

Die cubische Involution und die Dreitheilung und Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen.

Von

OSKAR BOLZA in Chicago.

Einleitung.

Stellt man die Variable $x_1 : x_2$ einer cubischen Involution durch die Punkte eines „Normkegelschnitts“ dar, so umhüllen bekanntlich die Seiten der Dreiecke, deren Ecken Tripel der Involution darstellen, einen zweiten festen Kegelschnitt, den „Involutionkegelschnitt“ (Weyr); man hat es also mit dem Schliessungsproblem für $n = 3$ zu thun. Den hierauf nach der allgemeinen Theorie des Schliessungsproblems sich gründenden Zusammenhang zwischen der cubischen Involution und der Theorie der elliptischen Functionen im Einzelnen zu untersuchen, ist die Aufgabe der folgenden Arbeit.

Im ersten Theil werden nur rationale Combinanten und dementsprechend nur elliptische Functionen und Modulfunctionen der ersten und dritten Stufe behandelt.

Nach Zusammenstellung der nöthigen Formeln aus der Invariantentheorie der cubischen Involution (§ 1) werden die elliptischen Functionen eingeführt und mit ihrer Hilfe die Aufgabe gelöst: *Alle cubischen Involutionen mit gegebenen Versweigungselementen zu bestimmen* (§ 2); hierauf werden die rationalen Invarianten der Involution als *elliptische Modulformen* dargestellt, wobei sich ein überaus einfacher Zusammenhang zwischen den beiden Clebsch'schen Fundamentalinvarianten J, Ω und den Fricke'schen Modulformen dritter Stufe ξ_3, ξ_4 ergibt. (§ 3). In den nächsten beiden Paragraphen wird sodann die Theorie der cubischen Involution auf die Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen angewandt und gezeigt, dass die zu zwei conjugirten Involutionen gehörigen elliptischen Functionen durch eine Transformation dritter Ordnung verbunden sind.

Im zweiten Theil werden dann auch gewisse irrationale Combinanten, und dementsprechend elliptische Functionen und Modulfunctionen zweiter und sechster Stufe in den Kreis der Betrachtung gezogen.

Als Ausgangspunkt wird dabei die Transformation des Normkegelschnitts und des Involutionkegelschnitts auf ihr gemeinsames Polardreieck gewählt, wodurch zugleich die geometrische Bedeutung der betrachteten irrationalen Invarianten hervortritt (§ 6). Die wichtigste derselben ist die im Folgenden mit ξ bezeichnete absolute Invariante; sie ist, bezogen auf die rationale absolute Invariante $\frac{27\Omega}{2J^3}$ die *kanonische Diederirrationalität* $n = 3$; durch sie lassen sich die Doppelverhältnisse der Wurzeln der fünf für die Involution fundamentalen biquadratischen Formen

$$\vartheta, \quad 3H_\vartheta \pm J\vartheta, \quad 6H_\vartheta \pm J\vartheta$$

rational ausdrücken; (§ 7). Als elliptische Modulfunction erweist sich ξ als nicht wesentlich verschieden von der von Herrn Fricke mit y bezeichneten *Modulfunction sechster Stufe* (§ 8).

Was die Bezeichnung betrifft, so habe ich mich für die Invariantentheorie an Clebsch (Binäre Formen), für die elliptischen Functionen an Weierstrass gehalten.

I. Theil.

§ 1.

Zusammenstellung der wichtigsten Sätze über cubische Involutionen.

In diesem Paragraphen sollen diejenigen bekannten Sätze über cubische Involutionen zusammengestellt werden, welche wir im Folgenden gebrauchen werden.

Das der Betrachtung zu Grunde liegende Büschel cubischer Formen sei

$$(1) \quad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2,$$

wo f_1, f_2 binäre cubische Formen der Variablen x_1, x_2 bezeichnen, welche wir im Folgenden, soweit nicht ausdrücklich das Gegentheil angegeben wird, als *allgemein* voraussetzen.

1. Das *volle Combinantensystem* des Büschels (1) besteht aus den Formen*):

$$(2) \quad \begin{aligned} \vartheta &= (f_1, f_2)_1, & J &= (f_1, f_2)_3, & H_\vartheta &= (\vartheta, \vartheta)_2, \\ i_\vartheta &= (\vartheta, \vartheta)_4, & j_\vartheta &= (\vartheta, H_\vartheta)_4, & T_\vartheta &= (\vartheta, H_\vartheta)_1. \end{aligned}$$

Die Invariante i kann weggelassen werden, da**)

$$(3) \quad J^2 = 6i_\vartheta.$$

*) Gordan, Math. Ann. Bd. 5, pag. 118.

***) Salmon, Higher Algebra, 2^a ed., Art. 198.

Statt der beiden Formen j_{ϑ} und H_{ϑ} kann man die für die cubische Involution weit wichtigeren Formen

$$(4) \quad \Omega = \frac{4}{3} j_{\vartheta} + \frac{1}{27} J^3, *$$

$$(5) \quad \Gamma = \frac{1}{3} (6H_{\vartheta} + J\vartheta) **$$

eingeführen.

Das Büschel (1) ist vollständig bestimmt durch das Verhältniss $\vartheta: J$; wir werden häufig das Symbol $[\vartheta, J]$ benützen, um das Büschel (1) zu bezeichnen.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei cubische Büschel

$$\lambda_1 f_1(x_1, x_2) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2)$$

und

$$\lambda_1' f_1'(x_1', x_2') + \lambda_2' f_2'(x_1', x_2')$$

äquivalent sind (d. h. durch lineare, nicht cogrediente Transformationen der beiden Variablenreihen x_1, x_2 und λ_1, λ_2 in einander transformirbar) besteht, von Ausnahmefällen abgesehen, in der Gleichheit der absoluten Invarianten

$$\frac{J^3}{\Omega} = \frac{J'^3}{\Omega'}$$

2. Die beiden Elemente, welche mit einem beliebig vorgegebenen, y , ein Tripel der Involution bilden, genügen der „Verwandtschaftsgleichung“***):

$$(6) \quad 3\vartheta_x^2 \vartheta_y^2 + \frac{1}{2} J(xy)^2 = 0.$$

Das Büschel enthält vier Formen mit Doppelwurzeln; wir bezeichnen sie

$$(xd)^2(xc), \quad (xd_1)^2(xc_1), \quad (xd_2)^2(xc_2), \quad (xd_3)^2(xc_3).$$

Die „Doppelemente“ d, d_1, d_2, d_3 sind die Wurzeln der Functionaldeterminante ϑ ; die „Verzweigungselemente“ c, c_1, c_2, c_3 sind die Wurzeln der Discriminante der Verwandtschaftsgleichung, nämlich der Gleichung †):

$$(7) \quad f \equiv 3H_{\vartheta} + J\vartheta = 0. \quad -$$

*) Salmon, l. c.

**) Bezeichnung nach Berzolari, Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, Serie 2^a Vol. V, pag. 76 (1891).

**) Weyr, Grundzüge einer Theorie der cubischen Involution, Abh. der böhm. Ges. d. Wiss. VI, Folge, 7. Bd. (1874), pag. 7; Le Paige, Essais de géométrie supérieure du troisième ordre (1882), pag. 59, und Caporali, Sul sistema di due forme binarie cubiche, § 5, Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, Anno XXII, 1883.

†) Le Paige, l. c. pag. 59; Berzolari, l. c. pag. 72.

3. Das Büschel (1) ist das *erste Polarenbüschel* der biquadratischen Form Γ^*):

$$(8) \quad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \Gamma_x^3 \Gamma_\eta,$$

wobei η_1, η_2 lineare Functionen von λ_1, λ_2 sind.

Das Büschel (1) kann auch defintirt werden als das Büschel der zu der biquadratischen Form

$$(9) \quad \bar{\Gamma} = \frac{1}{3} (6H_\vartheta - J\vartheta)$$

apolaren cubischen Formen**). —

4. Das zu dem gegebenen Büschel „conjugirte Büschel“***) (welches mit ihm die Doppelemente gemein hat) ist in der oben erklärten Bezeichnung

$$[\vartheta, -J].$$

Wir werden die auf das conjugirte Büschel sich beziehenden Grössen im Folgenden durch Ueberstreichen von den entsprechenden auf das ursprüngliche Büschel sich beziehenden unterscheiden. Normirt man das conjugirte Büschel so, dass die beiden Functionaldeterminanten *absolut* gleich werden

$$\bar{\vartheta} = \vartheta,$$

so ist

$$\bar{J} = -J,$$

und man erhält die auf das conjugirte Büschel bezüglichen Formen einfach, indem man J durch $-J$ ersetzt, also

$$(10) \quad \bar{\Omega} = \frac{4}{3} j - \frac{1}{27} J^3 = \frac{2}{27} R,$$

unter R die Resultante von f_1, f_2 verstanden. Die Verwandtschaftsgleichung für das conjugirte Büschel ist:

$$(11) \quad 3\vartheta_x^2 \vartheta_y^2 - \frac{1}{2} J(xy)^2 = 0.$$

Seine Verzweigungselemente $\bar{c}, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(12) \quad \bar{f} \equiv 3H_\vartheta - J\vartheta = 0.$$

Das conjugirte Büschel ist das erste Polarenbüschel der Form $\bar{\Gamma}$ und zugleich apolar zu Γ .

*) Franz Meyer, Apolarität und rationale Curven, (1883) pag. 71; Γ ist mit der dort mit A bezeichneten Form identisch; und Berzolari l. c. pag. 76.

**) Caporali, l. c. § 6 und Berzolari l. c. pag. 38.

***) Stephanos, Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même Jacobienne § V, Mémoires présentés par divers savants etc. T. XXVII (1883); Caporali, l. c. § 5; F. Meyer, l. c. § 17; Sturm, Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve Nr. 16, Borchardt's Journal Bd. 86, pag. 134.

5. Ich stelle hier gleich noch die Werthe einer Anzahl von *Invarianten* der verschiedenen hier auftretenden *biquadratischen Formen* zusammen, die wir im Folgenden gebrauchen werden; man berechnet dieselben leicht nach Clebsch, *Binäre Formen* § 41, unter Benutzung von (3), (4) und (10):

a) die *Discriminante* von ϑ^*):

$$(13) \quad j_{\vartheta}^2 - \frac{1}{6} i_{\vartheta}^3 = \frac{9}{16} \Omega \bar{\Omega},$$

b) die *Weierstrass'schen Invarianten*

$$g_2 = \frac{1}{2} i_f, \quad g_3 = \frac{1}{6} j_f$$

der „*Verzweigungsform*“ f :

$$(14) \quad \begin{cases} g_2 = \frac{3^2}{2^2} J (9\Omega - \bar{\Omega}), \\ g_3 = \frac{3^3}{2^3} (27\Omega^2 - 18\Omega\bar{\Omega} - \bar{\Omega}^2), \\ \Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = -\frac{3^9}{2^{10}} \Omega \bar{\Omega}^3, \end{cases}$$

c) *Ueberschiebungswerthe* für Γ^{**}):

$$(15) \quad \begin{cases} (\vartheta, \Gamma)_2 = \frac{1}{6} J\Gamma, & (\vartheta, \Gamma)_1 = \frac{3}{2} \Omega, \\ i_{\Gamma} = J\Omega, & j_{\Gamma} = \frac{3}{2} \Omega^2, \quad H_{\Gamma} = \Omega\vartheta. \end{cases}$$

Die entsprechenden Resultate für \bar{f} und $\bar{\Gamma}$ folgen daraus durch Zeichenwechsel von J und Vertauschung von Ω und $\bar{\Omega}$.

§ 2.

Einführung der elliptischen Functionen und Bestimmung aller cubischen Involutionen mit gegebenen Verzweigungselementen.

Die Verwandtschaftsgleichung (6) ist eine *symmetrische quadrato-quadratische Relation* zwischen zwei ein „*Paar der Involution*“ bildenden Elementen $x = x_1 : x_2$ und $y = y_1 : y_2$. Ihre linke Seite, als Function von x_1, x_2 betrachtet, hat zur *Discriminante* $3f(y)$, als Function von y_1, y_2 betrachtet, $3f(x)$. Daraus folgt aber nach bekannten Sätzen aus der Theorie des Schliessungsproblems^{***}):

*) Schon bei Salmon, l. c.

**) Die Werthe für $i_{\Gamma}, j_{\Gamma}, H_{\Gamma}$ giebt Berzolari, l. c. pag. 77.

***) Siehe z. B. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, II, pag. 384, 373.

Setzt man

$$(16) \quad u = \int_c^x \frac{(x dx)}{\sqrt{f(x)}}$$

und bezeichnet die inverse Function mit

$$x = \Phi(u),$$

so ist

$$y = \Phi(u + a),$$

wo a eine Constante ist. Weiter folgt dann, dass

$$z = \Phi(u + 2a)$$

demselben Tripel wie x, y angehört, sowie dass a ein Drittel einer Periode von $\Phi(u)$ sein muss; und zwar darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass diese Periode mit der ersten Periode eines *primitiven* Periodenpaares $2\omega, 2\omega'$ übereinstimmt, also

$$a = \frac{2\omega}{3};$$

das Periodenpaar $2\omega, 2\omega'$ ist dann mit allen durch eine lineare Transformation

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha\omega + \beta\omega', & \alpha\delta - \beta\gamma &= 1 \\ \omega_1' &= \gamma\omega + \delta\omega', \end{aligned}$$

bei welcher $\beta \equiv 0 \pmod{3}$, daraus hervorgehenden Periodenpaaren gleichberechtigt.

Nennen wir daher u den *transcendenten Parameter* *) des Elementes x , beachten ferner, dass wir als untere Grenze von u einen Verzweigungspunkt gewählt haben, und dass $c, d, d; c_1, d_1, d_1$, etc. Tripel unserer Involution bilden, so können wir den Satz aussprechen:

Die transcendenten Parameter eines Tripels der Involution lassen sich stets auf die Form bringen

$$u, \quad u + \frac{2\omega}{3}, \quad u + \frac{4\omega}{3}$$

und umgekehrt liefern drei solche Werthe von u stets ein Tripel der Involution. Den Verzweigungselementen entsprechen die Werthe

$$u = 0, \quad \omega, \quad \omega + \omega', \quad \omega';$$

den Doppelementen die Werthe

$$u = \frac{2\omega}{3}, \quad \omega + \frac{2\omega}{3}, \quad \omega + \omega' + \frac{2\omega}{3}, \quad \omega' + \frac{2\omega}{3}.$$

*) Dabei ist u gleichberechtigt mit $\pm u + 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, unter μ, μ' ganze Zahlen verstanden.

An den obigen Satz schliesst sich nun unmittelbar die Lösung der Aufgabe: *Alle cubischen Involutionen mit gegebenen Verzweigungselementen zu bestimmen.*

Wir gehen dabei aus von dem Quotienten

$$\frac{\vartheta(x)}{f(x)}.$$

Als Function von u ist derselbe eine elliptische Function mit den Perioden $2\omega, 2\omega'$ vom 8^{ten} Grad, mit den vier Polen zweiter Ordnung

$$u = 0, \quad \omega, \quad \omega + \omega', \quad \omega'$$

und den acht einfachen Nullstellen

$$u = \pm \frac{2\omega}{3}, \quad \pm \frac{2\omega}{3} + \omega, \quad \pm \frac{2\omega}{3} + \omega + \omega', \quad \pm \frac{2\omega}{3} + \omega'.$$

Dieselben Perioden, Pole und Nullstellen hat aber auch die elliptische Function

$$\wp(2u) - \wp\left(\frac{2\omega}{3}\right),$$

(unter $\wp u$ die zu g_2, g_3 gehörige Weierstrass'sche Function verstanden), sie kann daher von $\frac{\vartheta}{f}$ nur um einen constanten Factor verschieden sein. Sei

$$\wp(2u) - \wp\left(\frac{2\omega}{3}\right) = -\frac{M}{2} \frac{\vartheta}{f},$$

worin M eine Constante bedeutet.

Andererseits ist aber bekanntlich*) (da die untere Grenze von u Verzweigungspunkt ist):

$$(17) \quad \wp(2u) = -\frac{H_f}{2f},$$

unter H_f die Hesse'sche von f verstanden

$$H_f = (f, f)_2.$$

Wir erhalten also:

$$M\vartheta = H_f + 2\wp\left(\frac{2\omega}{3}\right)f.$$

Berechnet man hieraus die Invariante i_\wp nach Clebsch, Binäre Formen § 41, so kommt, wenn wir zur Abkürzung $\wp\left(\frac{2\omega}{3}\right) = p$ setzen:

$$M^2 \cdot 6i_\wp = 48g_2p^2 + 144g_3p + 4g_2^2.$$

Nun genügt aber p der Dreitheilungsgleichung**)

$$(18) \quad 0 = p^4 - \frac{1}{2}g_2p^2 - g_3p - \frac{1}{48}g_2^2.$$

*) Hermite, Crelle's Journal Bd. 55, pag. 24, und Klein, Vorlesungen der Hyperelliptischen Functionen, Sommer 1887.

**) Siehe z. B. Klein-Fricke, Elliptische Modulfunktionen, II, pag. 16. Wir werden dieses Werk im Folgenden kurz als „Modulfunktionen“ citiren.

Indem man dieselbe, mit 144 multiplicirt, zur vorigen Gleichung addirt, kommt

$$M^2 \cdot 6i_{\vartheta} = (g_2 - 12p^2)^2,$$

also nach (3)

$$MJ = \pm (g_2 - 12p).$$

Das Vorzeichen und zugleich der constante Factor M bestimmen sich aus der Bedingung

$$f = 3H_{\vartheta} + J\vartheta.$$

Aus den gefundenen Ausdrücken für $M\vartheta$ und MJ berechnet man nämlich

$$M^2(3H_{\vartheta} + J\vartheta) = H_f[(12p^2 - g_2) \pm (g_2 - 12p^2)] \\ + f[4g_2p + 6g_3 \pm (2g_2p - 24p^3)].$$

Daraus folgt zunächst, dass das obere Zeichen genommen werden muss; es wird dann

$$M^2(3H_{\vartheta} + J\vartheta) = -6(4p^3 - g_2p - g_3)f;$$

es folgt also

$$M = \pm i\sqrt{6} \varphi' \left(\frac{2\omega}{3}\right).$$

Indem wir, wenn nöthig, das Periodenpaar $2\omega, 2\omega'$ durch $-2\omega, -2\omega'$ ersetzen, können wir stets erreichen, dass das obere Zeichen gilt*). Wir haben demnach den folgenden Satz gewonnen:

Die Formen ϑ und J drücken sich folgendermassen durch die Verzweigungsform f und die zugehörigen elliptischen Functionen aus:

$$(19) \quad M\vartheta = H_f + 2\varphi \left(\frac{2\omega}{3}\right) f,$$

$$(20) \quad MJ = g_2 - 12\varphi^2 \left(\frac{2\omega}{3}\right),$$

$$(21) \quad M = i\sqrt{6} \varphi' \left(\frac{2\omega}{3}\right).$$

Dazu ist noch zu bemerken, dass nunmehr in Folge der letzten Festsetzung über das Zeichen von M das Periodenpaar $2\omega, 2\omega'$ nur noch mit denjenigen Periodenpaaren

$$2\omega_1 = \alpha \cdot 2\omega + \beta \cdot 2\omega', \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \\ 2\omega_1' = \gamma \cdot 2\omega + \delta \cdot 2\omega',$$

gleichberechtigt ist, bei denen

$$(22) \quad \alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv 0 \pmod{3}$$

denn nur bei diesen linearen Transformationen (welche eine Untergruppe \mathfrak{H} , vom Index 8, der homogenen Modulgruppe bilden) bleiben $\varphi \left(\frac{2\omega}{3}\right)$ und $\varphi' \left(\frac{2\omega}{3}\right)$ und somit ϑ und J unverändert. Lässt man die

*) Unter der Quadratwurzel aus einer reellen positiven Grösse soll hier und im Folgenden stets ihr positiver Werth verstanden werden.

Beschränkung $\alpha \equiv 1 \pmod{3}$ fallen, so erhält man eine Gruppe vom Index 4, welche immer noch das Verhältniss $\vartheta : J$ und somit die Involution $[\vartheta, J]$ ungeändert lässt.

Wendet man aber *alle* Substitutionen der homogenen Modulgruppe an, so erhält man, den vier Wurzeln der Theilungsgleichung (18) entsprechend, im Ganzen vier verschiedene Involutionen, welche sämtlich dieselben vier Verzweigungselemente $f = 0$ besitzen. Und zugleich ergibt sich aus unserer Entwicklung, dass es keine anderen cubischen Involutionen mit denselben Verzweigungspunkten giebt. Wir haben also den weiteren Satz:

Es giebt vier cubische Involutionen, welche die Wurzeln einer willkürlich vorgegebenen biquadratischen Form $f = a_x^4$ zu Verzweigungselementen haben. Dieselben werden geliefert durch die Formen (19), (20), (21) wenn man darin 2ω der Reihe nach ersetzt durch

$$2\omega, \quad 2\omega', \quad 2\omega + 2\omega', \quad 4\omega + 2\omega'.$$

Wir werden die vier Involutionen im Folgenden mit

$$[\vartheta, J], \quad [\vartheta', J'], \quad [\vartheta'', J''], \quad [\vartheta''', J''']$$

bezeichnen.

§ 3.

Darstellung der rationalen Invarianten der Involution*) durch elliptische Modulformen.

Wir stellen uns in diesem Paragraphen die Aufgabe, die Invarianten $J, \bar{\Omega}, \Omega$ unserer cubischen Involution $[\vartheta, J]$ als elliptische Modulformen darzustellen.

Für J haben wir bereits den Ausdruck gefunden

$$J = \frac{g_2 - 12\varphi^2\left(\frac{2\omega}{3}\right)}{i\sqrt{6}\varphi'\left(\frac{2\omega}{3}\right)},$$

dem wir auch die Form geben können

$$(23) \quad J = \frac{2i}{\sqrt{6}} \frac{\varphi''\left(\frac{2\omega}{3}\right)}{\varphi'\left(\frac{2\omega}{3}\right)}.$$

$\bar{\Omega}$ berechnen wir mittels (10); für j_ϑ erhalten wir aus (19):

$$M^3 j_\vartheta = 48g_3p^3 + 8g_2^2p^2 + 12g_2g_3p + 12g_3^2 - \frac{2}{9}g_2^3;$$

*) Unter „Invarianten der Involution“ verstehe ich Combinanten, welche von den Variablen unabhängig sind.

daraus folgt für $\bar{\Omega}$ unter Benutzung von (18)

$$M^3 \bar{\Omega} = 16(4p^3 - g_2 p - g_3)^2;$$

setzt man schliesslich noch für M seinen Werth aus (21) ein, so erhält man das Resultat:

$$(23 \text{ a}) \quad \bar{\Omega} = \frac{8i}{3\sqrt{6}} \wp' \left(\frac{2\omega}{3} \right)$$

J und $\bar{\Omega}$ sind somit eindeutige Modulformen von den Dimensionen -1 resp. -3 ; sie gehören beide zu der durch die Congruenzen (22) definirten Gruppe homogener Modulsstitutionen, welche die Hauptcongruenzgruppe dritter Stufe als Untergruppe enthält; daher lassen sie sich rational durch die beiden Modulformen dritter Stufe ξ_3, ξ_4 von Herrn Fricke*) ausdrücken. Man hat nach „Modulfunctionen“ I, pag. 630 und II, pag. 20 und 371:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \wp \left(\frac{2\omega}{3} \right) = \frac{1}{4} \xi_3^2, \quad 12g_2 = \xi_3^4 + 8\xi_3 \xi_4^3, \\ \text{daraus} \\ \wp' \left(\frac{2\omega}{3} \right) = \frac{1}{3} \xi_3 (\xi_3^3 - \xi_4^3); \\ \text{ferner} \\ \wp' \left(\frac{2\omega}{3} \right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (\xi_3^3 - \xi_4^3); \end{array} \right.$$

woraus sich sofort die unten angegebenen Werthe von J und $\bar{\Omega}$ ergeben. Ω folgt dann mittels (4) und (10).

Auf diese Weise erhält man den Satz:

Die Invarianten $J, \Omega, \bar{\Omega}$ drücken sich folgendermassen durch die Modulformen ξ_3, ξ_4 aus:

$$(25) \quad J = -i\sqrt{2} \xi_3, \quad \Omega = \frac{i4\sqrt{2}}{27} \xi_4^3, \quad \bar{\Omega} = -\frac{i4\sqrt{2}}{27} (\xi_3^3 - \xi_4^3).$$

Daraus folgt für die absolute Invariante der Involution der folgende Ausdruck durch die Tetraederirrationalität $\xi = \frac{\xi_3}{\xi_4}$:

$$(26) \quad \frac{2}{27} J^3 : \bar{\Omega} : \Omega = \xi^3 : 1 - \xi^3 : 1.$$

Unter Zuziehung der cubischen Involution könnte man daher geradezu ξ_3, ξ_4 definiren durch die Gleichungen:

$$(27) \quad \xi_3 = \frac{i}{\sqrt{2}} J, \quad \xi_4 = \frac{3i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\Omega}{2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

*) Modulfunctionen, I, pag. 630; wegen der dort gebrauchten Bezeichnung vergleiche I, pag. 146.

An diese Formeln knüpft sich eine bemerkenswerthe *Normalform* für die cubische Involution; es gilt der Satz:

Die Involution $[\vartheta, J]$ *lässt sich durch lineare Transformation der Variablen* x_1, x_2 *auf die folgende Normalform bringen:**

$$(28) \quad \begin{cases} \vartheta_0 = \frac{z_2}{3} (2\xi_4 z_1^3 + 3\xi_3 z_1^2 z_2 - \xi_4 z_2^3), \\ J_0 = \xi_3, \end{cases}$$

denn für die absolute Invariante dieser Involution findet man

$$\frac{2}{27} \frac{J_0^3}{\Omega_0} = \xi^3 = \frac{2}{27} \frac{J^3}{\Omega},$$

die Involution ist also mit $[\vartheta, J]$ äquivalent.

Es mögen hier noch die Formen f_0, \bar{f}_0, Γ_0 für die Normalform (28) Platz finden, da wir dieselben später brauchen werden:

$$(29) \quad \begin{cases} 6f_0 = -\xi_4^2 z_1^4 + 2\xi_3 \xi_4 z_1^3 z_2 + 3\xi_3^2 z_1^2 z_2^2 - 4\xi_4^2 z_1 z_2^3 - 4\xi_3 \xi_4 z_2^4, \\ 6\bar{f}_0 = -z_1 [\xi_4^2 z_1^3 + 6\xi_3 \xi_4 z_1^2 z_2 + 9\xi_3^2 z_1 z_2^2 + 4\xi_4^2 z_2^3], \\ -9\Gamma_0 = \xi_4^2 z_1^4 + 4\xi_4^2 z_1 z_2^3 + 3\xi_3 \xi_4 z_2^4. \end{cases}$$

Hieraus folgt zugleich die Bedeutung der kanonischen Variablen z_1, z_2 . Die Variable z_1 liefert, $= 0$ gesetzt, das dem Doppelement $z_2 = 0$ im conjugirten Büschel $[\vartheta_0, -J_0]$ zugehörige Verzweigungselement*).

Wir geben noch eine Anwendung der Gleichungen (25) auf die Lösung der Aufgabe:

Alle cubischen Involutionen zu bestimmen, welche mit einer gegebenen die Verzweigungselemente gemein haben.

Wir schreiben zunächst unter Benutzung von „Modulfunctionen“ pag. 20, (8), ϑ in der Form

$$(30) \quad \vartheta = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\xi_4 H_f + \frac{1}{2} \xi_3^2 \xi_4 f}{\sqrt[3]{\Delta}}$$

und wenden nunmehr die Substitution T an:

$$\omega_1 = \omega', \quad \omega_1' = -\omega.$$

Ihre Wirkung auf $\xi_3, \xi_4, \sqrt[3]{\Delta}$ ist nach „Modulfunctionen“ I, pag. 630 und 627:

$$i\sqrt[3]{\xi_3'} = \xi_3 + 2\xi_4, \quad i\sqrt[3]{\xi_4'} = \xi_3 - \xi_4, \quad \sqrt[3]{\Delta'} = \sqrt[3]{\Delta}.$$

*) Es ist dies diejenige Normalform, von welcher man ausgehen muss, um bei dem Problem der Reduction des hyperelliptischen Integrals erster Ordnung und erster Gattung durch eine Transformation dritten Grades auf die von Herrn Goursat gegebene canonische Form zu kommen (Comptes Rendus t. 100, pag. 622).

Daher gehen ϑ und J über in:

$$\vartheta' = \frac{(\xi_3 - \xi_4)H_f - \frac{1}{6}(\xi_3 + 2\xi_4)^2(\xi_3 - \xi_4)f}{\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{\Delta}},$$

$$J' = -\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}(\xi_3 + 2\xi_4).$$

Die Involution $[\vartheta', J']$ hat nach dem früheren mit $[\vartheta, J]$ die Verzweigungselemente gemein; die beiden übrigen Involutionen, welche gleichfalls die Verzweigungselemente mit $[\vartheta, J]$ gemein haben, gehen aus $[\vartheta', J']$ durch zweimalige successive Anwendung der Substitution S :

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_1' = \omega + \omega'$$

hervor; dieselbe lässt ξ_3 ungeändert und multiplicirt ξ_4 mit einer imaginären dritten Einheitswurzel.

Andererseits berechnet man aus (30) und (25)

$$\Gamma = \frac{\xi_4 \left[-\xi_3 H_f + \frac{1}{6}(\xi_3^3 - 4\xi_4^3)f \right]}{3\sqrt[3]{\Delta}}$$

und man erhält so den Satz:

Die drei cubischen Involutionen, welche mit der Involution $[\vartheta, J]$ die Verzweigungselemente gemein haben, sind

$$(31) \quad \begin{cases} i\sqrt[3]{3}\vartheta' = -\vartheta - \frac{\Gamma}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}, \\ i\sqrt[3]{3}J' = J + 6\left(\frac{\Omega}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \end{cases}$$

wobei der dritten Wurzel $\left(\frac{\Omega}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ der Reihe nach ihre drei Werthe beizulegen sind.

§ 4.

Die drei-eindeutige Verwandtschaft: $\Gamma_x^3 \Gamma_y = 0$.

Nach § 1, (8) ist unser cubisches Büschel das erste Polarenbüschel der biquadratischen Form Γ ; die Relation

$$(32) \quad \Gamma_x^3 \Gamma_y = 0$$

ordnet also jedem Tripel der Involution einen Werth des Parameters y zu. Wir haben in diesem Paragraphen, als Vorbereitung für die Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen, die hierdurch definirte drei-eindeutige Verwandtschaft zwischen x und y näher zu untersuchen.

a) Wir berechnen zunächst die Hesse'sche einer beliebigen Form

$$F = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \Gamma_x^3 \Gamma_y$$

unseres Büschels:

$$\Delta_F = (F, F)_2 = (\Gamma \Gamma')^2 \Gamma_x \Gamma_x' \Gamma_y \Gamma_y';$$

durch Entwicklung in die Clebsch-Gordan'sche Reihe erhält man unter Benutzung von (15):

$$(33) \quad \Delta_F = \Omega \left[\vartheta_x^2 \vartheta_y^2 - \frac{1}{2} J(xy)^2 \right].$$

Es unterscheidet sich also Δ_F nur um einen constanten Factor von der linken Seite der Verwandtschaftsgleichung (11) des conjugirten Büschels $[\vartheta, -J]$. Das giebt aber den Satz*):

Die beiden Hesse'schen Punkte irgend eines Tripels

$$\Gamma_x^3 \Gamma_y = 0$$

der Involution $[\vartheta, J]$ bilden zusammen mit dem Element y ein Tripel der conjugirten Involution $[\vartheta, -J]$.

b) Wenden wir diesen Satz auf den speciellen Fall einer Verzweigungsgruppe: $c_\alpha, d_\alpha, d_\alpha$ an, (wo α einen der Werthe 0, 1, 2, 3 hat und c_0, d_0 mit c, d gleichbedeutend sein sollen), so sind die beiden Hesse'schen Punkte bekanntlich: d_α, d_α ; dieses Paar bildet aber, wie wir wissen, mit dem Verzweigungselement \bar{c}_α zusammen ein Tripel der conjugirten Involution. Das heisst**):

Die Verwandtschaft (32) ordnet den Werthen $x = c_\alpha, d_\alpha, d_\alpha$ den Werth $y = \bar{c}_\alpha$ zu; also;

$$(34) \quad \Gamma_x^3 \Gamma_{\bar{c}_\alpha} = \varrho_\alpha (x c_\alpha) (x d_\alpha)^2,$$

unter ϱ_α eine Constante verstanden.

Die Verzweigungselemente $\bar{c}, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ sind somit diejenigen Werthe von y , für welche die cubische Form $F = \Gamma_x^3 \Gamma_y$ eine Doppelwurzel besitzt, d. h. aber die Verzweigungsform $\bar{f}(y)$ der conjugirten Involution kann sich nur um einen constanten Factor von der Discriminante

$$R_F = (\Delta_F, \Delta_F)_2$$

*) Der erste Theil dieses Satzes, (dass die beiden Hesse'schen Punkte ein Paar des conjugirten Büschels bilden), findet sich schon bei Le Paige, l. c. pag. 65.

**) Deutet man nach Sturm (Borchardt's Journal, Bd. 86) die Variable $x_1: x_2$ auf einer cubischen Raumcurve R_3 , so wird bekanntlich die cubische Involution durch eine Gerade g dargestellt. Aus unserm Satz folgt dann, dass das Doppelverhältniss der vier Tangentialebenen durch g an R_3 dem Doppelverhältniss der vier Verzweigungselemente \bar{c}_α der conjugirten Involution gleich ist, während das Doppelverhältniss der Treffpunkte von g mit den Tangenten an R_3 in d, d_1, d_2, d_3 dem Doppelverhältniss der vier Verzweigungselemente c_α gleich ist.

der cubischen Form F unterscheiden. In der That ergiebt die Rechnung

$$R_F = \frac{1}{3} \Omega^2 \bar{f}(y).$$

e) Wir stellen uns weiter die Aufgabe: *diejenigen Werthe von x zu bestimmen, welche in der Verwandtschaft (32) dem Doppelement $y = d$ entsprechen*, d. h. die Gleichung

$$\Gamma_x^3 \Gamma_d = 0$$

aufzulösen.

Dazu drücken wir zunächst mittels (19) und (20) Γ durch f und H_f aus; es kommt:

$$(35) \quad 3M^2\Gamma = (12p^2 - g_2)H_f + (-24p^3 + 10g_2p + 12g_3)f$$

wo wieder $\wp\left(\frac{2\omega}{3}\right) = p$ gesetzt ist; und nunmehr wenden wir auf die Variablen x und y die cogrediente lineare Transformation

$$\frac{1}{4} \frac{g_x g_c^2}{(xc)} = \frac{s_1}{s_2}, \quad \frac{1}{4} \frac{g_y g_c^2}{(yc)} = \frac{t_1}{t_2},$$

wo

$$f(x) = (xc)g_x^3$$

gesetzt ist, an, nachdem wir dieselbe homogen gemacht und auf die Determinante 1 normirt haben. Sie transformirt nach § 2 das Doppelement $y = d$ in den Werth $t = p$; sie führt die Verzweigungsform $f(x)$ in die Weierstrass'sche Normalform über:

$$f(x) = 4s_1^3 s_2 - g_2 s_1 s_2^3 - g_3 s_2^4$$

und ihre Hesse'sche H_f in

$$H_f(x) = -2s_1^4 - g_2 s_1^2 s_2^2 - 4g_3 s_1 s_2^3 - \frac{1}{8} g_2^2 s_2^4.$$

Daraus berechnet man aber mittels (35) für die Polare $\Gamma_x^3 \Gamma_d$ den Werth

$$\wp \Gamma_x^3 \Gamma_d = s_1^3 + p s_1^2 s_2 + \left(p^2 - \frac{1}{2} g_2\right) s_1 s_2^2 + \left(p^3 - \frac{1}{2} g_2 p - g_3\right) s_2^3$$

wobei \wp ein constanter Factor ist. Nun ist aber die rechte Seite identisch mit der rechten Seite der Dreitheilungsgleichung (18) dividirt durch ihren einen Linearfactor $s_1 - p s_2$:

$$\left(s_1^4 - \frac{1}{2} g_2 s_1^2 s_2^2 - g_3 s_1 s_2^3 - \frac{1}{8} g_2^2 s_2^4\right) : (s_1 - p s_2),$$

ihre Wurzeln sind also

$$p' = \wp\left(\frac{2\omega'}{3}\right), \quad p'' = \wp\left(\frac{2\omega + 2\omega'}{3}\right), \quad p''' = \wp\left(\frac{4\omega + 4\omega'}{3}\right).$$

Diesen Werthen von $s_1 : s_2$ entsprechen aber als zugehörige Werthe von x nach § 2 die in den drei Involutionen

$$[\wp', J'], \quad [\wp'', J''], \quad [\wp''', J''']$$

beziehungsweise dem Verzweigungselement c zugehörigen Doppelemente

$$x = d', d'', d''';$$

diese sind also die gesuchten Wurzeln der Gleichung $\Gamma_x^3 \Gamma_\alpha = 0$.

Andererseits wissen wir, dass das mit dem Element d ein Tripel der conjugirten Involution $[\vartheta, -J]$ bildende Paar ist: d, \bar{c} . Nach (33) sind also \bar{d}, \bar{c} die beiden Hesse'schen Punkte des Tripels d', d'', d''' .

Aus Symmetriegründen folgt dann, dass genau die entsprechenden Resultate für jedes der drei übrigen Doppelemente d_α gelten muss, und so haben wir den folgenden Satz*) über die Doppelemente der vier Involutionen mit den gemeinsamen Verzweigungselementen c, c_1, c_2, c_3 gewonnen:

Die Wurzeln der Gleichung

$$\Gamma_x^3 \Gamma_{d_\alpha} = 0$$

sind die drei Doppelemente

$$d'_\alpha, d''_\alpha, d'''_\alpha$$

welche beziehungsweise in den drei Involutionen

$$[\vartheta', J'], [\vartheta'', J''], [\vartheta''', J''']$$

dem Verzweigungselement c_α zugeordnet sind, welches in der Involution $[\vartheta, J]$ zum Doppelement d_α gehört. Die drei Doppelemente $d'_\alpha, d''_\alpha, d'''_\alpha$ bilden daher ein Tripel der Involution $[\vartheta, J]$ und ihre beiden Hesse'schen Punkte sind das Doppelement d_α und das demselben in der conjugirten Involution $[\vartheta, -J]$ zugeordnete Verzweigungselement \bar{c}_α .

§ 5.

Die Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen.

Wir wenden jetzt die Resultate des vorigen Paragraphen auf die Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen an.

Multiplicirt man die vier Gleichungen (30), und setzt dann links

$$(36) \quad y_1 = \frac{1}{4} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_2}, \quad y_2 = -\frac{1}{4} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}$$

so erhält man

$$\bar{f}(y) = k f(x) \vartheta^2(x).$$

wo k eine Constante bedeutet. Um dieselbe zu bestimmen berechnen wir auf beiden Seiten den Coefficienten der höchsten Potenz von x_1 und zwar führen wir die Rechnung bequem an der Normalform (28) mit Hilfe der Formeln (29) aus.

Das Resultat ist

$$k = -\frac{8}{4} \Omega^2,$$

*) Dabei ist der Index α wieder in derselben Bedeutung gebraucht wie oben.

man erhält also

$$(37) \quad \bar{f}(y) = -\frac{3}{4} \Omega^2 f(x) \vartheta^2(x).$$

Ferner giebt eine leichte Rechnung

$$(38) \quad (y \, dy) = \frac{3}{2} \Omega \vartheta(x) (x \, dx).$$

Combinirt man diese beiden Gleichungen, und beachtet noch, dass dem Werth $x = c$ in der Relation (32) der Werth $y = \bar{c}$ entspricht, so ergibt sich der folgende *Fundamentalsatz*:

Nimmt man zwischen x und y die Relation

$$(32) \quad \Gamma_x^3 \Gamma_y = 0$$

an, so ist

$$(39) \quad \int_c^y \frac{(y \, dy)}{\sqrt{\bar{f}(y)}} = i \sqrt{3} \int_c^x \frac{(x \, dx)}{\sqrt{f(x)}},$$

wo die Wurzeln der beiden Formen

$$f(x) = 3H_\vartheta(x) + J\vartheta(x), \quad \bar{f}(y) = 3H_\vartheta(y) - J\vartheta(y)$$

die Verzweigungselemente der durch (32) definirten cubischen Involution, resp. ihrer conjugirten, sind).*

Dazu ist noch zu bemerken, dass wir es, streng genommen, mit einer drei-eindeutigen Beziehung zwischen den Punkten der zu den beiden Integralen gehörigen *Riemann'schen Flächen* zu thun haben, also noch die zeichenfixirende Relation

$$(40) \quad \sqrt{\bar{f}(y)} = \frac{i\sqrt{3}}{2} \Omega \vartheta(x) \sqrt{f(x)}$$

zu (32) hinzufügen müssen.

Umgekehrt: *Sind zwei elliptische Integrale erster Gattung durch eine Transformation dritten Grades — der man stets die polare Form $g_x^3 g_y = 0$ geben kann — in einander transformirbar, so sind die Verzweigungspunkte der beiden Integrale die Verzweigungselemente zweier conjugirter cubischer Involutionen. —*

Wir denken uns jetzt für die conjugirte Involution — und zwar wieder in der absoluten Normirung $\bar{\vartheta} = \vartheta$, $\bar{J} = -J$ — dieselben Entwicklungen durchgeführt wie in §§ 2 und 3 für die ursprüngliche Involution, und es sollen die Grössen

$$\bar{u}; \bar{g}_2, \bar{g}_3; \bar{\wp}(\bar{u}); \bar{\omega}, \bar{\omega}', \bar{\Delta}$$

für die conjugirte Involution genau dieselbe Bedeutung haben, wie die

*) Man kann diesen Satz auch aus einem bekannten Satz von Hermite über die Transformation dritter Ordnung ableiten (Crelle's Journal, Bd. 60, p. 304); man braucht nur den Hermite'schen Satz mit den Formeln (15) für i_I, j_I, H_I zu verbinden.

entsprechenden nicht überstrichenen Grössen für die ursprüngliche. Und nunmehr fragen wir: Welche Beziehung besteht zwischen den Periodenpaaren $2\omega, 2\omega'$ und $2\bar{\omega}, 2\bar{\omega}'$?

a) Wenn wir festsetzen, dass in dem Integral

$$(41) \quad \bar{u} = \int_c^y \frac{(y \, dy)}{\sqrt{f(y)}}$$

der Integrationsweg der durch die Transformation (32), (40) dem Integrationsweg des Integrals

$$u = \int_0^x \frac{(x \, dx)}{\sqrt{f(x)}}$$

eindeutig zugeordnet sein soll, so haben wir nach (39):

$$(42) \quad \bar{u} = i\sqrt{3} u.$$

Ferner ist $\bar{\varphi}(\bar{u})$ eine rationale Function dritten Grades von $\varphi(u)$, da $\bar{\varphi}(\bar{u})$ und $\varphi(u)$ lineare Functionen von x resp. y sind, zwischen denen die Relation (32) besteht. Schreiben wir dann noch

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega} = i\sqrt{3} \omega, \quad \bar{\omega}' = i\sqrt{3} \omega', \\ \text{so wird} \\ \bar{\varphi}(\bar{u}) = \varphi(\bar{u} | \bar{\omega}, \bar{\omega}') = -\frac{1}{3} \varphi(u | \omega, \omega'), \end{array} \right.$$

und es ist also auch $\varphi(u | \omega, \omega')$, wofür wir $\bar{\varphi}(u)$ schreiben, eine rationale Function dritten Grades von φu . Wir haben also nach der Transformationstheorie das *erste Resultat*:

Es giebt ein primitives Periodenpaar $2\omega_1, 2\omega_1'$ von φu und ein solches $2\bar{\omega}, 2\bar{\omega}'$ von $\bar{\varphi} u$, so dass

$$(44) \quad \omega_1 = 3\bar{\omega}_1, \quad \omega_1' = \bar{\omega}_1'.$$

b) Sei jetzt

$$(45) \quad \omega_1 = \alpha\omega + \beta\omega', \quad \omega_1' = \gamma\omega + \delta\omega', \quad \text{wo } \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

so lässt sich weiter zeigen, dass $\beta \equiv 0 \pmod{3}$ sein muss.

Denn einerseits folgt aus der Transformationstheorie*), wenn $\bar{\Delta}$ die zu den Perioden $2\bar{\omega}, 2\bar{\omega}'$ gehörige Discriminante bezeichnet, dass

$$\frac{\bar{\Delta}^3}{\Delta} = \left(\varphi' \left(\frac{2\omega_1}{3} \right) \right)^3.$$

Andererseits aber folgt aus (14) und (23a)

$$\frac{\bar{\Delta}^3}{\Delta} = \frac{3^{18}}{2^{20}} \bar{\Omega}^3 = 3^6 \left(\varphi' \left(\frac{2\omega_1}{3} \right) \right)^3.$$

*) Z. B. C. Jordan, Cours d'Analyse, II, Nr. 479, ed. 1894.

Zwischen $\bar{\Delta}$ und $\tilde{\Delta}$ besteht aber die Relation

$$\tilde{\Delta} = 3^6 \bar{\Delta}.$$

Durch Vergleichung folgt also

$$\wp' \left(\frac{2\omega}{3} \right) = \varepsilon \wp' \left(\frac{2\omega}{3} \right),$$

unter ε eine 8^{te} Einheitswurzel verstanden; dieselbe kann aber, wie unmittelbar aus der Form der Gleichung 8^{ten} Grades*) für $\wp' \left(\frac{2\omega}{3} \right)$ folgt, nur ± 1 sein. Hieraus ergibt sich aber dass in (45)

$$\beta \equiv 0 \pmod{3}$$

sein muss. Hiernach können wir die Relation zwischen ω , ω' und $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$ jedenfalls auf die Form bringen

$$(46) \quad \frac{\omega}{3} = p \bar{\omega} + q \bar{\omega}', \quad \omega' = r \bar{\omega} + s \bar{\omega}'$$

wo p, q, r, s ganze Zahlen und $ps - qr = 1$.

e) Nach § 2 wird $y = d$ für $\bar{u} = \frac{2\bar{\omega}}{3}$, also für $u = \frac{2\omega}{3}$; andererseits wissen wir aber aus dem letzten Satz von § 4, dass $y = d$ wird, wenn x einen der Werthe $x = d', d'', d'''$ also u einen der Werthe

$$u = \frac{2\omega'}{3}, \quad \frac{2\omega + 2\omega'}{3}, \quad \frac{4\omega + 2\omega'}{3}$$

annimmt, es muss also sein

$$\bar{\wp} \left(\frac{2\bar{\omega}}{3} \right) = \bar{\wp} \left(\frac{2\omega'}{3} \right);$$

daraus folgt aber dass in (46)

$$s \equiv 0 \pmod{3}$$

sein muss; sei $s = 3s'$ und es folgt dann $q \equiv \pm 1 \pmod{3}$.

d) Man kann sich folgendermassen überzeugen, dass $q \equiv -1 \pmod{3}$ sein muss: Da Ω die zu $\bar{\Omega}$ conjugirte Grösse ist, so folgt aus (23 a)

$$\Omega = \frac{8i}{3\sqrt{6}} \bar{\wp}' \left(\frac{2\bar{\omega}}{3} \right) = - \frac{8}{27\sqrt{2}} \bar{\wp}' \left(\frac{2\omega'}{3} \right);$$

aber $\frac{\bar{\omega}}{3} = s' \cdot \frac{\omega}{3} - q \frac{\omega'}{3}$ und $\frac{2\omega}{3}$ ist eine Periode von $\bar{\wp}' u$ also

$$\Omega = + \frac{8}{27\sqrt{2}} \bar{\wp}' \left(\frac{2q\omega'}{3} \right).$$

*) Modulfunktionen, II, pag. 21; wäre s eine primitive vierte oder achte Einheitswurzel, so könnten in der Gleichung für $\wp' \left(\frac{2\omega}{3} \right)$ nur Potenzen von \wp'^4 resp. \wp'^8 vorkommen.

Nun ist nach der Transformationstheorie

$$\overline{\wp}'\left(\frac{2\omega'}{3}\right) = \wp'\left(\frac{2\omega'}{3}\right) + \wp'\left(\frac{2\omega + 2\omega'}{3}\right) + \wp'\left(\frac{4\omega + 2\omega'}{3}\right).$$

Für die rechte Seite ergibt sich aber nach „Modulfunktionen“ II, p. 20, (8) und I pag. 627, (14) und pag. 630, (6) der Werth: $\frac{54^3}{i}$. Die Vergleichung mit (25) zeigt dann, dass

$$(48) \quad q \equiv -1 \pmod{3}$$

genommen werden muss; hieraus folgt dann, dass

$$r \equiv +1 \pmod{3}.$$

e) Weiteren Beschränkungen unterliegen aber die ganzen Zahlen p, q, r, s nicht, so lange die Perioden $2\omega, 2\omega'$ und $2\bar{\omega}, 2\bar{\omega}'$ den ihnen durch die Congruenzen (22) gelassenen Spielraum behalten. Denn man überzeugt sich leicht, dass man durch eine lineare den Bedingungen (22) genügende Transformation der Perioden $2\bar{\omega}, 2\bar{\omega}'$ stets erreichen kann, dass die Coefficienten p, q, r, s ein beliebig vorgeschriebenes den Bedingungen (47), (48) genügendes Werthsystem annehmen (z. B.: $\frac{\omega}{3} = -\bar{\omega}', \omega' = \bar{\omega}$).

Wir haben somit, indem wir von $\bar{\omega}, \bar{\omega}'$ zu ω, ω' zurückkehren, die vollständige Antwort auf die oben gestellte Frage in dem folgenden Satz:

Zwischen den zu zwei conjugirten Involutionen gehörigen charakteristischen Periodenpaaren $2\omega, 2\omega'$ und $2\bar{\omega}, 2\bar{\omega}'$ besteht die Relation:

$$(49) \quad \begin{aligned} \frac{\omega}{3} &= \frac{1}{i\sqrt{3}}(p \cdot \bar{\omega} + q \cdot \bar{\omega}'), \\ \omega' &= \frac{1}{i\sqrt{3}}(r \cdot \bar{\omega} + s \cdot \bar{\omega}') \end{aligned}$$

wobei p, q, r, s ganze Zahlen sind, welche den Bedingungen unterworfen sind:

$$(50) \quad \begin{cases} ps - qr = 1. \\ q \equiv -1, \quad r \equiv +1, \quad s \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

Auf Grund dieses Satzes kann man nun die früher gefundenen Relationen zwischen den Invarianten der beiden conjugirten Involutionen als *Modulargleichungen für die Transformation dritten Grades* deuten.

So liefern zunächst die Gleichungen (14) die Modulargleichung für die *erste Stufe* unmittelbar in der von Herrn Klein*) gegebenen Parameterdarstellung, wenn man

$$t = \frac{\Omega}{\bar{\Omega}}$$

*) Math. Annalen Bd. 14, p. 143.

setzt, also

$$\bar{t} = \frac{\Omega}{\Omega},$$

woraus

$$t\bar{t} = 1.$$

Ferner sind die aus (25) folgenden Gleichungen

$$\bar{\xi}_3 = -\xi_3, \quad \bar{\xi}_4^3 = \xi_4^3 - \xi_3^3$$

ebenfalls als Modulargleichungen aufzufassen. Verbindet man sie noch mit den Formeln für die Wirkung der linearen Transformation T auf ξ_3, ξ_4 (Modulfunctionen I, pag 630), so erhält man die Modulargleichung für die Tetraterirrationalität ξ in Uebereinstimmung mit „Modulfunctionen“ II, pag. 111.

Von besonderem Interesse sind die Invarianten $i_{\mathfrak{S}}, j_{\mathfrak{S}}$ von \mathfrak{D} , denn da $\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}$, so bleiben sie invariant nicht nur (wie J, Ω) bei den Substitutionen der Gruppe \mathfrak{S} von § 2, sondern auch noch bei den Substitutionen (49); diese bilden zusammen mit \mathfrak{S} eine Gruppe \mathfrak{G} , welche nach der oben unter e) gemachten Bemerkung ausser den Substitutionen von \mathfrak{S} nur die Producte der letzteren in die Substitution

$$\omega = i\sqrt[3]{\bar{\omega}}, \quad \omega' = \frac{1}{i\sqrt[3]{\bar{\omega}}}$$

enthält.

Die Invarianten $i_{\mathfrak{S}}, j_{\mathfrak{S}}$ sind also eindeutige automorphe Formen von $2\omega, 2\omega'$, welche bei der so definirten Gruppe \mathfrak{G} invariant bleiben.

II. Theil.

§ 6.

Kanonische Form für den Involutionsekegelschnitt.

Indem wir jetzt dazu übergehen, auch *irrationale* Combinanten in den Kreis unserer Betrachtung zu ziehen, müssen wir vor allem einige Festsetzungen über die *Bezeichnung* treffen.

Wir denken uns die Doppelemente in willkürlicher, aber ein für allemal festzuhaltender Reihenfolge mit

$$d, d_1, d_2, d_3$$

bezeichnet; dadurch ist dann auch die Reihenfolge der zugehörigen Verzweigungselemente

$$c, c_1, c_2, c_3 \quad \text{und} \quad \bar{c}, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$$

fixirt. Es folgt dann die Reihenfolge für die Wurzeln m_1, m_2, m_3 der cubischen Resolvente von \mathfrak{D}

$$(51) \quad m^3 - \frac{1}{2} i_{\mathfrak{S}} m \frac{1}{3} - \frac{1}{3} j_{\mathfrak{S}} = 0$$

und für die Weierstrass'schen Grössen e_1, e_2, e_3 und $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ aus den Relationen *)

$$(52) \quad \begin{cases} (d d_\alpha) (d_\beta d_\gamma) = -2(m_\beta - m_\gamma), \\ (c c_\alpha) (c_\beta c_\gamma) = -4(e_\beta - e_\gamma); \quad (\bar{c} \bar{c}_\alpha) (\bar{c}_\beta \bar{c}_\gamma) = -4(\bar{e}_\beta - \bar{e}_\gamma), \end{cases}$$

wo

$$\alpha, \beta, \gamma = \begin{cases} 1, 2, 3, \\ 2, 3, 1, \\ 3, 1, 2. \end{cases}$$

Andererseits konnten wir das Periodenpaar $2\omega, 2\omega'$ noch einer beliebigen Transformation der Gruppe \mathfrak{S} unterwerfen (§ 2); derselben gehören die folgenden Transformationen an

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & -3 \\ 1, & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & -3 \\ 3, & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, & 3 \\ 1, & 1 \end{pmatrix},$$

welche die drei Werthe

$$\varphi\omega, \quad \varphi(\omega + \omega'), \quad \varphi\omega'$$

auf alle möglichen sechs Arten vertauschen: durch eine derselben können wir daher erreichen, dass

$$(53) \quad e_1 = \varphi\omega, \quad e_2 = \varphi(\omega + \omega'), \quad e_3 = \varphi\omega'$$

wird.

Wir fügen jetzt unsern früheren Bedingungen über das Periodenpaar $2\omega, 2\omega'$ noch die weitere Bedingung (53) hinzu, alsdann ist das Periodenpaar nur noch gleichberechtigt mit allen durch eine lineare Transformation

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

daraus hervorgehenden, in welcher

$$(54) \quad \alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv 0, \quad \delta \equiv 1 \pmod{6}, \quad \gamma \equiv 0 \pmod{2}.$$

Genau dasselbe gilt für die Perioden $2\bar{\omega}, 2\bar{\omega}'$, denen wir die analoge Bedingung

$$(55) \quad \bar{e}_1 = \bar{\varphi}(\bar{\omega}), \quad \bar{e}_2 = \bar{\varphi}(\bar{\omega} + \bar{\omega}'), \quad \bar{e}_3 = \bar{\varphi}(\bar{\omega}')$$

aufzulegen. —

Auf die wichtigsten irrationalen Invarianten der Involution wird man durch Betrachtung des *Involutionsegschnitts****) geführt:

Um denselben analytisch darzustellen, schreiben wir, mit X_1, X_2, X_3 homogene Punktcoordinaten bezeichnend, den „Normkegelschnitt“, N , in der Parameterdarstellung***):

$$(56) \quad \varphi X_1 = x_1^2, \quad \varphi X_2 = 2x_1x_2, \quad \varphi X_3 = x_2^2.$$

*) Vgl. Modulfunktionen I, pag. 17.

**) Weyr, Grundzüge etc. Nr. 15.

***) Vgl. für das Folgende F. Meyer, Apolarität und rationale Curven § 12.

Die Coordinaten der Verbindungslinie zweier Punkte x und y von N sind dann

$$(57) \quad \sigma U_1 = x_2 y_2, \quad \sigma U_2 = -\frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad \sigma U_3 = x_1 x_2;$$

gehören nun x und y demselben Tripel der Involution (1) an, so genügen sie der Verwandtschaftsgleichung (9); dies liefert sofort die Gleichung des Involutionsekegelschnitts I in Liniencoordinaten:

$$(58) \quad \vartheta_4 U_1^2 + 4\vartheta_2 U_2^2 + \vartheta_0 U_3^2 - 4\vartheta_1 U_2 U_3 + 2\vartheta_2 U_3 U_1 - 4\vartheta_3 U_1 U_2 \\ + \frac{2}{3} J(U_2^2 - U_3 U_1) = 0$$

wobei

$$\vartheta = \vartheta_0 x_1^4 + 4\vartheta_1 x_1^3 x_2 + 6\vartheta_2 x_1^2 x_2^2 + 4\vartheta_3 x_1 x_2^3 + \vartheta_4 x_2^4$$

gesetzt ist. Aus (58) ergibt sich für die Gleichung des Involutionsekegelschnitts in Punktcoordinaten

$$(59) \quad a_0 X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_4 X_3^2 + 2a_3 X_2 X_3 + 2a_2 X_3 X_1 + 2a_1 X_1 X_2 \\ + \frac{J^2}{8} (4X_3 X_1 - X_2^2) = 0$$

wobei

$$f = 3H_3 + J\vartheta = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$$

gesetzt ist.

Man verificirt hieran den von Weyr herrührenden Satz, dass die Doppelemente der Involution die Berührungspunkte der vier gemeinsamen Tangenten von I und N mit N sind, die Verzweigungselemente die vier Schnittpunkte von I und N^*).

*) Die obigen Formeln führen zu einer zweiten *directen* Lösung des in § 2 behandelten Problems: alle cubischen Involutionen mit gegebenen Verzweigungselementen zu bestimmen. Denn ist $[\vartheta, J]$ eine Involution, deren Verzweigungselemente die Wurzeln von $f \equiv a_x^4 = 0$ sind, so muss der zugehörige Involutionsekegelschnitt durch die Schnittpunkte des Kegelschnitts

$$K \equiv a_0 X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_4 X_3^2 + 2a_3 X_2 X_3 + 2a_2 X_3 X_1 + 2a_1 X_1 X_2 = 0$$

mit dem Normkegelschnitt hindurchgehen, muss also die Form haben:

$$K - \varrho(4X_3 X_1 - X_2^2) = 0,$$

wo ϱ ein Parameter ist; schreiben wir

$$H_f = h_0 x_1^4 + 4h_1 x_1^3 x_2 + 6h_2 x_1^2 x_2^2 + 4h_3 x_1 x_2^3 + h_4 x_2^4,$$

so lautet daher die Gleichung des Involutionsekegelschnitts in Liniencoordinaten

$$\left(\frac{1}{2} h_4 U_1^2 + 2h_2 U_2^2 + \frac{1}{2} h_0 U_3^2 - 2h_1 U_2 U_3 + h_2 U_3 U_1 - 2h_3 U_1 U_2 \right) + \\ + \varrho(a_4 U_1^2 + 4a_2 U_2^2 + a_0 U_3^2 - 4a_1 U_2 U_3 + 2a_2 U_3 U_1 - 4a_3 U_1 U_2) + \\ + \left(4\varrho^2 - \frac{\varrho_2}{3} \right) (U_3 U_1 - U_2^2) = 0.$$

Diese Gleichung muss aber mit der Gleichung (58) identisch sein; die Vergleichung ergibt

Wir transformiren jetzt die beiden Kegelschnitte I und N auf ihr gemeinsames Polardreieck. Die nach Salmon, Conic sections, 6th ed. Art. 381, unter Benutzung von Clebsch, Binäre Formen, § 44 und § 45 durchzuführende Rechnung ergibt folgendes Resultat:

Seien

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 x_1^2 + 2\varphi_1 x_1 x_2 + \varphi_2 x_2^2, \\ \psi &= \psi_0 x_1^2 + 2\psi_1 x_1 x_2 + \psi_2 x_2^2, \\ \chi &= \chi_0 x_1^2 + 2\chi_1 x_1 x_2 + \chi_2 x_2^2\end{aligned}$$

in Clebsch'scher Bezeichnung die drei quadratischen Factoren von T_3 , der Reihe nach den Wurzeln m_1, m_2, m_3 von (51) zugeordnet, alsdann führt die Coordinatentransformation:

$$(60) \quad \begin{aligned}\varrho Y_1 &= \sqrt{m_2 - m_3} (\varphi_0 X_1 + \varphi_1 X_2 + \varphi_2 X_3), \\ \varrho Y_2 &= \sqrt{m_3 - m_1} (\psi_0 X_1 + \psi_1 X_2 + \psi_2 X_3), \\ \varrho Y_3 &= \sqrt{m_1 - m_2} (\chi_0 X_1 + \chi_1 X_2 + \chi_2 X_3),\end{aligned}$$

und die damit contragrediente

$$(61) \quad \begin{aligned}\sigma V_1 &= \sqrt{m_2 - m_3} (\varphi_2 U_1 - 2\varphi_1 U_2 + \varphi_0 U_3), \\ \sigma V_2 &= \sqrt{m_3 - m_1} (\psi_2 U_1 - 2\psi_1 U_2 + \psi_0 U_3), \\ \sigma V_3 &= \sqrt{m_1 - m_2} (\chi_2 U_1 - 2\chi_1 U_2 + \chi_0 U_3)\end{aligned}$$

den Normkegelschnitt N und den Involutionskegelschnitt I über in die Normalform

$$(N) \quad \begin{cases} Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 0, \\ V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = 0 \end{cases}$$

und

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{Y_1^2}{k_1} + \frac{Y_2^2}{k_2} + \frac{Y_3^2}{k_3} = 0, \\ k_1 V_1^2 + k_2 V_2^2 + k_3 V_3^2 = 0; \end{cases}$$

dabei haben k_1, k_2, k_3 die Werthe

$$(62) \quad k_1 = m_1 - \frac{1}{3} J, \quad k_2 = m_2 - \frac{1}{3} J, \quad k_3 = m_3 - \frac{1}{3} J.$$

Zugleich ergibt sich durch Combination von (56) und (60) folgende Parameterdarstellung für die beiden Kegelschnitte

$$M\vartheta = H_f + 2\varrho f, \quad MJ = g_2 - 12\varrho^2,$$

wo M einen willkürlichen Proportionalitätsfactor bezeichnet. Ueberdies hat man zur Bestimmung von ϱ die Bedingung: $J^2 = 6i_3$; diese liefert

$$\varrho^4 - \frac{1}{2} g_2 \varrho^2 - g_3 \varrho - \frac{1}{48} g_2^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist aber identisch mit der Gleichung für die Dreitheilung der Perioden von ϱu , und damit sind wir wieder bei dem Resultat von § 2 angelangt.

$$(60a) \left\{ \begin{array}{ll} (N) & \varrho Y_1 = \sqrt{m_2 - m_3} \varphi, & \varrho Y_2 = \sqrt{m_3 - m_1} \psi, \\ & & \varrho Y_3 = \sqrt{m_1 - m_2} \chi, \\ (I) & \varrho Y_1 = \sqrt{k_1(m_2 - m_3)} \varphi, & \varrho Y_2 = \sqrt{k_2(m_3 - m_1)} \psi, \\ & & \varrho Y_3 = \sqrt{k_3(m_1 - m_2)} \chi. \end{array} \right.$$

Ist x, y, z ein Tripel unserer Involution und nennen wir den Berührungspunkt der Geraden yz mit I den dem Punkt x von N „entsprechenden“ Punkt von I , so lässt sich zeigen, dass bei obiger Parameterdarstellung derselbe Werth des Parameters $x_1 : x_2$ „entsprechende“ Punkte der beiden Kegelschnitte liefert.

Aus der weiter unten abgeleiteten Gleichung (79) folgt

$$e_\alpha = \frac{1}{2} \left(3k_\beta k_\gamma - \frac{1}{4} J^2 \right),$$

daraus berechnet man

$$H_f + 2e_\alpha f = \frac{1}{4} k_\beta k_\gamma (H_\beta + m_\alpha \beta),$$

und hieraus mit Hilfe von (17)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1^2(2u)}{\sigma^2(2u)} &= \frac{1}{4} k_2 k_3 \frac{\varphi^2}{f}, \\ \frac{\sigma_2^2(2u)}{\sigma^2(2u)} &= \frac{1}{4} k_3 k_1 \frac{\psi^2}{f}, \\ \frac{\sigma_3^2(2u)}{\sigma^2(2u)} &= \frac{1}{4} k_1 k_2 \frac{\chi^2}{f}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen liefern zusammen mit (60a) eine *transcendente Parameterdarstellung* der beiden Kegelschnitte N und I .

§ 7.

Irrationale Invarianten der Involution.

Wir wenden uns jetzt zu einer näheren Untersuchung der Grössen k_1, k_2, k_3 und anderer aus ihnen abgeleiteter irrationaler Invarianten der Involution.

a) Die Invarianten ξ_1, ξ_2 und ξ .

Aus (51) und (62) folgt, dass k_1, k_2, k_3 die Wurzeln der Gleichung

$$(63) \quad 4k^3 + 4Jk^2 + J^2k - \bar{\Omega} = 0$$

sind; zwischen ihnen besteht die Relation

$$(64) \quad k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - 2k_2k_3 - 2k_3k_1 - 2k_1k_2 = 0$$

welche bekanntlich die Bedingung dafür ist, dass es ein dem Kegelschnitt N eingeschriebenes Dreieck giebt, welches zugleich dem

Kegelschnitt I umschrieben ist. Die Relation lässt sich in irrationaler Form schreiben

$$(65) \quad \sqrt{k_1} + \sqrt{k_2} + \sqrt{k_3} = 0.$$

Wir führen nun die Bezeichnungen ein

$$(66) \quad l_1 = \sqrt{k_1}, \quad l_2 = \sqrt{k_2}, \quad l_3 = \sqrt{k_3}$$

mit der Festsetzung über die Vorzeichen, dass

$$(67) \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0$$

soll; hierdurch sind diese Grössen bis auf einen ihnen *gemeinsamen* Factor ± 1 bestimmt*).

Wir können die Relation (67) in allgemeiner Weise befriedigen, wenn wir setzen

$$(68) \quad l_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad l_2 = \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2, \quad l_3 = \varepsilon^2 \xi_1 + \varepsilon \xi_2,$$

wo

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

während ξ_1, ξ_2 zwei neue nunmehr unabhängige Invarianten sind.

Mittels (63) beweist man dann den Satz:

Die rationalen Invarianten $J, \Omega, \bar{\Omega}, j_3$ drücken sich folgendermassen durch ξ_1, ξ_2 aus:

$$(69) \quad \begin{aligned} J &= -6\xi_1\xi_2, & j_3 &= 3(\xi_1^6 + \xi_2^6), \\ \bar{\Omega} &= 4(\xi_1^3 + \xi_2^3)^2, & \Omega &= 4(\xi_1^3 - \xi_2^3)^2. \end{aligned}$$

Für die absoluten Invarianten

$$P = \frac{27\Omega}{2J^3}$$

und

$$Q = \frac{1}{J_3} = \frac{i_3^3 - 6j_3^2}{i_3^3}$$

folgen hieraus die Proportionen:

$$(70) \quad \begin{aligned} P : P - 1 : 1 &= \left(\frac{\xi_1^3 - \xi_2^3}{2}\right)^2 : \left(\frac{\xi_1^3 + \xi_2^3}{2}\right)^2 : -(\xi_1\xi_2)^3, \\ Q : Q - 1 : 1 &= \left(\frac{\xi_1^6 - \xi_2^6}{2}\right)^2 : \left(\frac{\xi_1^6 + \xi_2^6}{2}\right)^2 : -(\xi_1\xi_2)^6. \end{aligned}$$

Es ist also die absolute irrationale Invariante

$$(71) \quad \xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

*die kanonische Diederirrationalität**)* $n = 3$ in Bezug auf die rationale

*) Da wir ja die Involution als allgemein, und somit $\bar{\Omega} \neq 0$, also auch $l_1 l_2 l_3 \neq 0$ voraussetzen.

***) Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, pag. 60.

absolute Invariante $\frac{27\Omega}{J^3}$ der cubischen Involution, dagegen die kanonische Diederirrationale $n = 6$ in Bezug auf die rationale absolute Invariante $\frac{1}{J^3}$ von ϑ . —

Es sollen jetzt wieder die Grössen

$$\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3; \bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3; \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2; \bar{\xi}$$

für die conjugirte Involution genau dieselbe Bedeutung haben, wie die entsprechenden nicht überstrichenen Grössen für die ursprüngliche. Es bestehen dann sehr einfache Beziehungen zwischen den beiden Reihen von Grössen. Zunächst findet man aus (68)

$$(72) \quad l_2 l_3 = m_1 + \frac{1}{6} J, \quad l_3 l_1 = m_2 + \frac{1}{6} J, \quad l_1 l_2 = m_3 + \frac{1}{6} J;$$

daraus folgt

$$(l_2 - l_3)^2 = k_2 + k_3 - 2\left(m_1 + \frac{1}{6} J\right) = -3\left(m_1 + \frac{1}{3} J\right) = -3\bar{k}_1;$$

also indem wir die Quadratwurzel ziehen und den noch verfügbaren gemeinsamen Factor ± 1 von $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ passend wählen

$$(73) \quad l_2 - l_3 = i\sqrt{3}\bar{l}_1, \quad l_3 - l_1 = i\sqrt{3}\bar{l}_2, \quad l_1 - l_2 = i\sqrt{3}\bar{l}_3.$$

Hieraus ergibt sich aber:

Zwischen den zu zwei conjugirten Involutionsen gehörigen Grössen $\xi_1, \xi_2; \xi$ resp. $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}$ bestehen die Relationen

$$(74) \quad \bar{\xi}_1 = \xi_1, \quad \bar{\xi}_2 = -\xi_2, \quad \bar{\xi} = -\xi^*).$$

Zugleich folgt noch

$$(74a) \quad \bar{l}_1 = \xi_1 - \xi_2, \quad \bar{l}_2 = \varepsilon \xi_1 - \varepsilon^2 \xi_2, \quad \bar{l}_3 = \varepsilon^2 \xi_1 - \varepsilon \xi_2.$$

Denken wir uns ξ in der üblichen Weise durch einen Punkt auf der Kugel dargestellt, so repräsentirt jeder Punkt der Kugel eine Classe äquivalenter cubischer Involutionsen; umgekehrt entsprechen einer gegebenen Classe äquivalenter Involutionsen sechs Punkte der Kugel, welche durch die Drehungen der Diedergruppe $n = 3$ aus einem unter ihnen hervorgehen. Den Eckpunkten, Kantenhalbirungspunkten und Polen des Dieders entsprechen die singulären Classen von Involutionsen, in welchen resp.

$$\Omega = 0, \quad \bar{\Omega} = 0, \quad J = 0.$$

Wendet man eine Drehung um 180° um die Hauptaxe des Dieders an, so gehen die sechs Punkte in die sechs die conjugirte Classe darstellenden Punkte über.

*) Dabei ist noch hervorzuheben, dass die letzte Relation von der oben getroffenen Festsetzung über den gemeinsamen Factor ± 1 von $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ unabhängig ist.

b) Zugehörige Normalform und Darstellung der Doppelverhältnisse der Doppелеlemente und der Verzweigungselemente durch ξ .

An die Invarianten ξ_1, ξ_2 knüpft sich nun wieder eine einfache Normalform für die cubische Involution. In der That beweist man leicht den Satz:

Die cubische Involution $[\vartheta, J]$ lässt sich durch unimodulare lineare Transformation der Variablen auf die Form bringen

$$(75) \quad \begin{cases} \vartheta_1 = -2(y_1^3 + y_2^3)(\xi_1^2 y_1 + \xi_2^2 y_2), \\ J_1 = -6\xi_1 \xi_2. \end{cases}$$

Denn berechnet man die Invarianten J_1, Ω_1 dieser Involution, so ergibt sich

$$J_1 = -6\xi_1 \xi_2 = J; \quad \Omega_1 = 4(\xi_1^3 - \xi_2^3)^2 = \Omega.$$

Dabei entsprechen die Wurzeln von ϑ_1

$$(76) \quad -\frac{1}{\xi_2^2}, \quad -1, \quad -\varepsilon, \quad -\varepsilon^2$$

den Wurzeln

$$d, \quad d_1, \quad d_2, \quad d_3$$

von ϑ entweder der Reihe nach oder in einer der durch Anwendung der Vierergruppe daraus hervorgehenden Anordnungen. Man überzeugt sich hiervon indem man die Invariante $(d d_\alpha)(d_\beta d_\gamma)$ einerseits direct mittels (52), (62) und (68), anderseits durch Berechnung an der Normalform (75) durch ξ_1, ξ_2 ausdrückt; nur bei der angegebenen Zuordnung erhält man Uebereinstimmung der Resultate, und zwar

$$(77) \quad (d d_\alpha)(d_\beta d_\gamma) = \frac{i6}{\sqrt{3}} l_\alpha \bar{l}_\alpha \quad \text{für } \alpha, \beta, \gamma = \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2. \end{cases}$$

Unter Zuhilfenahme der Verwandtschaftsgleichung findet man ferner die Zerlegung der zu (75) gehörigen Verzweigungsform in Linearfactoren:

$$(78) \quad \begin{aligned} f_1 &= 3H_{\vartheta_1} + J_1 \vartheta_1 = \\ &= \frac{3}{2} [x_1 \xi_2 + x_2 \xi_1] [x_1 (2\xi_1 - \xi_2) + x_2 (2\xi_2 - \xi_1)] \cdot \\ &\quad [x_1 (2\varepsilon^2 \xi_1 - \xi_2) + x_2 (2\varepsilon \xi_2 - \xi_1)] [x_1 (2\varepsilon \xi_1 - \xi_2) + x_2 (2\varepsilon^2 \xi_2 - \xi_1)] \end{aligned}$$

und zwar sind die Linearfactoren von f_1 in der hingeschriebenen Reihenfolge den Wurzeln (76) von ϑ_1 zugeordnet.

Nummehr können wir auch die Invarianten $(cc_\alpha)(c_\beta c_\gamma)$ durch ξ_1, ξ_2 ausdrücken, indem wir sie an der Normalform (78) berechnen; es ergibt sich immer mit derselben Bedeutung für α, β, γ wie oben

$$(79) \quad (cc_\alpha)(c_\beta c_\gamma) = -4(e_\beta - e_\gamma) = -i \cdot 6\sqrt{3} l_\alpha^3 \bar{l}_\alpha = 6k_\alpha (k_\beta - k_\gamma)$$

und daraus nach (74) und (74a)

$$(80) \quad (\bar{c} \bar{c}_\alpha) (\bar{c}_\beta \bar{c}_\gamma) = -4(\bar{e}_\beta - \bar{e}_\gamma) = -i.6\sqrt{3} \bar{l}_\alpha^3 l_\alpha.$$

Hieraus folgt aber der Satz:

Die Doppelverhältnisse

$$\sigma = -\frac{(d d_1) (d_2 d_3)}{(d d_2) (d_3 d_1)} = \frac{m_2 - m_3}{m_1 - m_3},$$

$$\lambda = -\frac{(c c_1) (c_2 c_3)}{(c c_2) (c_3 c_1)} = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad \bar{\lambda} = -\frac{(\bar{c} \bar{c}_1) (\bar{c}_2 \bar{c}_3)}{(\bar{c} \bar{c}_2) (\bar{c}_3 \bar{c}_1)} = \frac{e_2 - \bar{e}_3}{e_1 - \bar{e}_3}$$

der Doppелеlemente und Verzweigungselemente der beiden conjugirten Involutionen drücken sich folgendermassen rational durch die absolute Invariante ξ aus:

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = -\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 \xi^2 - \xi}, \\ \lambda = -\frac{(\xi + 1)^3 (\xi - 1)}{(\xi \xi + \xi^2)^3 (\xi \xi - \xi^2)}, \quad \bar{\lambda} = -\frac{(\xi - 1)^3 (\xi + 1)}{(\xi \xi - \xi^2)^3 (\xi \xi + \xi^2)}. \end{array} \right.$$

Durch Elimination von ξ ergeben sich hieraus die folgenden Zusätze:

a) λ und $\bar{\lambda}$ sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(82) \quad \lambda^2 - 2\sigma(2\sigma^2 - 3\sigma + 2)\lambda + \sigma^4 = 0.$$

b) Zwischen λ und $\bar{\lambda}$ besteht die Relation*)

$$(83) \quad \sqrt[4]{\lambda \bar{\lambda}} + \sqrt[4]{(1 - \lambda)(1 - \bar{\lambda})} = 1.$$

Das ist aber die Jacobi'sche *Modulargleichung für die Transformation dritter Ordnung* des Moduls zweiter Stufe, ein Resultat, dass nach § 5 zu erwarten war.

Es sei noch erwähnt, dass auch die „*Weyr'sche Projectivität*“ (**)

$$\frac{(d d_1) (d_2 d_3)}{(d d_2) (d_1 d_3)} = \frac{(d c_1) (c_2 c_3)}{(d c_2) (c_1 c_3)}, \quad \frac{(\bar{c} \bar{c}_1) (\bar{c}_2 \bar{c}_3)}{(\bar{c} \bar{c}_2) (\bar{c}_1 \bar{c}_3)} = \frac{(\bar{c} c_1) (c_2 c_3)}{(\bar{c} c_2) (c_1 c_3)}$$

sich mittels der Normalform (75) beweisen lässt. —

Die Normalform (75) hängt aufs engste mit der *Weyr'schen* (***) *Deutung der Involution auf der ebenen Curve vierter Ordnung mit drei*

*) Nach dem Satz auf pag. 13, Fussnote, lassen sich diese Resultate auch als Sätze über die Doppelverhältnisse der Treffpunkte der vier Tangenten an die R_3 in d, d_1, d_2, d_3 mit ihren beiden Treffgeraden aussprechen, und in dieser geometrischen Deutung ist (82) bereits von Herrn Voss mittels Liniengeometrie gefunden worden (mitgetheilt bei Sturm, l. c. pag. 130), und (83) von Herrn Dixon (On twisted cubics which fulfil certain given conditions, Quaterly Journal of Math. Vol. XXIII (1889), pag. 352).

**) Em. Weyr, Ueber die projectivischen Beziehungen zwischen den singulären Elementen einer cubischen Involution, Wiener Berichte Bd. 73, (1876), pag. 654.

***) Wiener Berichte LXXXI, pag. 162, 1880.

Spitzen zusammen. Sind nämlich X_1, X_2, X_3 wieder homogene Punkt-coordinaten, so geben die Gleichungen

$\varrho X_1 = (y_1 + y_2)^{-2}$, $\varrho X_2 = (\varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2)^{-2}$, $\varrho X_3 = (\varepsilon^2 y_1 + \varepsilon y_2)^{-2}$
eine Parameterdarstellung der C_4 mit drei Spitzen

$$\left(\frac{1}{X_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{X_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{X_3}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

bei welcher den Spitzen die Werthe $y = -1, -\varepsilon, -\varepsilon^2$ entsprechen. Alsdann schneidet nach Weyr das Strahlenbüschel mit dem Punkt $y = \zeta$ der C_4 als Centrum auf der C_4 eine cubische Involution aus. Es lässt sich nun zeigen, dass diese cubische Involution gerade die obige Involution $[\mathfrak{S}_1, \mathfrak{J}_1]$ ist. —

c) Die cubischen Resolventen der Formen Γ und $\bar{\Gamma}$.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der cubischen Resolvente der biquadratischen Form $\bar{\Gamma}$:

$$\bar{n}^3 - \frac{1}{2} i_{\bar{\Gamma}} \bar{n} - \frac{1}{3} j_{\bar{\Gamma}} = 0,$$

oder nach (15)

$$(84) \quad n^3 + \frac{1}{2} J \bar{\Omega} \bar{n} - \frac{1}{2} \bar{\Omega}^2 = 0.$$

Andererseits folgt aber aus (63) und (72) für l_1, l_2, l_3 die cubische Gleichung

$$2l^3 + Jl - \sqrt{\bar{\Omega}} = 0;$$

dieselbe geht in (84) über durch die Substitution

$$\bar{n} = \sqrt{\bar{\Omega}} \cdot l;$$

also haben wir den Satz:

Die Wurzeln $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ der cubischen Resolvente der Form $\bar{\Gamma}$ drücken sich folgendermassen durch die früher betrachteten irrationalen Invarianten aus

$$(85) \quad \begin{aligned} \bar{n}_1 &= l_1 \sqrt{\bar{\Omega}} = 2(\xi_1^3 + \xi_2^3) (\xi_1 + \xi_2), \\ \bar{n}_2 &= l_2 \sqrt{\bar{\Omega}} = 2(\xi_1^3 + \xi_2^3) (\varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2), \\ \bar{n}_3 &= l_3 \sqrt{\bar{\Omega}} = 2(\xi_1^3 + \xi_2^3) (\varepsilon^2 \xi_1 + \varepsilon \xi_2). \end{aligned}$$

Dabei sind die Vorzeichen der Quadratwurzel eindeutig bestimmt durch die beiden Bedingungen

$$(85a) \quad \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 = 0, \quad \bar{n}_1 \bar{n}_2 \bar{n}_3 = \frac{1}{2} \bar{\Omega}^2.$$

Die entsprechenden Formeln gelten für die Wurzeln n_1, n_2, n_3 der cubischen Resolvente der Form Γ . Aus (73) folgt noch:

Zwischen den Wurzeln der cubischen Resolventen der Formen Γ und $\bar{\Gamma}$ bestehen die Relationen

$$(86) \quad \bar{n}_\beta - \bar{n}_\gamma = i\sqrt{3} \sqrt{\frac{\bar{\Omega}}{\Omega}} n_\alpha, \quad n_\beta - n_\gamma = i\sqrt{3} \sqrt{\frac{\Omega}{\bar{\Omega}}} \bar{n}_\alpha.$$

Ferner folgt aus (85) und (86):

Die Doppelverhältnisse

$$v = \frac{n_2 - n_3}{n_1 - n_3} \quad \text{und} \quad \bar{v} = \frac{\bar{n}_2 - \bar{n}_3}{\bar{n}_1 - \bar{n}_3}$$

der Wurzeln der biquadratischen Formen Γ und $\bar{\Gamma}$ drücken sich folgendermassen durch ξ aus:

$$(87) \quad v = -\frac{1 + \xi}{\varepsilon^2 + \varepsilon\xi}, \quad \bar{v} = -\frac{1 - \xi}{\varepsilon^2 - \varepsilon\xi};$$

sie sind daher die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(88) \quad v^2 - 2(1 - \sigma)v - \sigma = 0.$$

§ 8.

Darstellung der irrationalen Invarianten der Involution als elliptische Modul-Formen und -Functionen.

Die im vorigen Paragraphen behandelten irrationalen Invarianten, sollen nunmehr wieder durch elliptische Modul-Formen resp. -Functionen dargestellt werden.

a) Die Invarianten k_1, k_2, k_3 .

Als Folge der im Eingang von § 6 getroffenen Festsetzungen entsprechen den Doppелеlementen

$$x = d, d_1, d_2, d_3$$

der Reihe nach die Werthe

$$u = \frac{2\omega}{3}, \quad \omega + \frac{2\omega}{3}, \quad \omega + \omega' + \frac{2\omega}{3}, \quad \omega' + \frac{2\omega}{3}.$$

Führen wir daher neben der früheren Bezeichnung

$$p = \wp\left(\frac{2\omega}{3}\right)$$

noch die weitere ein

$$p_1 = \wp\left(\omega + \frac{2\omega}{3}\right), \quad p_2 = \wp\left(\omega + \omega' + \frac{2\omega}{3}\right), \quad p_3 = \wp\left(\omega' + \frac{2\omega}{3}\right)$$

so ist das früher mit σ bezeichnete Doppelverhältniss aus Doppелеlementen

$$\sigma = -\frac{(p - p_1)(p_2 - p_3)}{(p - p_2)(p_3 - p_1)}.$$

Nun berechnet man aber nach bekannten Formeln der Weierstrass'schen Theorie:

$$(89) \quad p - p_\alpha = \frac{\sigma_\alpha \left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma^2 \left(\frac{2\omega}{3}\right) \sigma_\alpha^2 \left(\frac{2\omega}{3}\right)},$$

$$(89a) \quad p_\beta - p_\gamma = (e_\beta - e_\gamma) \frac{\sigma_\alpha \left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma_\beta^2 \left(\frac{2\omega}{3}\right) \sigma_\gamma^2 \left(\frac{2\omega}{3}\right)}.$$

Daraus folgt:

$$\sigma = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \cdot \frac{\sigma_1^2 \left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma_2^2 \left(\frac{4\omega}{3}\right)}, \quad 1 - \sigma = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \frac{\sigma_3^2 \left(\frac{4\omega}{3}\right)}{\sigma_2^2 \left(\frac{4\omega}{3}\right)}.$$

Andererseits ist nach (81)

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \sigma \frac{k_1}{k_2}; \quad \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = (1 - \sigma) \frac{k_3}{k_2};$$

verbindet man dies mit der vorigen Gleichung, so kommt

$$k_1 : k_2 : k_3 = \frac{1}{\sigma_1^2 \left(\frac{4\omega}{3}\right)} : \frac{1}{\sigma_2^2 \left(\frac{4\omega}{3}\right)} : \frac{1}{\sigma_3^2 \left(\frac{4\omega}{3}\right)}.$$

Der Proportionalitätsfactor bestimmt sich aus

$$k_1 + k_2 + k_3 = -J$$

unter Benutzung von (20), und man erhält für k_α den Ausdruck

$$(90) \quad k_\alpha = \frac{1}{i\sqrt{6}} \wp' \left(\frac{2\omega}{3}\right) \frac{\sigma^2 \left(\frac{2\omega}{3}\right)}{\sigma_\alpha^2 \left(\frac{2\omega}{3}\right)}.$$

Wir führen hierin noch ϑ -Functionen ein; wir setzen

$$\frac{\omega'}{\omega} = \tau, \quad q = e^{\pi i \tau}$$

und schreiben in Jacobi'scher Bezeichnungsweise

$$\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, q), \\ \Theta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, q^3),$$

so erhält man aus (90) die folgende Darstellung von k_1, k_2, k_3 durch ϑ -Nullwerthe:

$$(91) \quad k_1 = \frac{i\sqrt{2}}{6} \frac{\pi}{\omega} \frac{\vartheta_2^3}{\Theta_2}, \quad k_2 = \frac{i\sqrt{2}}{6} \frac{\pi}{\omega} \frac{\vartheta_3^3}{\Theta_3}, \quad k_3 = \frac{i\sqrt{2}}{6} \frac{\pi}{\omega} \frac{\vartheta_0^3}{\Theta_0}.$$

Verbindet man mit (90) die aus (63) und (23a) sich ergebende Gleichung

$$(92) \quad \frac{\sqrt{6}}{i} \wp' \left(\frac{2\omega}{3} \right) = -9k_1 k_2 k_3,$$

so folgt

$$\frac{\sigma_\alpha^2 \left(\frac{2\omega}{3} \right)}{\sigma^2 \left(\frac{2\omega}{3} \right)} = \frac{\sigma_\alpha^2 \left(\frac{4\omega}{3} \right)}{\sigma^2 \left(\frac{4\omega}{3} \right)} = -\frac{3}{2} k_\beta k_\gamma.$$

Zieht man die Quadratwurzel und berücksichtigt (72) so kommt

$$(93) \quad \frac{\sigma_\alpha \left(\frac{4\omega}{3} \right)}{\sigma \left(\frac{4\omega}{3} \right)} = \frac{i}{2\sqrt{6}} (6m_\alpha + J) = \frac{3i}{2\sqrt{6}} (2k_\alpha + J).$$

Dabei ist das Zeichen aus den Anfangsgliedern der Entwicklungen beider Seiten nach Potenzen von q bestimmt, wobei von der „Modulfunctionen“ II, pag. 370, (5) und (7) gegebenen Entwicklung von ξ_3 Gebrauch zu machen ist. Mit Hilfe von (63) folgt dann weiter der Satz:

Die drei Grössen

$$\frac{\sigma_1 \left(\frac{4\omega}{3} \right)}{\sigma \left(\frac{4\omega}{3} \right)}, \quad \frac{\sigma_2 \left(\frac{4\omega}{3} \right)}{\sigma \left(\frac{4\omega}{3} \right)}, \quad \frac{\sigma_3 \left(\frac{4\omega}{3} \right)}{\sigma \left(\frac{4\omega}{3} \right)}$$

sind die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(94) \quad z^3 - \frac{3i}{2\sqrt{6}} J z^2 + \frac{3\sqrt{6}i}{16} \bar{\Omega} = 0.$$

Es gilt also insbesondere die Fundamentalrelation*)

$$(95) \quad \sigma_2 \left(\frac{4\omega}{3} \right) \sigma_3 \left(\frac{4\omega}{3} \right) + \sigma_3 \left(\frac{4\omega}{3} \right) \sigma_1 \left(\frac{4\omega}{3} \right) + \sigma_1 \left(\frac{4\omega}{3} \right) \sigma_2 \left(\frac{4\omega}{3} \right) = 0.$$

b) Die Invarianten $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ und ξ .

Die Grössen l_1, l_2, l_3 sind keine eindeutigen Modulformen, wohl aber wieder die Grössen $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$. Aus

$$(96) \quad \bar{n}_\alpha^2 = \bar{\Omega} k_\alpha$$

*) In Jacobi'scher Bezeichnung lautet dieselbe

$$\operatorname{dn} \frac{2K}{3} - \operatorname{cn} \frac{2K}{3} - \operatorname{cn} \frac{2K}{3} \operatorname{dn} \frac{2K}{3} = 0;$$

das ist aber, wenn wir, wie in der Jacobi'schen Behandlung des Schliessungsproblems für zwei Kreise von den Radien R, r und dem Mittelpunktsabstand α , setzen

$$\operatorname{cn} \frac{2K}{3} = \frac{r}{R + \alpha}, \quad \operatorname{dn} \frac{2K}{3} = \frac{R - \alpha}{R + \alpha},$$

nichts anderes als die bekannte Bedingung für den Dreisschluss:

$$r = \frac{R^2 - \alpha^2}{2R}.$$

und (90) folgt das *Resultat*

$$(97) \quad \bar{n}_\alpha = \frac{2}{3} \wp' \left(\frac{4\omega}{3} \right) \cdot \frac{\sigma \left(\frac{4\omega}{3} \right)}{\sigma_\alpha \left(\frac{4\omega}{3} \right)}, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

zeichenrichtig, da man mittels (95) und (23 a) sofort die beiden Zeichen bestimmenden Relationen (85 a) verificirt.

Beachtet man, dass nach Schwarz, Formelsammlung Art. 12, (16)

$$- \wp' \left(\frac{2\omega}{3} \right) = \wp' \left(\frac{4\omega}{3} \right) \frac{\sigma \left(\frac{4\omega}{3} \right)}{\sigma^4 \left(\frac{2\omega}{3} \right)},$$

so erhält man aus (97) und (89) auch noch den folgenden *Ausdruck* für \bar{n}_α

$$(98) \quad \bar{n}_\alpha = \frac{2}{3} (p - p_\alpha).$$

Aus (96) und (91) folgt

$$\frac{\bar{n}_1^2}{\bar{n}_2^2} = \frac{\vartheta_2^3 \Theta_3}{\Theta_2 \vartheta_3^3}, \quad \frac{\bar{n}_3^2}{\bar{n}_2^2} = \frac{\vartheta_0^3 \Theta_3}{\Theta_0 \vartheta_3^3};$$

wir führen jetzt mit Herrn Fricke*) die elliptische *Modulfunction* *sechster Stufe* ein

$$(99) \quad y(\tau) = \left(\frac{\vartheta_2}{\Theta_2} \right)^3,$$

so ist nach Herrn Fricke

$$(100) \quad \frac{\vartheta_2^3 \Theta_3}{\Theta_2 \vartheta_3^3} = \left(\frac{2y}{y+3} \right)^2, \quad \frac{\vartheta_0^3 \Theta_3}{\Theta_0 \vartheta_3^3} = \left(\frac{y-3}{y+3} \right)^2$$

und indem wir die Quadratwurzel ziehen

$$(101) \quad \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_2} = - \frac{2y}{y+3}, \quad \frac{\bar{n}_3}{\bar{n}_2} = \frac{y-3}{y+3},$$

zeichenrichtig, da nur bei dieser Wahl der Vorzeichen die aus (85 a) folgende Relation

$$\frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_2} + \frac{\bar{n}_3}{\bar{n}_1} = -1$$

befriedigt wird.

Hieraus erhält man aber unmittelbar die absolute Invariante ξ ; denn es ist nach (68) und (85)

$$\xi = \frac{l_1 + \varepsilon^2 l_2 + \varepsilon l_3}{l_1 + \varepsilon l_2 + \varepsilon^2 l_3} = \frac{\bar{n}_1 + \varepsilon^2 \bar{n}_2 + \varepsilon \bar{n}_3}{\bar{n}_1 + \varepsilon \bar{n}_2 + \varepsilon^2 \bar{n}_3}$$

und es liefert daher (101) den Satz:

*) Math. Ann. Bd. 29, pag. 121 und Modulfunctionen I, pag. 683 und II, pag. 391.

Die absolute Invariante ξ ist eine lineare Function der Fricke'schen Modulfunction sechster Stufe $y(\tau)$ und zwar ist

$$(102) \quad \xi = \frac{y + i\sqrt{3}}{y - i\sqrt{3}}.$$

c) Transformation dritter Ordnung.

Was endlich die Transformation dritter Ordnung betrifft, so sind in Folge der im Eingang von § 6 über die Perioden 2ω , $2\omega'$ und $2\bar{\omega}$, $2\bar{\omega}'$ getroffenen Festsetzungen nunmehr die Coefficienten p , q , r , s der Relation (49) noch weiter einzuschränken. Für $u = \omega$ resp. ω' wird nach den dortigen Festsetzungen $x = c_1$ resp. c_3 , und daher nach (34) $y = \bar{c}_1$ resp. \bar{c}_3 ; andererseits nimmt aber nach den Festsetzungen über $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$ y diese Werthe an für $\bar{u} = \bar{\omega}$ resp. $\bar{\omega}'$; daraus folgt aber

$$\bar{\wp}(\omega) = \bar{\wp}(\bar{\omega}); \quad \bar{\wp}(\omega') = \bar{\wp}(\bar{\omega}').$$

Dies zusammen mit den früheren Bedingungen (50) ergibt das Resultat:

Nach den Festsetzungen von § 6 müssen die Coefficienten p , q , r , s in der Relation (19) den Bedingungen genügen:

$$(103) \quad \begin{aligned} ps - qr &= 1, \\ p &\equiv 1 \pmod{2}; \quad q \equiv 2, \quad r \equiv 4, \quad s \equiv 3 \pmod{6}. \end{aligned}$$

Auch hier zeigt man wieder, dass man durch eine vorherige den Bedingungen (54) genügende lineare Transformation von $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$ erreichen kann, dass p , q , r , s einem beliebigen, den Bedingungen (103) genügenden System ganzer Zahlen gleich werden, z. B.

$$(104) \quad \frac{\omega}{3} = \frac{1}{i\sqrt{3}}(3\bar{\omega} - 4\bar{\omega}'), \quad \omega' = \frac{1}{i\sqrt{3}}(-2\bar{\omega} + 3\bar{\omega}').$$

Die früher zwischen den irrationalen Invarianten conjugirter Involutionen: $\lambda, \bar{\lambda}$; $\nu, \bar{\nu}$; $\xi, \bar{\xi}$ gefundenen Relationen stellen sich dann als Modulargleichungen für die Transformation dritten Grades dar. Dabei ist wegen ihrer Einfachheit besonders die Modulargleichung für ξ bemerkenswerth:

$$(105) \quad \xi\left(\frac{3p\tau - r}{-3q\tau + s}\right) = -\xi(\tau).$$

Führt man mittels (102) $y(\tau)$ statt ξ ein, und macht von den Fricke'schen Formeln für die lineare Transformation von y Gebrauch (Modulfunctionen I, pag. 685 wobei man sich nach dem obigen auf den speciellen Fall (104) beschränken darf), so geht (105) in die von Herrn Fricke, Modulfunctionen II, pag. 392 gegebene Formel

$$y(3\tau)y(\tau) = (1 - x(3\tau))^2$$

über, wo α die von Herrn Fricke ebenso bezeichnete Modulfunction sechster Stufe bezeichnet.

Eine eigenthümliche Stellung nehmen auch hier wieder die Invarianten von ϑ ein: $m_\beta - m_\gamma$, σ , ξ^2 , insofern sie nicht nur bei den Modulsstitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

mit den Bedingungen (54), sondern auch bei den mit jenen zusammen eine Gruppe bildenden Substitutionen

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{3}p & -i\sqrt{3}q \\ \frac{r}{i\sqrt{3}} & \frac{s}{i\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

mit den Bedingungen (103) unverändert bleiben.

Freiburg i. B., den 17. März 1897.
