc+1}, \dots \eta_{xn})$ resp. mit $(w - \alpha_x)^{-r_1}, (w - \alpha_x)^{-r_2}, \dots (w - \alpha_x)^{-r_{c-1}}, (w - \alpha_x)^{-r_{c+1}}, \dots (w - \alpha_x)^{-r_n}$, ferner die 1^{te}, 2^{te}, ... n ^{te} Verticalreihe resp. mit $(w - \alpha_x)^{n-1}, (w - \alpha_x)^{n-2}, \dots (w - \alpha_x)^0$, so ist also die so transformirte Determinante mit $(w - \alpha_x)^{-r_c}$ multiplicirt für $w = \alpha_x$ endlich. Die einzelnen Elemente dieser Determinante ausser denen der c ^{ten} Horizontalreihe sind für $w = \alpha_x$ nur unendlich wie ein Ausdruck L . — Nach der zwischen η_a und den η_{xc} bestehenden Beziehung (1.) No. 6 und vor. Nummer enthalten die einzelnen Glieder der c ^{ten} Verticalreihe mit $(w - \alpha_x)^{-r_1}$ multiplicirt nur Potenzen von $w - \alpha_x$, deren Exponenten in ihrem reellen Theile nicht negativ sind. Sind daher $U_1, U_2, \dots U_n$ die Unterdeterminanten der transformirten Determinante nach der c ^{ten} Horizontalreihe, so liefern nur diejenigen Anfangsglieder der Reihenentwicklungen für $\eta_{x1}, \eta_{x2}, \dots \eta_{xn}$ zum Ausdrucke (2.) für $w = \alpha_x$ nicht verschwindende Beiträge, welche in den Entwicklungen der $U_1, U_2, \dots U_n$ Potenzen von $w - \alpha_x$ hervorbringen, deren Exponenten nicht grösser sind als der reelle Theil von $r_c - r_1$.

Die Potenzen von $w - \alpha_x$ und $\log(w - \alpha_x)$ lassen sich innerhalb E in Reihen, welche nach positiven ganzen Potenzen von w fortschreiten, entwickeln, weil $\text{mod. } w < \text{mod. } \alpha_x$ innerhalb E .

Ebenso gelten für die Integrale η_a in der Umgebung von $w = 0$, also

innerhalb E Reihenentwickelungen nach Potenzen von w und $\log w$ von der in Gleichung (3.) vor. Nummer angegebenen Form.

Man behalte nun zur Berechnung des Ausdrucks (2.) für $w = \alpha_x$ von den Reihenentwickelungen der Integrale $\eta_{x1}, \eta_{x2}, \dots, \eta_{xn}$ nur so viele Anfangsglieder bei, dass die Exponenten der Potenzen von $w - \alpha_x$ in den Entwickelungen der U_1, U_2, \dots, U_n nicht grösser sind als der reelle Theil von $r_i - r_1$, entwickle alsdann die sämmtlichen im Ausdrucke (2.) verbleibenden Potenzen von $w - \alpha_x$ und die Potenzen von $\log(w - \alpha_x)$ nach Potenzen von w , und setze auch für η_a die Reihe (3.) vor. Nummer, so nimmt der Ausdruck (2.) folgende Form an:

$$(3.) \quad \varrho_{ac}^{(0)}(w) + \varrho_{ac}^{(1)}(w) \log w + \dots + \varrho_{ac}^{(i)}(w) [\log w]^i,$$

wo $\varrho_{ac}^{(0)}(w), \varrho_{ac}^{(1)}(w), \dots, \varrho_{ac}^{(i)}(w)$ nach Potenzen von w fortschreitende Reihen bedeuten, die innerhalb E convergent sind. Da aber der Ausdruck (2.) für $w = \alpha_x$ endlich ist, so folgt, dass auch die Form (3.) für $w = \alpha_x$ endlich ist.

Multiplicirt man daher die Gleichung (8.) No. 6 beiderseits mit

$$(w - \alpha_x)^{-\sum_i r_i + \frac{n(n-1)}{2}},$$

und setzt $w = \alpha_x$, so ergibt sich:

$$(4.) \quad \frac{C_{ca}^{(x)}}{C^{(x)}} = \frac{\varrho_{ac}^{(0)}(\alpha_x) + \varrho_{ac}^{(1)}(\alpha_x) \log \alpha_x + \dots + \varrho_{ac}^{(i)}(\alpha_x) [\log \alpha_x]^i}{I^{(x)}}.$$

Aus den Gleichungen (5.), (6.), (7.) No. 6 folgt aber

$$(5.) \quad b_{ac}^{(x)} = \frac{C_{ca}^{(x)}}{C^{(x)}},$$

so dass der Ausdruck (4.) den Werth von $b_{ac}^{(x)}$ liefert.

10.

Die durch Gleichung (1.) No. 6 festgestellten Relationen zwischen den η_a und den $\eta_{x\epsilon}$ lassen sich unmittelbar als Relationen zwischen dem zum singulären Punkte $z = \infty$ zugehörigen Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) No. 4 y_1, y_2, \dots, y_n und dem zum singulären Punkte $z = z_x$ zugehörigen Fundamentalsystem von Integralen derselben Differentialgleichung $y_{x1}, y_{x2}, \dots, y_{xn}$ darstellen.

Setzt man in der That in Gleichung (1.) No. 6 für w die Wurzel w_0 der Gleichung (3.) No. 4, welche für $z = \infty$ verschwindet, so gehen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ in y_1, y_2, \dots, y_n über, welche innerhalb G_1 dargestellt sind (s. No. 5 am Ende). Durch dieselbe Substitution für w gehen aber auch die in der Umgebung von α_x dargestellten Integrale $\eta_{x1}, \eta_{x2}, \dots, \eta_{xn}$ in $y_{x1}, y_{x2}, \dots, y_{xn}$ über, und es

verwandeln sich die Darstellungen der ersteren in der Umgebung von α_* in Darstellungen der letzteren in der Umgebung von z_* , da die erstere Umgebung ganz innerhalb des Grenzkreises K , die letztere innerhalb F' fällt.

Die Gleichungen (1.) No. 6 geben also:

$$(1.) \quad y_a = \sum_1^n b_{ac}^{(x)} y_{xc}, \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots n, \\ z = 1, 2, \dots m+1, \end{array}$$

wo die Grössen $b_{ac}^{(x)}$ durch die Gleichung (3.) No. 7, oder in dem Falle, dass die Differentialgleichung zu der in No. 8 erwähnten Klasse gehört, durch die Gleichungen (4.) und (5.) vor. Nummer bestimmt sind.

11.

Wir gehen nun dazu über, innerhalb G_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) No. 4 zur Darstellung zu bringen.

Zu dem Ende setzen wir das System y_a , welches innerhalb G_1 dargestellt worden, über die Absonderungscurve fort, und zwar längs eines zwischen zwei beliebigen der singulären Punkte $z_1, z_2, \dots z_{m+1}$ liegenden Theiles derselben, z. B. zwischen z_1 und z_2 . Nennen wir einen zwischen z_x und z_{x+1} liegenden Theil der Absonderungscurve l_x , so haben die Integrale y_a auf beiden Seiten von l_1 unendlich wenig von einander verschiedene Werthe, also sind die Werthe der y_a längs l_1 innerhalb G_2 durch dieselben Reihen No. 5 gegeben wie innerhalb G_1 .

Um die Ausdrücke für die y_a längs l_x innerhalb G_2 zu erhalten, verfahren wir folgendermassen:

Es gehe y_{xa} nach einem Umlaufe um z_x über in:

$$(1.) \quad y'_{xa} = \pi_{xa}^{(1)} y_{x1} + \pi_{xa}^{(2)} y_{x2} + \dots + \pi_{xa}^{(n)} y_{xn}, \quad a = 1, 2, \dots n,$$

so sind die Grössen π bestimmbar, nachdem das System $y_{x1}, y_{x2}, \dots y_{xn}$ aufgestellt ist. Bezeichnen wir die Substitution

$$(2.) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} \pi_{x1}^{(1)} & \pi_{x1}^{(2)} & \dots & \pi_{x1}^{(n)} \\ \pi_{x2}^{(1)} & \pi_{x2}^{(2)} & \dots & \pi_{x2}^{(n)} \\ \vdots & & & \\ \pi_{xn}^{(1)} & \pi_{xn}^{(2)} & \dots & \pi_{xn}^{(n)} \end{array} \right\}$$

mit Π_x , und die Substitution:

$$(3.) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} b_{11}^{(x)} & b_{12}^{(x)} & \dots & b_{1n}^{(x)} \\ b_{21}^{(x)} & b_{22}^{(x)} & \dots & b_{2n}^{(x)} \\ \vdots & & & \\ b_{n1}^{(x)} & b_{n2}^{(x)} & \dots & b_{nn}^{(x)} \end{array} \right\}$$

mit B_x , so wie die inverse Substitution der letzteren mit $B_x^{(-1)}$. Wendet man nunmehr auf $y_1, y_2, \dots y_n$ die Substitution

$$(4.) \quad B_2 \Pi_2 B_2^{(-1)} B_3 \Pi_3 B_3^{(-1)} \dots B_x \Pi_x B_x^{(-1)} = S_x$$

an, so erhält man die Werthe des fortgesetzten Fundamentalsystems längs l_x innerhalb G_2 , wenn man in den erhaltenen n linearen Functionen von $y_1, y_2, \dots y_n$ für die letzteren Functionen die Werthe der Reihen aus No. 5 für die Punkte längs l_x innerhalb G_1 setzt.

Hiermit sind die Werthe der y_a längs der Absonderungcurve innerhalb G_2 vermittelt der in No. 5 für das Gebiet G_1 bestimmten Reihen ausdrückbar.

12.

Da die Integrale der Differentialgleichung (1.) No. 4 innerhalb G_2 eindeutig, endlich und continuirlich sind, so ergibt sich als Darstellung der Fortsetzungen von $y_1, y_2, \dots y_n$ innerhalb G_2 :

$$(1.) \quad y_a = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{y_a(t)}{t-z} dt, \quad a = 1, 2, \dots n,$$

das Integral erstreckt über den innerhalb G_2 befindlichen Rand der Absonderungcurve C_e . Es bedeutet hierbei $y_a(t)$ die Function y_a , wenn statt der Variablen z die Variable t gesetzt wird.

Substituirt man in (1.)

$$(2.) \quad t = F(w) \quad (\text{s. No. 4 Gleichung (3.)}),$$

so erhält man

$$(3.) \quad y_a = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{y_a(w)}{F(w)-z} F'(w) dw,$$

das Integral über den äusseren Rand des Kreises E erstreckt.

Zur wirklichen Berechnung des Integrals (3.) zerlegt man dasselbe in Theilintegrale, erstreckt längs je eines Theiles λ_x der Peripherie, der zwischen α_x und α_{x+1} befindlich ist, so dass, wenn man ein solches Theilintegral mit A_x bezeichnet:

$$(4.) \quad y_a = \frac{1}{2\pi i} [A_1 + A_2 + \dots + A_{m+1}].$$

In der vor. Nummer ist aber gezeigt worden, wie $y_a(t)$ längs des Theiles l_x innerhalb G_2 , also, was dasselbe ist, $y_a(w)$ längs λ_x ausserhalb E mit Hülfe der Reihen, die in No. 5 für $y_1, y_2, \dots y_n$ oder, was dasselbe ist, für

$\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ gegeben worden, ausdrückbar ist. Diese Ausdrücke sind auch in die bezüglichen \mathcal{A}_x zu substituieren. Alsdann liefert Gleichung (4.) das in No. 4, II. geforderte Fundamentalsystem $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$.

13.

Nachdem wir nun in No. 5 und 12 für jedes der Gebiete G_1 und G_2 einheitliche analytische Darstellungen eines Fundamentalsystems von Integralen der Differentialgleichung (1.) No. 4 gegeben, von der Beschaffenheit, dass jede innerhalb des ganzen Gebietes G_1 oder G_2 gültig ist und innerhalb G_1 die den verschiedenen Umläufen um $z = \infty$ entsprechenden Werthe wie eine Potenzreihe liefern, muss noch, wie in No. 4, III. gefordert wurde, gezeigt werden, wie von dem einen Gebiete zu dem anderen übergegangen wird. Es ist demnach folgende Aufgabe zu lösen. *Eine Curve L führe von einem Punkte A_1 innerhalb G_1 zu einem Punkte A_2 innerhalb G_2 , nachdem sie ein oder mehrere Mal die Absonderungscurve überschritten. Gegeben seien die Indices der Curventheile l_x , welche überschritten werden, die Werthe der y_a in A_2 sollen unmittelbar berechnet werden, ohne die Werthe derselben für die Continuität der Zwischenwerthe der Curve L zu berechnen.*

Es überschreite L der Reihe nach die Absonderungscurve in den Theilen $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma, l_\delta, \dots l_\mu$, wo auch zwei oder mehrere Indices einander gleich sein können, wodurch das mehrfache Ueberschreiten eines Theiles einbegriffen ist. Hierbei wird L abwechselnd in G_2 ein- und austreten, und zuletzt längs l_μ eintreten. Nach No. 11 ist beim Eintritt aus G_1 in G_2 längs l_x auf das System $y_1, y_2, \dots y_n$ die Substitution S_x anzuwenden, also umgekehrt beim Austritt aus G_2 in G_1 die inverse Substitution $S_x^{(-1)}$. Demnach ist auf $y_1, y_2, \dots y_n$ die Substitution:

$$(1.) \quad S_\alpha S_\beta^{(-1)} S_\gamma S_\delta^{(-1)} \dots S_\mu$$

anzuwenden, in den erhaltenen linearen Functionen für die y_a ihre Darstellungen aus vor. Nummer zu setzen, und aus den so erhaltenen Ausdrücken unmittelbar die Werthe der y_a in A_2 zu berechnen.

14.

Ist ein beliebiges Integral y der Differentialgleichung (1.) No. 4 dadurch gegeben, dass für $z = A_1$, y nebst seinen $n-1$ ersten Ableitungen vorgeschriebene Werthe annehmen, so ist zunächst auf bekannte Weise (s. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 2) y als lineare homogene Function des Fundamental-

systems $y_1, y_2, \dots y_n$ darzustellen, wodurch sein Ausdruck für das Gebiet G_1 determinirt ist. Es sei

$$(1.) \quad y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \dots + K_n y_n,$$

so ist in vor. Nummer bestimmt worden, welche Werthe $y_1, y_2, \dots y_n$ in A_2 erhalten. Die Relation (1.) ist aber sowohl für das Gebiet G_2 als für das Gebiet G_1 gültig, folglich sind nur die nach vor. Nummer für die y_a eruirten Werthe in (1.) einzusetzen, um den Werth von y in A_2 zu erhalten.

15.

Wir wollen das Vorhergehende durch das Beispiel einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit vier endlichen singulären Punkten erläutern. Es sei nämlich:

$$(1.) \quad (z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2) \frac{d^2 y}{dz^2} + \mu(z - z_1)(3z^2 + 2z_1 z - z_2^2) \frac{dy}{dz} - \mu(3z^2 + 2z_1 z - z_2^2) y = 0,$$

wo μ positiv und keine ganze Zahl.

Diese Differentialgleichung hat das Integral

$$(2.) \quad y_1 = z - z_1.$$

Bezeichnet η ein zweites Integral, welches mit y_1 ein Fundamentalsystem bildet, so ist

$$\begin{vmatrix} \frac{d\eta}{dz} & \eta \\ \frac{dy_1}{dz} & y_1 \end{vmatrix} = \frac{C}{P^\mu},$$

wo

$$P = (z + z_1)(z^2 - z_2^2)$$

und C eine von Null verschiedene Constante ist (s. meine Abhandlung, Bd. 66, No. 2, Gleichung (3.)). Hieraus folgt

$$\eta = C y_1 \int \frac{dz}{(z - z_1)^2 \cdot P^\mu} + C' y_1,$$

wo C' eine neue Constante.

Daher ist

$$(3.) \quad y_2 = (z - z_1) \int_{\infty}^z \frac{dz}{(z - z_1)^2 \cdot P^\mu}$$

ein Integral der Differentialgleichung (1.).

Da eine Gleichung der Form

$$K_1 y_1 + K_2 y_2 = 0,$$

wo K_1, K_2 Constanten bedeuten, nicht identisch besteht, so bilden y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem.

16.

Es werde zunächst vorausgesetzt, dass die vier Punkte $\pm z_1, \pm z_2$ nicht in gerader Linie liegen, und auf die Differentialgleichung (1.) vor. Nummer die Substitution aus No. 12, Abth. I., Gleichung (1.) angewendet:

$$(1.) \quad z = \frac{1}{2w}(\gamma w^2 + \delta),$$

wo

$$\gamma = z_1 - z_2 \cdot i, \quad \delta = z_1 + z_2 \cdot i,$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$(2.) \quad \begin{cases} w^2(\gamma^4 w^4 - \delta^4)(w^4 - 1)(\gamma w^2 - \delta) \frac{d^2 y}{dw^2} + [-2\delta(w^4 - 1)(\gamma^4 w^4 - \delta^4) + \\ H_4(w)\mu(w-1)(\gamma w - \delta)(\gamma w^2 - \delta)^2] w \frac{dy}{dw} - \mu H_4(w)(\gamma w^2 - \delta)^3 y = 0, \end{cases}$$

wo

$$H_4(w) = 3\gamma^2 w^4 + 4\gamma z_1 w^3 + (6\gamma\delta - 4z_2^2)w^2 + 4\delta z_1 w + 3\delta^2.$$

Macht man dieselbe Substitution in y_1, y_2 , so erhält man ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (2.):

$$(3.) \quad \begin{cases} y_1 = \frac{(w-1)(\gamma w - \delta)}{2w}, \\ y_2 = 2^{3\mu+1} \cdot y_1 \int_0^w \frac{w^{3\mu}(\gamma w^2 - \delta) dw}{(w-1)^2(\gamma w - \delta)^2 q^\mu}, \end{cases}$$

wo

$$q = \frac{(w^4 - 1)(\gamma^4 w^4 - \delta^4)}{(w-1)(\gamma w - \delta)}.$$

Die singulären Punkte der Differentialgleichung (1.) vor. Nummer sind ausser $z = \infty : z = \pm z_1, z = \pm z_2$, die der Differentialgleichung (2.) dieser Nummer sind ausser $w = 0$, dem Mittelpunkt des Grenzkreises K , die Punkte $\pm 1, \pm i$, welche innerhalb K auf der Peripherie von E liegen, und die Punkte $\pm \frac{\delta}{\gamma}, \pm i \frac{\delta}{\gamma}, \pm \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, wovon die vier ersten ausserhalb K , die beiden letzten auf der Peripherie von K liegen, wie sich aus No. 12 Abth. I. ergibt, wenn z_1, z_2 so geordnet sind, dass

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 > 0.$$

Die zum singulären Punkte $w=0$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2.) ist:

$$(4.) \quad r^2 + (1 - 3\mu)r - 3\mu = 0.$$

Es sind daher y_1, y_2 resp. die zu den Wurzeln derselben $-1, 3\mu$ als Exponenten gehörigen Integrale derselben.

Die Absonderungscurve C_c ist in diesem Falle eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Anfange der z , deren grosse Axe in die Richtung der Geraden (Gleichung (10.), No. 12, Abth. I.) fällt, und deren Axenlängen sich aus den Gleichungen (6.) ebendas. ergeben, wenn man $r=1$ setzt.

17.

Um die Darstellung von y_2 innerhalb G_1 zu erhalten, beschränke man w in y_2 Gleichung (3.) vor. Nummer auf die Fläche von E , so ist der Factor von $w^{3\mu}$ unter dem Integralzeichen innerhalb E nach positiven ganzzahligen Potenzen von w entwickelbar, da $\text{mod. } \frac{\gamma}{\delta} < 1$. Es sei demnach

$$(1.) \quad \frac{\gamma w^2 - \delta}{(w-1)^2 (\gamma w - \delta)^2 q^\mu} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 w + \varepsilon_2 w^2 + \dots,$$

so ergibt sich innerhalb E :

$$(2.) \quad y_2 = 2^{3\mu+1} y_1 w^{3\mu+1} \left[\frac{\varepsilon_0}{3\mu+1} + \frac{\varepsilon_1}{3\mu+2} w + \frac{\varepsilon_2}{3\mu+3} w^2 + \dots \right].$$

Nach No. 2 ist hierin w_0 statt w zu setzen, um y_2 innerhalb G_1 darzustellen. Nun ist nach Gleichung (1.) vor. Nummer

$$(3.) \quad w_0 = \frac{z - \sqrt{z^2 - \gamma\delta}}{\gamma},$$

wo das Vorzeichen der Wurzelgrösse innerhalb G_1 dadurch bestimmt ist, dass für $z = \infty$, $w_0 = 0$ ist. Denn innerhalb G_1 ist die Wurzelgrösse von Null verschieden, weil dem Werthe $z = \sqrt{\gamma\delta}$ der Werth $w_0 = \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ entspricht, und da dieser Punkt sich ausserhalb E befindet, so ist auch $z = \sqrt{\gamma\delta}$ ausserhalb G_1 zu suchen:

Demnach ist innerhalb G_1 :

$$(A.) \quad y_2 = 2^{3\mu+1} (z - z_1) \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - \gamma\delta}}{\gamma} \right)^{3\mu+1} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_\alpha}{3\mu + \alpha + 1} \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - \gamma\delta}}{\gamma} \right)^\alpha.$$

18.

In der Umgebung von $w = 1$ ist

$$(1.) \quad S = \frac{w^{3\mu}(\gamma w^2 - \delta)}{(w-1)^2(\gamma w - \delta)^2 q^\mu}$$

in einer Reihe der Form:

$$(2.) \quad S = \frac{\zeta_{-2}}{(w-1)^2} + \frac{\zeta_{-1}}{w-1} + \zeta_0 + \zeta_1(w-1) + \dots$$

darstellbar, wo

$$(3.) \quad \zeta_{-1} = \left[\frac{d}{dw} (w-1)^2 S \right]_{w=1}.$$

Es sei daher ε ein fester Punkt in der Umgebung von $w = 1$, so ist in derselben Umgebung nach Gleichung (3.) No. 16:

$$(4.) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_2 = 2^{3\mu+1} \eta_1 \int_0^\varepsilon S dw = 2^{3\mu+1} \eta_1 E + 2^{3\mu+1} \eta_1 \left[\frac{-\zeta_{-2}}{w-1} + \zeta_{-1} \log(w-1) \right. \\ \left. + \sum_0^\infty \frac{\zeta_a}{a+1} (w-1)^{a+1} \right], \end{aligned} \right.$$

wo E eine Constante ist, deren Werth:

$$E = \frac{-\zeta_{-2}}{\varepsilon-1} + \zeta_{-1} \log(\varepsilon-1) + \sum_0^\infty \frac{\zeta_a}{a+1} (\varepsilon-1)^{a+1}.$$

Ist η'_2 der Werth von η_2 , in welchen dasselbe nach einem Umlaufe um 1 übergeht, so folgt aus Gleichung (3.), dass

$$(5.) \quad \eta'_2 = 2^{3\mu+2} \pi i \zeta_{-1} \cdot \eta_1 + \eta_2.$$

19.

Die zum singulären Punkte $w = i$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2.) No. 16 ist

$$(1.) \quad r(r-1) + \mu r = 0.$$

Es sei η_{21}, η_{22} das zu den Wurzeln $0, 1-\mu$ derselben als Exponenten gehörige Fundamentalsystem von Integralen derselben Differentialgleichung, so ist in der Umgebung von $w = i$

$$(2.) \quad \eta_{21} = \eta_1, \quad \eta_{22} = (w-i)^{1-\mu} \psi_{22},$$

wo ψ_{22} eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $w-i$ fortschreitende Reihe ist. Es ist für $w = i$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_1$; ferner nehmen wir $\psi_{22}(i) = 1$ an.

Es sei η_2 wie bisher dadurch fixirt, dass sein Ausdruck innerhalb E

28 *

durch Gleichung (2.) No. 17 gegeben ist, so ist in dem Flächentheile, welcher der Umgebung von $w = i$ und der Fläche von E gemeinschaftlich ist:

$$(3.) \quad \psi_2 = b_1^{(2)} \psi_1 + b_2^{(2)} (w-i)^{1-\mu} \psi_{22}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch ψ_1 und differentiirt nach w , so erhält man:

$$(4.) \quad 2^{3\mu+1} S = b_2^{(2)} (w-i)^{-\mu} \chi_{22}(w),$$

wo $\chi_{22}(w)$ eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $w-i$ fortschreitende Reihe bedeutet, welche für $w = i$ den Werth $\frac{1-\mu}{z_2 - z_1}$ hat. Die Gleichung (4.) giebt daher, nachdem man beiderseits mit $(w-i)^\mu$ multiplicirt, für $w = i$

$$(5.) \quad b_2^{(2)} = \frac{i^{2\mu} z_1}{2^\mu (1-\mu) (z_2 - z_1) [z_1 z_2 (z_1 + z_2)]^\mu}.$$

Setzen wir

$$\frac{1}{1.2 \dots a} \left[\frac{d^a S (w-i)^\mu}{dw^a} \right]_{w=i} = s_{2a},$$

mit der Nebenbestimmung, dass

$$s_{20} = [S(w-i)^a]_{w=i}$$

oder

$$s_{20} = 0$$

je nachdem $m > 0$ oder $m = 0$, wenn m die grösste ganze in μ enthaltene Zahl bedeutet, so dass

$$\mu = m + \lambda, \quad 0 < \lambda < 1,$$

so ist

$$\int [S - (w-i)^{-\mu} \sum_0^m s_{2a} (w-i)^a] dw$$

für $w = i$ endlich. Es folgt daher aus Gleichung (3.), dass ebenso

$$b_2^{(2)} (w-i)^{1-\mu} \psi_{22} - 2^{3\mu+1} \psi_1 (w-i)^{1-\mu} \sum_0^m \frac{s_{2a} (w-i)^a}{a+1-\mu}$$

für $w = i$ endlich ist, und demnach von der Form

$$(w-i)^{1-\epsilon} \bar{\omega}_{22}$$

ist, wo $\bar{\omega}_{22}$ eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $w-i$ fortschreitende Reihe bedeutet.

Es ergiebt sich daher aus Gleichung (3.)

$$(6.) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2^{3\mu+1} \psi_1 \int_0^w [S - (w-i)^{-\mu} \sum_0^m s_{2a} (w-i)^a] dw \\ = b_1^{(2)} \psi_1 + (w-i)^{1-\epsilon} \bar{\omega}_{22} + 2^{3\mu+1} \psi_1 (-i)^{1-\mu} \sum_0^m \frac{s_{2a} (-i)^a}{a+1-\mu}. \end{array} \right.$$

Für $w = i$ giebt diese Gleichung

$$(7.) \quad b_1^{(2)} = 2^{3\mu+1} \int_0^i [S - (w-i)^{-\mu} \sum_0^m s_{2a} (w-i)^a] dw - 2^{3\mu+1} (-i)^{1-\mu} \sum_0^m \frac{(-i)^a s_{2a}}{a+1-\mu}.$$

Das Integral in dieser Gleichung erstreckt sich innerhalb E , und die Berechnung desselben ist auszuführen, indem sowohl S als auch die Potenzen $(w-i)^{-\mu+a}$ nach Potenzen von w entwickelt werden, wodurch der Ausdruck unter dem Integralzeichen in eine nach Potenzen von w fortschreitende Reihe verwandelt wird, die eine Integration bis $w = i$ zulässt.

20.

Die Gleichung (1.) vor. Nummer ist auch die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2.) No. 16 für die singulären Punkte $w = -1$, $w = -i$. Bezeichnen wir die zugehörigen Fundamentalsysteme resp. mit η_{31} , η_{32} und η_{41} , η_{42} , so dass

$$(1.) \quad \eta_{31} = \eta_1, \quad \eta_{32} = (w+1)^{1-\mu} \psi_{32},$$

$$(2.) \quad \eta_{41} = \eta_1, \quad \eta_{42} = (w+i)^{1-\mu} \psi_{42},$$

wo ψ_{32} , ψ_{42} nach positiven ganzzahligen Potenzen resp. von $w+1$ und $w+i$ fortschreitende Reihen sind, die resp. für $w = -1$ und $w = -i$ den Werth Eins haben.

Es ist alsdann analog der Gleichung (3.) vor. Nummer

$$(3.) \quad \eta_2 = b_1^{(3)} \eta_1 + b_2^{(3)} (w+1)^{1-\mu} \psi_{32},$$

$$(4.) \quad \eta_2 = b_1^{(4)} \eta_1 + b_2^{(4)} (w+i)^{1-\mu} \psi_{42}.$$

Es ergibt sich analog der Gleichung (5.) vor. Nummer

$$(5.) \quad b_2^{(3)} = \frac{i^{\mu+1} z_1 z_2}{2(1-\mu) z_1^2 [z_2 (z_2^2 - z_1^2)]^\mu},$$

$$(6.) \quad b_2^{(4)} = \frac{-i^{2\mu} z_1}{(1-\mu) 2^\mu (z_1 + z_2) [z_1 (z_2 - z_1)]^\mu},$$

und wenn man:

$$\left[\frac{d^a S(w+1)^\mu}{dw^a} \right]_{w=-1} \frac{1}{1.2 \dots a} = s_{3a},$$

$$\left[\frac{d^a S(w+i)^\mu}{dw^a} \right]_{w=-i} \frac{1}{1.2 \dots a} = s_{4a}$$

setzt, so ist analog der Gleichung (7.) vor. Nummer

$$(7.) \quad b_1^{(3)} = 2^{3\mu+1} \int_0^{-1} [S - (w+1)^{-\mu} \sum_a^m s_{3a} (w+1)^a] dw - 2^{3\mu+1} \sum_a^m \frac{s_{3a}}{a+1-\mu},$$

$$(8.) \quad b_1^{(4)} = 2^{3\mu+1} \int_0^{-i} [S - (w+i)^{-\mu} \sum_a^m s_{4a} (w+i)^a] dw - 2^{3\mu+1} (i)^{1-\mu} \sum_a^m \frac{(i)^a s_{4a}}{a+1-\mu},$$

worin die Integrale innerhalb E zu erstrecken und wie das Integral in Gleichung (7.) zu berechnen sind.

Bezeichnet man mit $\eta_2^{(2)}, \eta_2^{(3)}, \eta_2^{(4)}$ die Werthe, in welche η_2 nach einem Umlauf resp. um $i, -1, -i$ übergeht, so folgen aus den Gleichungen (3.) vor. Nummer und (3.) und (4.) dieser Nummer die der Gleichung (4.) No. 18 analogen Gleichungen:

$$(9.) \quad \begin{cases} \eta_2^{(2)} = b_1^{(2)} [1-\alpha] \eta_1 + \alpha \eta_2, \\ \eta_2^{(3)} = b_1^{(3)} [1-\alpha] \eta_1 + \alpha \eta_2, \\ \eta_2^{(4)} = b_1^{(4)} [1-\alpha] \eta_1 + \alpha \eta_2, \end{cases}$$

wo

$$\alpha = e^{2\pi i(1-\mu)}$$

gesetzt ist.

Die Bestimmung der Grössen $b_1^{(2)}, b_2^{(2)}$ hätte nach Vorschrift der No. 9 erfolgen können, wenn man aus der Differentialgleichung (2.) No. 16 für η_2 und die η_{x_t} die hinreichende Anzahl von Gliedern ihrer Reihenentwicklungen abgeleitet hätte. Wir zogen es aber bei unserem Beispiele vor, die Berechnung dieser Grössen direct an die Form des Integrals η_2 Gleichung (3.) No. 16 anzuknüpfen.

21.

Nach No. 12 ist innerhalb G_2

$$(1.) \quad y_2 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\eta_2(\gamma w^2 - \delta)}{w(\gamma w^2 - 2zw + \delta)} dw,$$

das Integral über den äusseren Rand des Kreises E erstreckt. Wir haben nach der dortigen Vorschrift dasselbe in vier Integrale zu zerlegen, erstreckt über den äusseren Rand der vier Quadranten, in welche die singulären Punkte $\pm 1, \pm i$ die Peripherie zerfallen.

Setzen wir

$$(2.) \quad \frac{\gamma w^2 - \delta}{w(\gamma w^2 - 2zw + \delta)} = R,$$

so ist

$$(3.) \quad y_2 = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_1^i \eta_2 R dw + \int_i^{-1} \eta_2 R dw + \int_{-1}^{-i} \eta_2 R dw + \int_{-i}^1 \eta_2 R dw \right],$$

die sämtlichen Integrale längs des äusseren Randes des entsprechenden Quadranten erstreckt.

Nach den Gleichungen (9.) vor. Nummer und den Vorschriften der No. 11—12 ist

$$(4.) \quad \begin{cases} \int_i^{-1} y_2 R dw = \int_i^{-1} [b_1^{(2)}(1-\alpha)y_1 + \alpha y_2] R dw, \\ \int_{-1}^{-i} y_2 R dw = \int_{-1}^{-i} [(b_1^{(2)} + b_1^{(3)}\alpha)(1-\alpha)y_1 + \alpha^2 y_2] R dw, \\ \int_{-i}^1 y_2 R dw = \int_{-i}^1 [(b_1^{(2)} + b_1^{(3)}\alpha + b_1^{(4)}\alpha^2)(1-\alpha)y_1 + \alpha^3 y_2] R dw, \end{cases}$$

wo die Integrale linkerhand längs des äusseren, die entsprechenden rechterhand längs des inneren Randes des von den beiden Grenzen des Integrals abgetheilten Quadranten zu erstrecken sind. Werden die Werthe (4.) in Gleichung (3.) substituirt, so kann man in jedem der vier Integrale für y_2 die Entwicklung nach Potenzen von w aus Gleichung (2.) No. 17 setzen, und die Integrationen vollziehen.

Man besitzt also in der Gleichung (3.) nach dieser Substitution eine einfach berechenbare Entwicklung gültig im ganzen Gebiete G_2 .

Der Uebergang aus dem einen Gebiete G_1 in das andere G_2 geschieht mit Hülfe der in No. 18—20 enthaltenen Formeln nach Vorschrift von No. 13 und 14.

Liegen die vier Punkte $\pm z_1, \pm z_2$ in gerader Linie, so ist die Differentialgleichung (1.) No. 15 nach No. 13 Abth. I. zu transformiren.

Greifswald, den 30. Juli 1872.