

ÜBER DIE ASYMPTOTISCHE DARSTELLUNG DER INTEGRALE LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

J. HORN

in CLAUSTHAL.

Im ersten Theil meiner Arbeit *Über das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle*¹ habe ich das Verhalten der Integrale einer Riccati'schen Differentialgleichung und einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Fall untersucht, dass die unabhängige Veränderliche auf einem bestimmten Wege nach einer Unbestimmtheitsstelle geht. Für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung,² deren Coefficienten in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle den Charakter rationaler Functionen haben, habe ich die Sätze des Herrn POINCARÉ³ über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten durch die Thomé'schen Normalreihen ohne Benutzung der Laplace'schen Transformirten bewiesen und vervollständigt, indem ich an die Untersuchung des Grenzwertes der logarithmischen Ableitung am Anfang der Abhandlung des Herrn POINCARÉ im American Journal anknüpfte. Damals kam es mir vorzugsweise darauf an, Methoden zu gewinnen, welche sich, wie der zweite und dritte Theil⁴ der angeführten

¹ Crelles Journal Bd. 118.

² Vgl. auch KNESER, *Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments* (Crelles Journ. Bd. 116 u. 117).

³ American Journ. Bd. 7, Acta math. Bd. 8.

⁴ Crelles Journ. Bd. 119. Vgl. die Arbeiten von Herrn BENDIXSON.

Arbeit zeigen, auf nicht lineare Differentialgleichungen übertragen lassen. Indem ich jetzt diese Rücksicht bei Seite lasse, beweise ich für eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, deren Coefficienten in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ den Charakter rationaler Functionen haben,¹ die asymptotische Darstellung der Integrale durch die der Differentialgleichung formell genügenden divergenten Reihen, wobei ich wie in der oben erwähnten Arbeit vorläufig noch einzelne nach der Stelle $x = \infty$ führende Wege ausschliesse und die Wurzeln der charakteristischen Gleichung als verschieden voraussetze. Auch jetzt mache ich von der Laplace'schen Transformirten keinen Gebrauch, sondern nur von Poincaré's Untersuchung des Grenzwertes der logarithmischen Ableitung und von der bekannten Erniedrigung der Ordnung einer linearen Differentialgleichung unter Benutzung eines particulären Integrals.

§ 1.

Wir schicken einige Hilfsuntersuchungen voraus.²

In dem Differentialgleichungssystem

$$(A) \quad x^{-k} \frac{dw_\lambda}{dx} = \alpha_\lambda w_\lambda + \sum_{\mu} Q_{\lambda\mu} w_\mu \quad (\lambda, \mu = 1, \dots, m)$$

sei k eine ganze positive Zahl (einschl. 0), die $Q_{\lambda\mu}$ Functionen von x mit der Eigenschaft

$$\lim Q_{\lambda\mu} = 0^3$$

und $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ constante Grössen, deren reelle Theile eine absteigende Reihe bilden und sämmtlich verschieden sein sollen. Wir lassen x als

¹ Die Untersuchungen des Herrn POINCARÉ, welche sich auf die Laplace'sche Transformation gründen, setzen die Coefficienten als rational in der ganzen Ebene voraus, während hier nur das Verhalten in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle in Frage kommt.

² Vgl. POINCARÉ, Am. Journ. Bd. 7.

³ Unter $\lim f(x)$ wird stets der Grenzwert verstanden, welchem die Function $f(x)$ zustrebt, wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht.

reelle positive Grösse ins Unendliche gehen und untersuchen das Verhalten der Quotienten

$$\frac{w_\lambda}{w_1}. \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Es ist

$$x^{-k} \frac{d \log \frac{w_\lambda}{w_1}}{dx} = \alpha_\lambda - \alpha_1 + Q_{\lambda\lambda} - Q_{11} + \sum_{\mu \neq \lambda} Q_{\lambda\mu} \frac{w_\mu}{w_\lambda} - \sum_{\mu > 1} Q_{1\mu} \frac{w_\mu}{w_1} \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

und

$$R(\alpha_\lambda - \alpha_1) < 0.^1 \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Wir haben

$$|Q_{\lambda\mu}| < \delta,$$

wo δ eine für $x = \infty$ verschwindende positive Grösse ist. Wenn man

$$2\delta \left(1 + \frac{m-1}{\varepsilon}\right) = R(\alpha_1 - \alpha_2) - g$$

setzt, wo g eine kleine positive Grösse darstellt, so ist ε für grosse x positiv und

$$\lim \varepsilon = 0.$$

Wenn für einen gewissen Werth von x

$$\left| \frac{w_\mu}{w_\lambda} \right| < \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, \dots, \lambda-1, \lambda+1, \dots, m)$$

$$\left| \frac{w_\mu}{w_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 2, \dots, m)$$

ist, so ist der reelle Theil von

$$x^{-k} \frac{d \log \frac{w_\lambda}{w_1}}{dx}$$

kleiner als

$$R(\alpha_2 - \alpha_1) + 2\delta + 2(m-1)\delta \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

also

$$x^{-k} \frac{d \log \left| \frac{w_\lambda}{w_1} \right|}{dx} < -g.$$

¹ $R(a)$ ist der reelle Theil von a .

Wir verstehen unter M den jeweilig grössten der Quotienten

$$\left| \frac{w_\lambda}{w_1} \right| \quad (\lambda = 2, \dots, n)$$

und zeigen, dass, wenn

$$\varepsilon < M < \frac{1}{\varepsilon}$$

ist,

$$x^{-k} \frac{d \log M}{dx} < -g$$

sein muss. Es sei

$$M = \left| \frac{w_\lambda}{w_1} \right| \geq \left| \frac{w_{\lambda''}}{w_1} \right| \geq \dots$$

Wegen

$$M < \frac{1}{\varepsilon}$$

ist

$$\left| \frac{w_\lambda}{w_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon}; \quad (\lambda = 2, \dots, n)$$

ferner ist

$$\left| \frac{w_1}{w_{\lambda'}} \right| < \frac{1}{\varepsilon}$$

wegen

$$M = \left| \frac{w_{\lambda'}}{w_1} \right| > \varepsilon$$

und

$$\left| \frac{w_\mu}{w_{\lambda'}} \right| < 1 < \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, \dots)$$

wegen

$$\left| w_{\lambda'} \right| \geq \left| w_{\lambda''} \right| \geq \dots;$$

es ist also

$$\left| \frac{w_\mu}{w_{\lambda'}} \right| < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist aber

$$x^{-k} \frac{d \log \left| \frac{w_\lambda}{w_1} \right|}{dx} = x^{-k} \frac{d \log M}{dx} < -g.$$

Wenn für einen gewissen Werth von x M zwischen ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ liegt und bei wachsendem x grösser als ε bleibt, so ist hiernach

$$\lim M = 0;$$

das gleiche ist der Fall, wenn für beliebig grosse Werthe von x $M \leq \varepsilon$ ist. Mit anderen Worten, wenn für einen grossen Werth von x

$$\left| \frac{w_\lambda}{w_1} \right| < \frac{1}{\varepsilon} \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

ist, so ist

$$\lim \frac{w_\lambda}{w_1} = 0. \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Für das Folgende genügt es, zu wissen, dass überhaupt ein Integralsystem w_1, \dots, w_m des Differentialgleichungssystems (A) vorhanden ist, welches die Eigenschaft besitzt, dass sich sämtliche Quotienten

$$\frac{w_2}{w_1}, \dots, \frac{w_m}{w_1}$$

der Grenze Null nähern, wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht.

Die Functionen

$$z_\lambda = \frac{w_\lambda}{w_1} \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

genügen den Differentialgleichungen

$$(B) \quad x^{-k} \frac{dz_\lambda}{dx} + z_\lambda \sum_{\mu} R_{1\mu} z_\mu = \beta_\lambda z_\lambda + \sum_{\mu} R_{\lambda\mu} z_\mu + R_{\lambda 1}, \quad (\lambda, \mu = 2, \dots, m)$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned}\beta_\lambda &= \alpha_\lambda - \alpha_1, \\ R_{1\mu} &= Q_{1\mu}, \quad R_{\lambda 1} = Q_{\lambda 1}, \\ R_{\lambda\mu} &= Q_{\lambda\mu}, \quad (\lambda \neq \mu) \\ R_{\lambda\lambda} &= Q_{\lambda\lambda} - Q_{11}.\end{aligned}$$

Ein System von der Form (B) besitzt ein Integralsystem z_2, \dots, z_m mit der Eigenschaft

$$\lim z_\lambda = 0, \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

wenn

$$R(\beta_\lambda) < 0, \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

$$\lim R_{1\mu} = 0, \quad \lim R_{\lambda 1} = 0, \quad \lim R_{\lambda\mu} = 0$$

ist. Denn ein solches System (B) kann aus einem System von der Form (A) hergeleitet werden.

Wir nehmen jetzt an, die Functionen $R_{\lambda\mu}$ ($\lambda, \mu = 1, \dots, m$) seien von der Form

$$\begin{aligned}R_{\lambda\mu} &= \frac{b_{\lambda\mu}^{(1)}}{x} + \dots + \frac{b_{\lambda\mu}^{(n)}}{x^n} + \frac{\beta_{\lambda\mu}^{(n)}}{x^n}, \\ \lim \beta_{\lambda\mu}^{(n)} &= 0,\end{aligned}$$

wo n eine feste ganze positive Zahl darstellt. Ersetzt man jede Function $\beta_{\lambda\mu}^{(n)}$ durch Null, so wird das System (B) durch ein System von Potenzreihen

$$z_\lambda = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \frac{c_{\lambda 2}}{x^2} + \dots \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

formell befriedigt. Wir zeigen, dass das System (B) ein Integralsystem von der Form

$$\begin{aligned}z_\lambda &= \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{c_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\zeta_{\lambda n}}{x^n} = z_{\lambda n} + \frac{\zeta_{\lambda n}}{x^n}, \\ \lim \zeta_{\lambda n} &= 0\end{aligned}$$

besitzt. Die Functionen

$$\zeta_\lambda = \zeta_{\lambda n} \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

genügen nämlich den Differentialgleichungen

$$x^{-k} \frac{d\zeta_\lambda}{dx} + \zeta_\lambda \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} \zeta_\mu = \beta_\lambda \zeta_\lambda + \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} \zeta_\mu + S_{\lambda 1}, \quad (\lambda, \mu = 2, \dots, m)$$

wenn man setzt:

$$S_{1\mu} = \frac{R_{1\mu}}{x^n},$$

$$S_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} - R_{1\mu} z_{\lambda\mu} \quad (\lambda \neq \mu),$$

$$S_{\lambda\lambda} = R_{\lambda\lambda} - R_{1\lambda} z_{\lambda n} - (R_{12} z_{2n} + \dots + R_{1m} z_{mn}) + \frac{n}{x^{k+1}},$$

$$S_{\lambda 1} = \varphi_{\lambda 1},$$

wo $\varphi_{\lambda 1}$ eine Function von x mit

$$\lim \varphi_{\lambda 1} = 0$$

ist. Ein System von dieser Form besitzt aber, wie vorhin gezeigt wurde, ein Integralsystem ζ_2, \dots, ζ_m mit der Eigenschaft

$$\lim \zeta_\lambda = 0. \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

§ 2.

Den eigentlichen Gegenstand unserer Untersuchung bildet die Differentialgleichung

$$(C) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + x^k P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + x^{2k} P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + x^{(m-1)k} P_{m-1} \frac{dy}{dx} + x^{mk} P_m y = 0.$$

Die Coefficienten

$$P_\lambda = a_\lambda + \frac{a_{\lambda 1}}{x} + \frac{a_{\lambda 2}}{x^2} + \dots \quad (\lambda = 1, \dots, m)$$

sind entweder Potenzreihen von $\frac{1}{x}$, welche in der Umgebung von $x = \infty$ convergent sind, oder Functionen, welche durch divergente Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ asymptotisch dargestellt werden, wenn x als reelle positive Grösse

ins Unendliche geht; in beiden Fällen ist, welche ganze positive Zahl auch für n gesetzt werden möge,

$$P_\lambda = a_\lambda + \frac{a_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{a_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\bar{w}_{\lambda n}}{x^n},$$

$$\lim \bar{w}_{\lambda n} = 0.$$

Die charakteristische Gleichung von (C)

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \dots + a_{m-1} \alpha + a_m = 0$$

habe n verschiedene Wurzeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m,$$

deren reelle Theile verschieden und absteigend geordnet seien.

Setzt man ¹

$$y = w_1 + \dots + w_m,$$

$$x^{-\nu_k} \frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \alpha_1^\nu w_1 + \dots + \alpha_m^\nu w_m, \quad (\nu = 1, \dots, m-1)$$

so genügen die Functionen w_1, \dots, w_m einem Differentialgleichungssystem von der Form (A), woraus durch die Substitution

$$z_\lambda = \frac{w_\lambda}{w_1} \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

ein System von der Form (B) hervorgeht. Es ist

$$R(\beta_\lambda) = R(\alpha_\lambda - \alpha_1) < 0 \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

und entweder

$$R_{\lambda\mu} = \frac{b_{\lambda\mu}^{(1)}}{x} + \frac{b_{\lambda\mu}^{(2)}}{x^2} + \dots \quad (\lambda, \mu = 1, \dots, m)$$

eine convergente Potenzreihe oder

$$R_{\lambda\mu} = \frac{b_{\lambda\mu}^{(1)}}{x} + \dots + \frac{b_{\lambda\mu}^{(n)}}{x^n} + \frac{\beta_{\lambda\mu}^{(n)}}{x^n},$$

$$\lim \beta_{\lambda\mu}^{(n)} = 0$$

¹ Vgl. POINCARÉ, Am. Journ. Bd. 7.

Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen. 297

für jedes n . Setzt man für jede Function $R_{\lambda n}$ die convergente oder asymptotische unendliche Reihe, so wird das System (B) durch das Reihensystem

$$z_{\lambda} = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \frac{c_{\lambda 2}}{x^2} + \dots \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

formell befriedigt. Nimmt man jetzt für n eine feste Zahl, so besitzt (B), wie in § 1 gezeigt wurde, eine Lösung

$$z_{\lambda} = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{c_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\zeta_{\lambda n}}{x^n},$$

$$\lim \zeta_{\lambda n} = 0.$$

Ob diese Lösung auch für jede Zahl $n' > n$ auf die Form

$$z_{\lambda} = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{c_{\lambda n'}}{x^{n'}} + \frac{\zeta_{\lambda n'}}{x^{n'}}, \quad \lim \zeta_{\lambda n'} = 0$$

gebracht werden kann, d. h. ob die Function z_{λ} durch die Reihe

$$\frac{c_{\lambda 1}}{x} + \frac{c_{\lambda 2}}{x^2} + \dots$$

asymptotisch dargestellt wird, bleibt noch dahin gestellt.

Aus den formalen Reihenentwicklungen

$$z_{\lambda} = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \frac{c_{\lambda 2}}{x^2} + \dots \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

ergibt sich der Gleichung

$$x^{-k} \frac{d \log y}{dx} = \frac{a_1 w_1 + \dots + a_m w_m}{w_1 + \dots + w_m}$$

$$= \frac{a_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m}{1 + z_2 + \dots + z_m}$$

zufolge die formale Entwicklung

$$x^{-k} \frac{d \log y}{dx} = \alpha_1 + \frac{\alpha_{11}}{x} + \frac{\alpha_{12}}{x^2} + \frac{\alpha_{13}}{x^3} + \dots$$

oder, wenn man

$$\alpha_{1, k+1} = \rho_1,$$

$$e^{-\frac{\alpha_{1, k+2}}{x} - \frac{\alpha_{1, k+3}}{2x^2} - \dots} = C_1 + \frac{C_{11}}{x} + \frac{C_{12}}{x^2} + \dots$$

setzt, die der Differentialgleichung (C) formal genügende Normalreihe

$$y = S_1 = e^{\frac{a_1 x^{k+1}}{k+1} + \frac{a_{11} x^k}{k} + \dots + a_{1k} x} x^{\rho_1} \left(C_1 + \frac{C_{11}}{x} + \frac{C_{12}}{x^2} + \dots \right).$$

Aus der Gleichung

$$z_\lambda = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{c_{\lambda, n+k+1}}{x^{n+k+1}} + \frac{\zeta_{\lambda, n+k+1}}{x^{n+k+1}},^1$$

$$\lim \zeta_{\lambda, n+k+1} = 0$$

folgt

$$x^{-k} \frac{d \log y_1}{dx} = \frac{a_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m}{1 + z_2 + \dots + z_m} = \alpha_1 + \frac{a_{11}}{x} + \dots + \frac{a_{1, n+k+1}}{x^{n+k+1}} + \frac{\eta_{1n}}{x^{n+k+1}},$$

$$\lim \eta_{1n} = 0$$

oder

$$y_1 = e^{\frac{a_1 x^{k+1}}{k+1} + \frac{a_{11} x^k}{k} + \dots + a_{1k} x} x^{\rho_1} \left(C_1 + \frac{C_{11}}{x} + \dots + \frac{C_{1n}}{x^n} + \frac{\gamma_{1n}}{x^n} \right),$$

$$\lim \gamma_{1n} = 0.$$

Da n eine zwar von vornherein willkürlich gewählte, aber dann festgehaltene Zahl ist, so ist noch nicht bewiesen, dass die Function y_1 durch die Reihe S_1 asymptotisch dargestellt wird.

Aus der Gleichung

$$x^{-\nu k} \frac{d^\nu y_1}{dx^\nu} = \frac{a_1^\nu + a_2^\nu z_2 + \dots + a_m^\nu z_m}{1 + z_2 + \dots + z_m}$$

folgen noch Gleichungen von der Form

$$x^{-\nu k} \frac{d^\nu y_1}{dx^\nu} = \alpha_1^\nu + \frac{a_{11}^{(\nu)}}{x} + \dots + \frac{a_{1, n+k+1}^{(\nu)}}{x^{n+k+1}} + \frac{\eta_{1n}^{(\nu)}}{x^{n+k+1}},$$

$$\lim \eta_{1n}^{(\nu)} = 0$$

¹ Unter z_2, \dots, z_m wird das oben eingeführte Integralsystem von (B) verstanden; es ist nur die Bezeichnung insofern geändert, als die beliebige, aber feste Zahl n jetzt mit $n + k + 1$ bezeichnet ist.

Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen. 299
und insbesondere

$$\lim x^{-\nu k} \frac{d^\nu y_1}{dx^\nu} = \alpha_1^\nu. \quad (\nu = 1, \dots, m-1)$$

§ 3.

Die am Anfang von § 2 beschriebene Differentialgleichung (C) wird formell befriedigt durch m Normalreihen

$$S_\lambda = e^{\frac{a_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \frac{a_{\lambda 1} x^k}{k} + \dots + a_{\lambda k} x} x^{\rho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \frac{C_{\lambda 2}}{x^2} + \dots \right). \quad (\lambda = 1, \dots, m)$$

Wir bewiesen den folgenden Satz:¹

Die Differentialgleichung (C) besitzt ein Fundamentalsystem

$$y_1, \dots, y_m$$

von der Eigenschaft, dass die Function y_λ durch die Normalreihe S_λ asymptotisch dargestellt wird, wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht; d. h. es ist, wenn n irgend eine ganze positive Zahl ist,

$$y_\lambda = e^{\frac{a_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n} \right),$$

$$\lim \gamma_{\lambda n} = 0.$$

Für eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + x^k P y = 0,$$

$$P = a + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n+k+1}}{x^{n+k+1}} + \frac{\bar{\omega}_{n+k+1}}{x^{n+k+1}}, \quad \lim \bar{\omega}_{n+k+1} = 0$$

ist dieser Satz gültig; denn die Integration ergibt

$$y = e^{-\frac{ax^{k+1}}{k+1} - \dots} x^{a_{k+1}} \left(C + \frac{C_1}{x} + \dots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n} \right),$$

$$\lim \gamma_n = 0.$$

¹ Vgl. POINCARÉ, Acta math. Bd. 8.

Wir nehmen an, der ausgesprochene Satz sei für eine Differentialgleichung $(m - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung richtig, und zeigen, dass er dann auch für eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung gilt.

Wir beginnen mit dem Beweis des Satzes, den wir für eine Differentialgleichung $(m - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung als gültig voraussetzen:

Ist in der Differentialgleichung (C)

$$P_\lambda = a_\lambda + \frac{a_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{a_{\lambda, n+k+1}}{x^{n+k+1}} + \frac{\bar{a}_{\lambda, n+k+1}}{x^{n+k+1}},^1$$

$$\lim \bar{a}_{\lambda, n+k+1} = 0$$

so besitzt dieselbe ein Fundamentalsystem

$$y_\lambda = e^{\frac{a_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n} \right),$$

$$\lim \gamma_{\lambda n} = 0.$$

Wir verstehen unter y_1 das in § 2 nachgewiesene Integral von (C) und setzen

$$y = y_1 \int z dx,$$

Dann genügt z der linearen Differentialgleichung $(m - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(D_1) \quad \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + x^k Q_1 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \dots + x^{(m-1)k} Q_{m-1} z = 0;$$

dabei ist, wenn man

$$y_1^{(\nu)} = \frac{d^\nu y_1}{dx^\nu}$$

setzt,

$$Q_\mu = (m)_\mu x^{-\mu k} \frac{y_1^{(\mu)}}{y_1} + (m-1)_{\mu-1} P_1 x^{-(\mu-1)k} \frac{y_1^{(\mu-1)}}{y_1} + \dots + (1)_1 P_{\mu-1} x^{-k} \frac{y_1'}{y_1} + P_\mu$$

$$= b_\mu + \frac{b_{\mu 1}}{x} + \dots + \frac{b_{\mu, n+k+1}}{x^{n+k+1}} + \frac{\omega_{\mu, n+k+1}}{x^{n+k+1}},$$

$$\lim \omega_{\mu, n+k+1} = 0.$$

Insbesondere ist

$$b_\mu = (m)_\mu \alpha_1^\mu + (m-1)_{\mu-1} a_1 \alpha_1^{\mu-1} + \dots + (1)_1 a_{\mu-1} \alpha_1 + a_\mu.$$

¹ Dabei ist n als feste Zahl gedacht.

Setzt man

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \dots + a_m, \\ g(\beta) &= \beta^{m-1} + b_1 \beta^{m-1} + \dots + b_{m-1}, \end{aligned}$$

so ist

$$f(\alpha_1 + \beta) = \beta g(\beta).$$

Da die charakteristische Gleichung $f(\alpha) = 0$ von (C) die Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ besitzt, so sind

$$\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \quad \beta_m = \alpha_m - \alpha_1$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $g(\beta) = 0$ von (D₁). Es ist

$$0 > R(\beta_2) > \dots > R(\beta_m).$$

Die Differentialgleichung (D₁) hat nach dem für die Ordnung $m - 1$ vorausgesetzten Satze die $m - 1$ Integrale

$$\begin{aligned} z_\lambda &= e^{\frac{\beta_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \frac{\beta_{\lambda 1} x^k}{k} + \dots + \beta_{\lambda k} x} x^{\sigma_k} \left(D_\lambda + \frac{D_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{D_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\delta_{\lambda n}}{x^n} \right), \\ \lim \delta_{\lambda n} &= 0. \end{aligned} \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Wir untersuchen die folgenden $m - 1$ Integrale von (C):

$$y_\lambda = y_1 \int_{\infty}^x z_\lambda dx. \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Der Index λ wird vorübergehend weggelassen.

Durch Integration der Gleichung

$$\begin{aligned} & d \left[e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \frac{\beta_1 x^k}{k} + \dots + \beta_k x} x^{\sigma - k - \nu} \right] \\ &= \left(\beta + \frac{\beta_1}{x} + \dots + \frac{\beta_k}{x^k} + \frac{\sigma - k - \nu}{x^{k+1}} \right) e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma - \nu} dx \end{aligned}$$

zwischen den Grenzen ∞ und x erhält man, wenn man

$$\eta_\nu = \int_{\infty}^x e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma - \nu} dx$$

setzt, die Recursionsformel

$$\beta\eta_\nu + \beta_1\eta_{\nu+1} + \dots + \beta_k\eta_{\nu+k} + (\sigma - k - \nu)\eta_{\nu+k+1} = e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-k-\nu}.$$

Wenn man mittelst dieser Formel $\eta, \eta_1, \dots, \eta_n$ durch $\eta_{n+1}, \dots, \eta_{n+k+1}$ ausdrückt, hat man

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^x z dx &= D\eta + D_1\eta_1 + \dots + D_n\eta_n + \int_{\infty}^x e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-n} \partial_n dx \\ &= e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-k} \left(E + \frac{E_1}{x} + \dots + \frac{E_n}{x^n} \right) + h_1\eta_{n+1} + \dots + h_{k+1}\eta_{n+k+1} \\ &\quad + \int_{\infty}^x e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-n} \partial_n dx. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\tau_n = x\partial_n + h_1 + \frac{h_2}{x} + \dots + \frac{h_{k+1}}{x^k},$$

so ist $\lim \tau_n$ endlich, und die letzten Glieder des Ausdrucks für $\int_{\infty}^x z dx$ schreiben sich

$$\int_{\infty}^x e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-n} \tau_n dx.$$

Unter Einführung der Bezeichnung

$$\varepsilon_n = e^{-\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{-\sigma+k+n} \int_{\infty}^x e^{\frac{\beta v^{k+1}}{k+1} + \dots} v^{\sigma-n-1} \tau_n(v) dv$$

hat man

$$\int_{\infty}^x z dz = e^{\frac{\beta x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma-k} \left(E + \frac{E_1}{x} + \dots + \frac{E_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n} \right).$$

Um zu beweisen, dass

$$\lim \varepsilon_n = 0$$

ist, setzt man

$$v^{k+1} = x^{k+1} + w$$

Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen. 303
oder

$$v = x \left(1 + \frac{w}{x^{k+1}} \right)^{\frac{1}{k+1}},$$

so dass ε_n übergeht in

$$\begin{aligned} \varepsilon_n = & - \frac{1}{(k+1)x} \int_0^\infty e^{\frac{\beta w}{k+1} + \sum_{\nu=1}^k \frac{\beta_{k+1+\nu}}{\nu}} \left[\left(1 + \frac{w}{x^{k+1}} \right)^{\frac{\nu}{k+1}} - 1 \right] \\ & \times \left(1 + \frac{w}{x^{k+1}} \right)^{\frac{\sigma-n-k-1}{k+1}} \tau_n(v) dw. \end{aligned}$$

Für $t \geq 0$ ist

$$\frac{|\beta_{k+1-\nu}|}{\nu} \frac{\left(1 + t^{\frac{k+1}{\nu}} \right)^{\frac{\nu}{k+1}} - 1}{t} \quad (\nu = 1, \dots, k)$$

positiv und kleiner als M_ν ; setzt man

$$t = \frac{w^{\frac{\nu}{k+1}}}{x^\nu},$$

so hat man für $w \geq 0$, $x > 0$

$$\frac{|\beta_{k+1-\nu}|}{\nu} x^\nu \left[\left(1 + \frac{w}{x^{k+1}} \right)^{\frac{\nu}{k+1}} - 1 \right] < M_\nu w^{\frac{\nu}{k+1}}.$$

Ferner ist für $w \geq 0$, $x > 1$

$$\frac{|\sigma - n - k - 1|}{k+1} \log \left(1 + \frac{w}{x^{k+1}} \right) < M \log(1+w),$$

wo M eine positive Grösse ist. Wenn man x so gross nimmt, dass $|\tau_n(x)|$ und demnach auch $|\tau_n(v)|$ unterhalb der endlichen Grösse g liegt, so ist

$$|\varepsilon_n| < \frac{g}{(k+1)x} \int_0^\infty e^{\frac{R(\beta)w}{k+1} + \sum_{\nu=1}^k M_\nu w^{\frac{\nu}{k+1}} + M \log(1+w)} dw.$$

Das letzte Integral ist endlich und daher

$$\lim \varepsilon_n = 0.$$

Wenn man den Index λ wieder einführt, hat man

$$\int_{\infty}^x z_{\lambda} dx = e^{\frac{\beta_{\lambda} x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma_{\lambda}-k} \left(E_{\lambda} + \frac{E_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{E_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\varepsilon_{\lambda n}}{x^n} \right),$$

$$\lim \varepsilon_{\lambda n} = 0,$$

also

$$y_{\lambda} = e^{\frac{\alpha_{\lambda} x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_{\lambda}} \left(C_{\lambda} + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n} \right)$$

$$\times e^{\frac{\beta_{\lambda} x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\sigma_{\lambda}} \left(E_{\lambda} + \frac{E_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{E_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\varepsilon_{\lambda n}}{x^n} \right)$$

oder für $\lambda = 2, \dots, m$

$$y_{\lambda} = e^{\frac{\alpha_{\lambda} x^{k+1}}{k+1} + \frac{\alpha_{\lambda 1} x^k}{k} + \dots + \alpha_{\lambda k} x} x^{\rho_{\lambda}} \left(C_{\lambda} + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n} \right),$$

$$\lim \gamma_{\lambda n} = 0.$$

Ferner hat man

$$x^{-k} \frac{d \log y_{\lambda}}{dx} = x^{-k} \frac{d \log y_1}{dx} + \frac{z_{\lambda}}{x^k \int_{\infty}^x z_{\lambda} dx},$$

woraus unter Einsetzung der bekannten Entwicklungen für die Grössen auf der rechten Seite hervorgeht:

$$x^{-k} \frac{d \log y_{\lambda}}{dx} = \alpha_{\lambda} + \frac{\alpha_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{\alpha_{\lambda, n+k}}{x^{n+k}} + \frac{\eta_{\lambda n}}{x^{n+k}},$$

$$\lim \eta_{\lambda n} = 0.$$

§ 4.

Wir haben gesehen, dass die Differentialgleichung (C) m Integrale

$$y_1, \dots, y_m$$

mit der Eigenschaft

$$\lim x^{-k} \frac{d \log y_{\lambda}}{dx} = \alpha_{\lambda} \quad (\lambda = 1, \dots, m)$$

Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen. 305
oder

$$y_\lambda = e^{(a_\lambda + \delta_\lambda) \frac{x^{k+1}}{k+1}}, \quad \lim \delta_\lambda = 0 \quad (\lambda=1, \dots, m)$$

besitzt. Aus dieser Form geht hervor, dass eine Relation

$$\sum_\lambda c_\lambda y_\lambda = 0$$

mit constanten Coefficienten nicht bestehen kann, dass also y_1, \dots, y_m ein Fundamentalsystem bilden.

Ist

$$\bar{y}_m = c_1 y_1 + \dots + c_m y_m$$

irgend ein Integral mit der Eigenschaft

$$\lim x^{-k} \frac{d \log \bar{y}_m}{dx} = \alpha_m,$$

so muss $c_1 = 0, \dots, c_{m-1} = 0$ sein; es gibt also nur ein einziges Integral y_m , für welches

$$\lim x^{-k} \frac{d \log y_m}{dx} = \alpha_m$$

ist, wenn Integrale, welche sich bloss um einen constanten Factor unterscheiden, als identisch angesehen werden.

Das Integral y_m von (C) ist folgendermassen entstanden. Nach Festlegung der ganzen positiven Zahl n ist $\zeta_\lambda = \zeta_{\lambda, n+k+1}$ ($\lambda = 2, \dots, m$) irgend ein Integralsystem des in § 1 aufgestellten, aus (C) auf die in § 2 angegebene Weise hergeleiteten Differentialgleichungssystems mit der Eigenschaft

$$\lim \zeta_\lambda = 0. \quad (\lambda = 2, \dots, m)$$

Die Gleichung

$$y_1 = e^{\int \frac{a_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m}{1 + x_2 + \dots + x_m} dx},$$

wo

$$z_\lambda = \frac{c_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{c_{\lambda, n+k+1}}{x^{n+k+1}} + \frac{\zeta_{\lambda, n+k+1}}{x^{n+k+1}}$$

ist, stellt ein Integral von (C) dar. Wenn unter z_m das einzige Integral von (D₁) verstanden wird, für welches

$$\lim x^{-k} \frac{d \log z_m}{dx} = \beta_m = \alpha_m - \alpha_1$$

ist, so ist

$$y_m = y_1 \int_{\infty}^x z_m dx.$$

Setzt man an Stelle der ursprünglich angenommenen Zahl n irgend eine ganze positive Zahl $n' > n$, während im übrigen das bei der Bildung von y_m benutzte Verfahren beibehalten wird, so stösst man auf die Function

$$y'_m = e^{\frac{\alpha_m x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_m} \left(C_m + \frac{C_{m1}}{x} + \dots + \frac{C_{mn'}}{x^{n'}} + \frac{\gamma_{mn'}}{x^{n'}} \right),$$

$$\lim \gamma_{mn'} = 0,$$

welche, weil

$$\lim x^{-k} \frac{d \log y'_m}{dx} = \alpha_m$$

ist, mit y_m identisch sein muss.

Es ist als für *jeden* Werth von n

$$y_m = e^{\frac{\alpha_m x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_m} \left(C_m + \frac{C_{m1}}{x} + \dots + \frac{C_{mn}}{x^n} + \frac{\gamma_{mn}}{x^n} \right),$$

$$\lim \gamma_{mn} = 0.$$

§ 5.

Wir wissen jetzt, dass das Integral y_m durch die Normalreihe

$$S_m = e^{\frac{\alpha_m x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_m} \left(C_m + \frac{C_{m1}}{x} + \frac{C_{m2}}{x^2} + \dots \right)$$

asymptotisch dargestellt wird.

Es ist noch zu zeigen, dass für jeden Werth $\lambda = 1, \dots, m$ das Integral y_λ durch die Normalreihe S_λ asymptotisch dargestellt wird, d. h. dass für *jeden* Werth von n

$$y_\lambda = e^{\frac{\alpha_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n} \right), \quad \lim \gamma_{\lambda n} = 0$$

ist, nicht nur für die in § 2 eingeführte feste Zahl n . Wir verstehen unter n' eine beliebige ganze positive Zahl, welche die ursprünglich eingeführte Zahl n übertrifft. Wir bilden, von dieser Zahl n' ausgehend, ein Integral y'_λ ebenso, wie y_λ mit der Zahl n gebildet wurde. Dann ist

$$y'_\lambda = e^{\frac{\alpha_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C'_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n'}}{x^{n'}} + \frac{\gamma'_{\lambda n'}}{x^{n'}} \right),$$

$$\lim r_{\lambda n'} = 0.$$

Die Integrale y'_1, \dots, y'_m bilden ein Fundamentalsystem; es ist

$$y_\lambda = y'_\lambda + c_{\lambda+1} y'_{\lambda+1} + \dots + c_m y'_m.$$

Wenn man y'_λ durch den obigen Ausdruck ersetzt und

$$y'_\mu = e^{\frac{\alpha_\mu x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\mu} (C_\mu + \gamma'_\mu), \quad \lim \gamma'_\mu = 0 \quad (\mu = \lambda+1, \dots, m)$$

setzt, so hat man

$$y_\lambda = e^{\frac{\alpha_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\gamma'_{\lambda n}}{x^n} \right) \\ + \sum_{\mu=\lambda+1}^m e^{\frac{(\alpha_\mu - \alpha_\lambda) x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\mu - \rho_\lambda} c_\mu (C_\mu + \gamma'_\mu).$$

Setzt man

$$r_{\lambda n'} = \gamma'_{\lambda n'} + \sum_{\mu=\lambda+1}^m e^{\frac{(\alpha_\mu - \alpha_\lambda) x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\mu - \rho_\lambda + n} c_\mu (C_\mu + \gamma'_\mu),$$

so ist, da der reelle Theil von $\alpha_\mu - \alpha_\lambda$ negativ ist,

$$\lim r_{\lambda n'} = 0$$

und man hat

$$y_\lambda = e^{\frac{\alpha_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda n'}}{x^{n'}} + \frac{r_{\lambda n'}}{x^{n'}} \right)$$

für jede Zahl n' , w. z. b. w.

Ist

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_m y_m$$

irgend ein Integral von (C) und

$$c_1 = \dots = c_{\lambda-1} = 0, \quad c_\lambda \neq 0,$$

so hat man für einen beliebigen Werth von n

$$y = c_\lambda e^{\frac{a_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda_1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda_n}}{x^n} + \frac{\bar{r}_{\lambda n}}{x^n} \right) + \sum_{\mu=\lambda+1}^m c_\mu e^{\frac{(a_\mu + \delta_\mu)x^{k+1}}{k+1}},$$

wo

$$\lim \bar{r}_{\lambda n} = 0, \quad \lim \delta_\mu = 0$$

ist. Setzt man

$$\bar{r}_{\lambda n} = r_{\lambda n} + \sum_{\mu=\lambda+1}^m \frac{c_\mu}{c_\lambda} e^{(a_\mu - a_\lambda + \delta_\mu) \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{a_{\lambda_1} x^k}{k} - \dots} x^{-\rho_\lambda + n},$$

so ist

$$y = c_\lambda e^{\frac{a_\lambda x^{k+1}}{k+1} + \dots} x^{\rho_\lambda} \left(C_\lambda + \frac{C_{\lambda_1}}{x} + \dots + \frac{C_{\lambda_n}}{x^n} + \frac{\bar{r}_{\lambda n}}{x^n} \right),$$

$$\lim \bar{r}_{\lambda n} = 0;$$

d. h. das Integral

$$y = c_\lambda y_\lambda + \dots + c_m y_m$$

wird, wenn c_λ von Null verschieden ist, durch die Reihe $c_\lambda S_\lambda$ asymptotisch dargestellt.

Wir haben uns bisher auf die Betrachtung reeller positiver Werthe von x beschränkt. Geht x mit dem Argument ω ins Unendliche, so wird die Differentialgleichung (C) durch die Substitution $x = \rho e^{i\omega}$ in eine Differentialgleichung mit der unabhängigen Veränderlichen ρ übergeführt, deren charakteristische Gleichung die Wurzeln

$$e^{i(k+1)\omega} \alpha_1, \dots, e^{i(k+1)\omega} \alpha_m$$

besitzt. Durch die bisherige Voraussetzung, dass die reellen Theile der Wurzeln der charakteristischen Gleichung verschieden sind, sind diejenigen Argumente vorläufig ausgeschlossen, für welche zwei der Grössen $e^{i(k+1)\omega} \alpha_\lambda$ gleiche reelle Theile erhalten.