Der Lichtstrom und der Fall mit mehreren Karten

Harald Schröer

2015

Es kann sein, daß bei bestimmten Lichtquellen und Empfängern eine Parametrisierung mit einer Karte nicht möglich ist. Deswegen wird die Parametrisierung mit mehreren Karten behandelt.
Dazu brauchen wir folgenden Satz vom Integral über Mannigfaltigkeiten mit mehreren Karten.
Satz 1: vgl. Forster [1] „Analysis 3" §14 S.138,139
M sei k-dimensionale Untermannigfaltigkeit
$f : M \longrightarrow R \qquad \varphi_j : T_j \longrightarrow V_j \subset M \qquad M \subset R^n$

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \quad \text{seien Karten mit} \quad \bigcup_{j=1}^{m} V_j = M$$

Dann gilt:

$$\int_M f(x)\, dS(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{V_j} \alpha_j(x) \cdot f(x)\, dS(x)$$

$$:= \sum_{j=1}^{m} \int_{T_j} \alpha_j(\varphi_j(t)) \cdot f(\varphi_j(t)) \cdot \sqrt{g_j(t)}\; d^k t$$

$$t \in T_j \subset R^k \qquad x \in V_j \subset M$$

$g_j(t)$ ist die Gramsche Determinante von φ_j.

$$g_j(t) = \det G_j \qquad G_j = (D\varphi_j)^T \cdot D\varphi_j$$

vgl. Forster [1] „Analysis 3" §14 S.136-139 und §3 S.29
$D\varphi_j=$ Jakobi-Matrix von φ_j bezüglich t
A^T ist die transponierte Matrix von A.

α_j ist eine **Teilung der Eins** sie hat nach Forster [1] „Analysis 3" §14 S.139 folgende Eigenschaften:
$i)\qquad 0 \le \alpha_j \le 1 \qquad \alpha_j(M \setminus V_j) = 0$

ii) $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x) = 1$ für alle $x \in M$
iii) $t \longrightarrow \alpha_j(\varphi_j(t))$ muß lokal integrierbar auf T_j sein vgl. Forster [1] „Analysis 3" §9 S.87.

In Forster [1] „Analysis 3" §14 S.139 wird gezeigt, daß die Definition des Integrals unabhängig von der Überdeckung von M und der Teilung der Eins ist. Die genauen Definitionen von Immersionen und Karten stehen in Forster [1] „Analysis 3" §14 S.132,134.

Satz 2:

$$\varphi_j : U_j \longrightarrow V_j \qquad f : V \longrightarrow R \qquad U_j, V \subset R^n$$

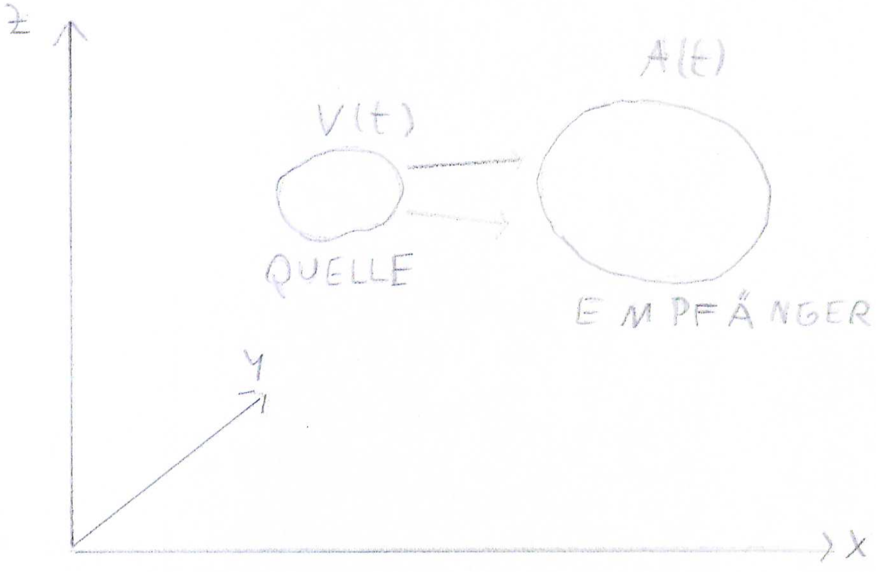
$$y \in U_j \quad x \in V \qquad \bigcup_{j=1}^{m} V_j = V$$

$$\int_V f(x)\, d^n x = \sum_{j=1}^{m} \int_{V_j} f(x)\, d^n x$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{U_j} f(\varphi_j(y)) \cdot |\det D\varphi_j(y)|\, d^n y$$

nach Transformationsformel vgl. Forster [1] „Analysis 3" §13 Satz 2 S.120. φ_j muß bijektiv sein für $j \in 1 \ldots m$. $\varphi_j, \varphi_j^{-1}$ müssen stetig differenzierbar sein für $j \in 1 \ldots m$. $U_1, \ldots, U_m, V_1, \ldots, V_m$ sind offene Mengen.

Gegeben ist nun eine Lichtquelle mit dem Volumen $V(t)$ [$t=$ Zeit] und ein Empfänger mit der Fläche $A(t)$.



$$V(t) \cap A(t) = \emptyset$$

Die Anordnung soll in reiner Luft mit konstanter Dichte sein. Das heißt der Schwächungskoeffizient m ist konstant. Gefragt wird nach dem Lichtstrom, der von $A(t)$ aufgenommen wird. $B(t)$ soll die Oberfläche der Lichtquelle sein.

$$w(\vec{b}, t) = \text{Flächenlichtstärkedichte der Lichtquelle} \qquad \vec{b} \in B(t)$$

$$B(t) = \bigcup_{j=1}^{m} B_j(t)$$

$$B_j(t) = \vec{e}_j(\vec{y}, t) \qquad j \in 1 \ldots m$$

Die $\vec{e}_j$ sind hier die **Karten**(Parametrisierungen) und zwar für jedes $t \in R$.

$$\vec{e}_j : U_j \times R \longrightarrow B_j(t) \qquad \vec{y} \in U_j \subset R^2$$

Wenn I die Lichtstärke der Quelle ist, dann gilt:

$$I(t) = \int\limits_{B(t)} w(\vec{b}, t)\, d\vec{b} = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{B_j(t)} w(\vec{b}, t)\, d\vec{b} \tag{1}$$

nach Satz 1:

$$I(t) = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{U_j} \alpha_j(\vec{e}_j(\vec{y}, t)) \cdot w(\vec{e}_j(\vec{y}, t), t) \cdot \sqrt{g_j(\vec{y})}\, d\vec{y}$$

$\alpha_j \qquad j \in 1 \ldots m$ ist eine Teilung der Eins.

$$\text{mit} \quad g_j(\vec{y}) = \det G_j \qquad G_j = (D\vec{e}_j)^T \cdot D\vec{e}_j$$

$$D\vec{e}_j := D\vec{e}_j(\vec{y})$$

$g_j(\vec{y})$ ist hier die Gramsche Determinante von $\vec{e}_j$.

Nun kommen wir zur Berechnung der Beleuchtungsstärke $\vec{E}$:

Dazu brauchen wir:
$e(\ldots)$ = Schwächungsfaktor
m = Schwächungskoeffizient $\qquad m = \text{const.}$

$$e(\vec{a}, \vec{x}) = e^{-m\cdot|\vec{a}-\vec{x}|} \qquad \vec{a}, \vec{x} \in R^3$$

Damit gilt für die Beleuchtungsstärke:

$$\vec{E}(\vec{a}, t) = \int\limits_{B(t)} w(\vec{b}, t) \cdot e(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|^3}\, d\vec{b}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{B_j(t)} w(\vec{b}, t) \cdot e(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|^3}\, d\vec{b} \tag{2}$$

$$B_j(t) = \vec{e}_j(\vec{y}, t) \qquad \vec{e}_j : U_j \times R \longrightarrow B_j(t)$$

$$j \in 1 \ldots m \qquad \vec{y} \in U_j \subset R^2$$

nach Satz 1:

$$\vec{E}(\vec{a}, t) = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{U_j} \alpha_j(\vec{e}_j(\vec{y}, t)) \cdot w(\vec{e}_j(\vec{y}, t), t) \cdot e(\vec{a}, \vec{e}_j(\vec{y}, t)) \cdot \frac{\vec{a}-\vec{e}_j(\vec{y}, t)}{|\vec{a}-\vec{e}_j(\vec{y}, t)|^3} \cdot \sqrt{g_j(\vec{y})}\, d\vec{y} \tag{3}$$

α_j = Teilung der Eins $\qquad \vec{y} \in U_j \subset R^2$

$$g_j(\vec{y}) = \det\left[(D\vec{e}_j)^T \cdot D\vec{e}_j\right]$$

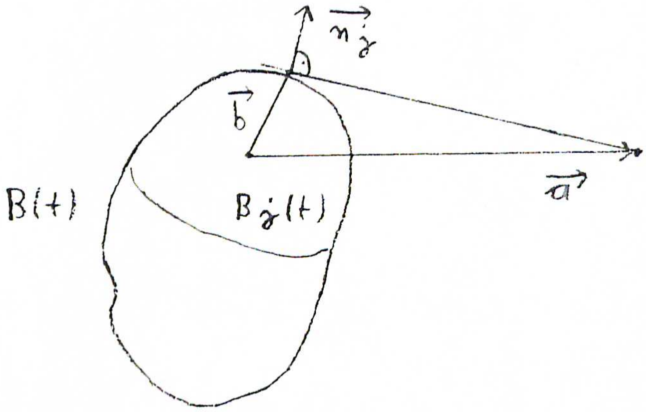
$$D\vec{e}_j := D\vec{e}_j(\vec{y})$$

An (3) kann man mit Satz 2 evt. eine weitere Transformation zur Vereinfachung durchführen.

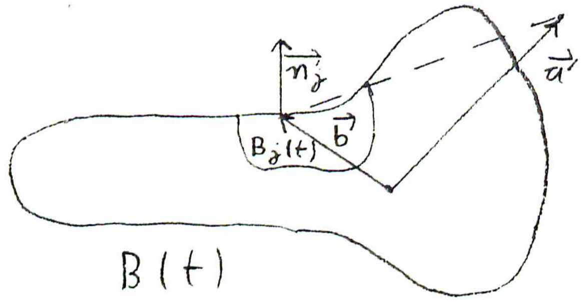
Bei $m = 0 \quad \Rightarrow \quad e(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ beim luftleerem Raum.

$\vec{n}_j$ soll der äußere Normaleneinheitsvektor zu $B_j(t)$ sein. $j \in 1 \ldots m$

Dann kann man sehen, daß $\angle(\vec{n}_j, (\vec{a} - \vec{b})) \leq 90°$ eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung dafür ist, daß der Punkt $\vec{a}$ überhaupt erreicht wird (vgl. die beiden Abbildungen).



Lichtquelle



Die Integration in (2) und (3) erfolgt evt. nur über eine Teilmenge von $B_j(t)$ bzw. U_j für $j \in 1 \ldots m$.

Berechnung von $\vec{n}_j(\vec{y})$:

$$B_j(t) = \vec{e}_j(\vec{y}, t) \qquad \vec{y} \in U_j \subset R^2 \qquad \vec{y} = (y_1, y_2)$$

Tangentenvektoren an $\vec{e}_j : U_j \times R \longrightarrow B_j(t)$ nach Forster [1] „Analysis 3" §15 Satz 1 S.148 sind

$\frac{\partial}{\partial y_1}\vec{c}_j(\vec{y},t)$ und $\frac{\partial}{\partial y_2}\vec{c}_j(\vec{y},t)$.

äußerer Normaleneinheitsvektor:

$$\pm\, n_j(\vec{y}) = \frac{\frac{\partial}{\partial y_1}\vec{c}_j(\vec{y},t) \times \frac{\partial}{\partial y_2}\vec{c}_j(\vec{y},t)}{\left|\frac{\partial}{\partial y_1}\vec{c}_j(\vec{y},t) \times \frac{\partial}{\partial y_2}\vec{c}_j(\vec{y},t)\right|} \tag{4}$$

Einschränkende Bedingung:

$$\alpha(t) = \angle(\vec{n}_j, \vec{a}-\vec{b}) \leq 90^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha(t) \geq 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\vec{n}_j(\vec{y})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{n}_j(\vec{y})|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|} = \cos\alpha(t) \geq 0 \tag{5}$$

oder

$$\vec{n}_j(\vec{y})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) \geq 0 \tag{6}$$

Nun kommen wir zum Lichtstrom, der durch die Fläche $A(t)$ geht.

$$A(t) = \bigcup_{j=1}^{m} A_j(t)$$

$$\vec{c}_j : V_j \times R \longrightarrow A(t) \qquad \vec{c}_j(\vec{p},t) = A(t) \qquad \vec{p} \in V_j \subset R^2$$

Die $\vec{c}_j$ sind die Karten.
$\vec{n}_j$ = äußerer Normaleneinheitsvektor zu $\vec{c}_j$ bzw. $A_j(t)$
Also folgt für den Lichtstrom:

$$\Phi(t) = \left|\sum_{j=1}^{m}\int_{A_j(t)} \vec{E}(\vec{a},t)\cdot\vec{n}_j(\vec{a},t)\,d\vec{a}\right| \tag{7}$$

nach Satz 1:

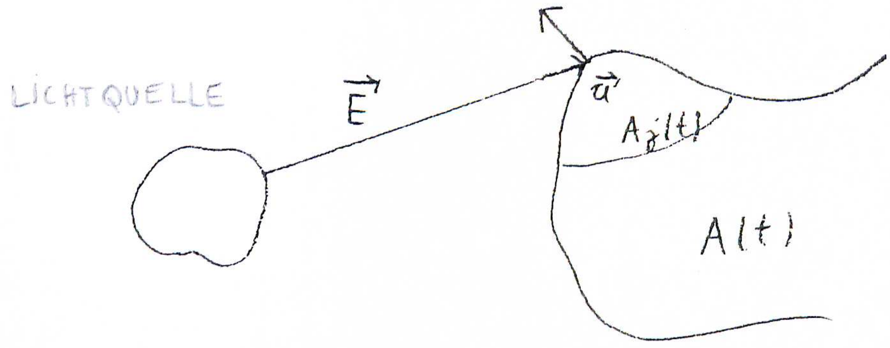
$$\Phi(t) = \left|\sum_{j=1}^{m}\int_{V_j} \alpha_j(\vec{c}_j(\vec{p},t))\cdot\vec{E}(\vec{c}_j(\vec{p},t),t)\cdot\vec{n}_j(\vec{p})\cdot\sqrt{g_j(\vec{p})}\,d\vec{p}\right| \tag{8}$$

α_j= Teilung der Eins

$$g_j(\vec{p}) := \det\left[(D\vec{c}_j)^T\cdot D\vec{c}_j\right] \qquad \text{(Gramsche Determinante)}$$

$$D\vec{c}_j = D\vec{c}_j(\vec{p})$$

(8) kann evt. mit Satz 2 zwecks Vereinfachung transformiert werden. Betrachtet man die Abb.



so sieht man, daß bei komplizierten Empfängern evt. nur über eine Teilmenge von $A(t)$ integriert werden kann. Eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung dafür, daß $\vec{a}$ erreicht wird:

$$\beta(t) = \angle(\vec{E}(\vec{a}), \vec{n}_j) \geq 90°$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\vec{n}_j(\vec{a}) \cdot \vec{E}(\vec{a})}{|\vec{n}_j(\vec{a})| \cdot |\vec{E}(\vec{a})|} = \cos\beta(t) \leq 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{n}_j(\vec{a}) \cdot \vec{E}(\vec{a}) \leq 0 \tag{10}$$

$$\vec{c}_j : V_j \times R \longrightarrow A_j(t) \qquad \vec{c}_j(\vec{p}, t) = A_j(t) \qquad \vec{p} = (p_1, p_2) \in V_j \subset R^2$$

ist die Karte bzw. Parametrisierung von $A_j(t)$.

$\frac{\partial}{\partial p_1}\vec{c}_j(\vec{p}, t)$ und $\frac{\partial}{\partial p_2}\vec{c}_j(\vec{p}, t)$ sind Tangentenvektoren an $\vec{c}_j : V_j \times R \longrightarrow A_j(t)$ nach Forster [1] „Analysis 3" §15 Satz 1 S.148. Daraus folgt für den äußeren Normaleneinheitsvektor:

$$\pm\,\vec{n}_j(\vec{p}) = \frac{\frac{\partial}{\partial p_1}\vec{c}_j(\vec{p}, t) \times \frac{\partial}{\partial p_2}\vec{c}_j(\vec{p}, t)}{\left|\frac{\partial}{\partial p_1}\vec{c}_j(\vec{p}, t) \times \frac{\partial}{\partial p_2}\vec{c}_j(\vec{p}, t)\right|} \tag{11}$$

mit (10) folgt schließlich:

$$\vec{n}_j(\vec{p}) \cdot \vec{E}(\vec{c}_j(\vec{p}, t), t) \leq 0 \tag{12}$$

Spezialfall: die Punktquelle

$\vec{x}$ = Position der Punktquelle

Die Beleuchtungsstärke wird dargestellt durch:

$$\vec{E}(a) = \frac{I(t) \cdot (\vec{a} - \vec{x})}{|\vec{a} - \vec{x}|^3} \cdot e(\vec{a}, \vec{x}) \qquad I = \text{Lichtstärke} \tag{13}$$

$$\vec{x} \neq \vec{a}$$

Für den Lichtstrom durch die Fläche $A(t)$ erhalten wir:

$$\Phi = I \cdot \left| \sum_{j=1}^{m} \int_{A_j} \frac{(\vec{a} - \vec{x})}{|\vec{a} - \vec{x}|^3} \cdot e(\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{n}_j(\vec{a})\, da \right| \tag{14}$$

Transformation mit:

$$\vec{c}_j : V_j \times R \longrightarrow A_j(t) \qquad \vec{c}_j(\vec{p}, t) = A_j(t) \qquad \vec{p} \in V_j \subset R^2$$

$$\Phi = I \cdot \left| \sum_{j=1}^{m} \int_{V_j} \alpha_j(\vec{c}_j(\vec{p})) \frac{(\vec{c}_j(\vec{p}) - \vec{x})}{|\vec{c}_j(\vec{p}) - \vec{x}|^3} \cdot e(\vec{c}_j(\vec{p}), \vec{x}) \cdot \vec{n}_j(\vec{c}_j(\vec{p})) \cdot \sqrt{g_j(\vec{p})}\, \vec{d}p \right| \tag{15}$$

mit

$$g_j(\vec{p}) = \det\left[(D\vec{c}_j(\vec{p}))^T \cdot D\vec{c}_j(\vec{p})\right]$$

Ohne I und ohne das Medium bekommen wir eine allgemeine Formel für den Raumwinkel.

Literatur

[1] Otto Forster „Analysis 3“ 2.Auflage 1983 Vieweg Verlag Braunschweig

[2] Becker/Sauter „Theorie der Elektrizität Band 1“ 21.Auflage 1973 B.G. Teubner Stuttgart

[3] Immanuil L. Fabelinskii „Molecular Scattering of Light“ New York 1968

[4] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1985 22.Auflage

[5] Karl Hammer „Grundkurs der Physik Teil 2“ 3.Auflage Oldenbourg Verlag München 1987

[6] Schröer,H: Lichtstrom und Beleuchtungsstärke, Wissenschaft & Technik Verlag, Berlin 2001