Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst.

Von Felix Klein in München.

Die nachstehenden Untersuchungen sind aus dem Streben hervorgegangen, die geometrische Interpretation von $x + iy$ auf der Kugelfläche für die Theorie der binären Formen zu verwerthen. In dieser Absicht machte ich bereits bei einer früheren Gelegenheit*) auf die enge Beziehung aufmerksam, welche zwischen der gemeinten Interpretation und der projectivischen Maassgeometrie besteht, welche man auf die Kugel (wie auf jede Fläche zweiten Grades) gründen kann. Einer linearen Transformation von $x + iy$ entspricht geradezu, im Sinne dieser Maassgeometrie, eine reelle Bewegung des Raumes, wie auch umgekehrt, so dass jede Construction auf der Kugelfläche, welche für die Invariantentheorie von $x + iy$ Bedeutung hat, sofort maassgeometrische Verwerthung findet, und umgekehrt jedes maassgeometrische Theorem einen Beitrag für die Invariantentheorie liefert. Ich habe bereits damals angegeben, welch anschauliche Interpretation man auf Grund solcher Betrachtungen für das Formensystem einer binären cubischen und biquadratischen Form entwickeln kann; später**) veröffentlichte ich eine auf diesen Principien beruhende Uebertragung des Pascal'schen Satzes auf den Raum. Es hat dann Hr. Wedekind diese Untersuchungen nach verschiedenen Richtungen in seiner Inauguraldissertation***) weiter geführt (vergl. den weiterhin folgenden Auszug). Es sei auf diese Arbeit namentlich auch mit Rücksicht auf den erforderlichen Literaturnachweis, der hier zu weit führen würde (Untersuchungen von Möbius, Beltrami u. A.), verwiesen.

Die specielle Aufgabe, welche ich weiterhin in Angriff nahm, knüpfte an den Umstand an, dass bei gewöhnlicher Maassbestimmung

*) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872. Programmschrift.

**) Sitzungsberichte der Erlanger phys.-med. Gesellschaft. Nov. 1873.

***) Erlangen 1874.

ein lange erledigtes Problem ist: *alle endlichen Gruppen von Bewegungen zu construiren.* Es schien möglich, für allgemeine projectivische Maassbestimmung dasselbe Problem zu lösen und damit also, was für algebraische Untersuchungen von Wichtigkeit sein muss, *alle endlichen Gruppen linearer Transformationen eines complexen Argumentes* $x + iy$ *zu gewinnen.* Es hängt diese Bestimmung auf das Genaueste mit der Theorie der regulären Körper zusammen, wie noch weiter unten gezeigt werden soll. — Auf diese Weise gelang es, alle binären Formen zu construiren, welche lineare Transformationen in sich besitzen. Unter ihnen ist es eine vom zwölften Grade, vorgestellt durch die Ecken eines regulären *Ikosaëder's,* die im Folgenden besonders untersucht werden soll. Ich entwickele an ihr, als einem Beispiel, *wie man die ganze Theorie dieser Formen,* von der Kenntniss der linearen Transformationen ausgehend, welche dieselben ungeändert lassen, *ohne alle complicirte Rechnung, nur mit den Begriffen der Invariantentheorie operirend, ableiten kann.* Die dabei verwandte Schlussweise hat grosse Aehnlichkeit mit derjenigen, welche Lie und ich in einer gemeinsamen Arbeit (Math. Annalen Bd. IV, p. 50, Geometrisches über vertauschbare lineare Transformationen) entwickelt haben; dass dieselbe hier an einem neuen Gegenstande zur Verwerthung kommt, scheint mir an den folgenden Untersuchungen das Wichtigste zu sein.

Bei der nahen Beziehung, welche diese Dinge zu functionentheoretischen Fragen haben, konnte man von vorneherein erwarten, dass dieselben schon in letzterer Richtung in Angriff genommen seien. Inzwischen habe ich erst ziemlich spät erfahren*), dass in der That dieselben Formen, freilich unter anderen Gesichtspunkten, von Schwarz betrachtet worden sind (Borch. Journ. Bd. 75: Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt). Ich habe gesucht, im Folgenden die mannigfachen Beziehungspunkte zu der Schwarz'schen Arbeit möglichst hervortreten zu lassen. — Auch sei bereits hier einer merkwürdigen anderen Coincidenz gedacht. Die Formeln, welche weiterhin für die Auflösung der Ikosaëdergleichung aufgestellt werden, stimmen, sofern man von der Bedeutung der auftretenden Grössen absieht, genau überein mit solchen, die von Kronecker, Hermite und bes. Brioschi bei Untersuchungen über die allgemeine Gleichung fünften Grades gegeben worden sind.

*) Vergl. Sitzungsberichte der Erlanger phys.-med. Gesellschaft vom Juli und December 1874.

§ 1.

Ueber die Interpretation von $x+iy$ auf der Kugel.

Wenn man auf eine Kugelfläche eine projectivische Maassbestimmung gründet, so hat man unter einer reellen „Bewegung" des Raumes eine Collineation zu verstehen, bei der zwei reelle Gerade fest bleiben, die in Bezug auf die Kugel conjugirte Polaren sind, und von denen daher die eine, welche fortan als *Axe* der Bewegung bezeichnet sein soll, die Kugel in reellen Punkten schneidet, während die zweite ganz ausserhalb verläuft (vergl. z. B. die Arbeit von Lindemann, diese Annalen Bd. VII, p. 56 ff.). Die Bewegung besteht, wenn wir, wie weiterhin fast immer geschehen soll, unsere Aufmerksamkeit auf das Innere der Kugelfläche beschränken, aus einer *schraubenartigen Drehung* um diese Axe, bei der jeder Punkt auf einer gewundenen Linie (Loxodrome) fortschreitet, die auf einer Fläche zweiten Grades verläuft, welche die fundamentale Kugel in den beiden Durchschnittspunkten mit der Axe berührt (diese Punkte sind für die F_2 Umbilici). Diese Loxodromen können insbesondere in Kreise, die schraubenartige Drehung in eine blosse *Rotation* übergehen, die Ebenen der Kreise werden dann die zur Axe conjugirte Gerade enthalten.

Der einzige Specialfall, der hinsichtlich der Lage der Axe eintreten kann, ist der, dass sie, statt die Kugel in getrennten Punkten zu schneiden, dieselbe berührt. Die conjugirte Polare berührt dann die Kugel in demselben Punkte und ist gegen die Axe (in gewöhnlichem Sinne) senkrecht; die Punkte des Raumes rücken während der Bewegung auf Kreisen fort, deren Ebenen durch diese conjugirte Polare hindurchgehen.

Fasst man jetzt die Kugel als Trägerin des Werthgebietes $x+iy$ auf, so entspricht der allgemeinen Bewegung die allgemeine lineare Transformation von $x+iy$, bei der zwei verschiedene Werthe von $x+iy$ ungeändert bleiben; der speciellen Bewegung entspricht der besondere Fall linearer Transformation, bei welchem die beiden festbleibenden Elemente coincidiren. Legt man die beiden im ersten Falle festbleibenden Elemente einer binären Coordinatenbestimmung $z=\frac{x_1}{x_2}$ zu Grunde, so wird die zugehörige Transformation durch $z'=cz$ dargestellt sein, während im zweiten Falle die analytische Formel für die Transformation $z'=z+C$ ist, sofern man $z=\infty$ mit dem doppeltzählenden festbleibenden Elemente zusammenfallen lässt (vergl. diese Annalen Bd. IV, p. 582).

Handelt es sich jetzt darum, *alle Gruppen anzugeben, welche aus einer endlichen Anzahl von linearen Transformationen bestehen,* so werden die dabei in Betracht kommenden Transformationen jedenfalls solche sein müssen, die sich nach einer endlichen Anzahl von Malen reproduciren. Sie müssen daher, geometrisch zu reden, *Rotationen* sein; algebraisch ausgedrückt: sie müssen sich in der Gestalt $z' = \varepsilon z$ darstellen lassen, wo ε eine Einheitswurzel ist. Ueberdies darf die Grösse der Rotation nur einem rationalen Theile von 2π gleich, ε also nur eine *rationale* Einheitswurzel sein.

Eine *endliche* Gruppe wird von jeder rationalen Rotation durch Wiederholung erzeugt. Aber es giebt auch anderweitige, aus verschiedenartigen Rotationen zusammengesetzte Gruppen. Ein Beispiel geben diejenigen, welche man aus den Rotationen um einen Punkt des Kugel-Inneren bilden kann. Diese Gruppen darf man als bekannt ansehen. Denn die Rotationen um einen solchen Punkt haben bei projectivischer Maassbestimmung denselben Charakter wie in der elementaren Geometrie*), und die Gruppen, welche man, unter Zugrundelegung der letzteren, aus Rotationen um einen Punkt zusammensetzen kann, sind bekannt. Es umfassen dieselben einmal selbstverständlich diejenigen, welche durch Wiederholung derselben Rotation entstehen. Man kann sie noch erweitern, indem man Rotationen hinzunimmt, welche die bei der Rotation festbleibenden beiden Punkte vertauschen. Dann aber gehören hierher die Gruppen derjenigen Rotationen, welche die *regulären Körper:* Tetraëder, Oktaëder, Ikosaëder, oder, was auf dasselbe hinauskommt: Tetraëder, Würfel, Pentagondodekaëder, mit sich selbst zur Deckung bringen. (Es sind damit nicht nur diejenigen Gruppen gemeint, welche aus *allen* solchen Bewegungen bestehen, sondern auch die in ihnen enthaltenen Untergruppen.)

Ich werde nun zeigen, *dass mit diesen Beispielen alle Gruppen der geforderten Beschaffenheit bereits angegeben sind.*

§ 2.

Bestimmung aller Gruppen von endlich vielen linearen Transformationen.

Um den in Rede stehenden Beweis zu führen, überzeuge man sich zunächst, *dass zwei Rotationen nur dann wieder eine Rotation ergeben, wenn sich ihre Axen schneiden.*

Eine Rotation kann man (gegenüber der allgemeinen Schraubenbewegung) dadurch charakterisiren, dass bei ihr Punkte festbleiben, die nicht selbst der Kugelfläche angehören, nämlich alle Punkte der Axe. Soll also die Combination zweier Rotationen wieder eine Ro-

*) In der That sind diejenigen Rotationen, bei denen der Kugelmittelpunkt fest bleibt, auch Rotationen in gewöhnlichem Sinne. Von diesem Umstande ist im Folgenden durchgängig Gebrauch gemacht, um möglichst grosse Anschaulichkeit des Resultats zu erzielen.

tation ergeben, so müssen Punkte existiren, welche aus der neuen Lage, in welche sie die erste Transformation versetzte, vermöge der zweiten Transformation in ihre ursprüngliche Lage zurückgeführt werden. Da sich aber bei einer Rotation jeder Punkt auf einem Kreise bewegt, auf dessen Ebene die Axe im Mittelpunkte senkrecht steht, so sind die Axen der beiden gegebenen Rotationen zwei Perpendikel, die in den Mittelpunkten zweier sich in zwei Punkten schneidender Kreise senkrecht zu deren Ebenen errichtet sind. Das heisst: *die Axen werden sich schneiden*, wie man hier, wo von projectivischer Maassbestimmung die Rede ist, in ganz ähnlicher Weise durch Symmetriegründe beweisen kann, wie man das bei gewöhnlicher Maassbestimmung thun würde. — Dass umgekehrt die Combination zweier Rotationen mit sich schneidenden Axen jedesmal eine Rotation ergiebt, ist an sich deutlich.

Aber weiter überzeugt man sich: *Sollen zwei Rotationen zu einer endlichen Gruppe Anlass geben, so müssen sich ihre Axen innerhalb der Kugel schneiden.* Schnitten sie sich nämlich ausserhalb oder auch auf der Kugel, so würde ein reeller, an die Kugel gehender Kegel bei jeder der beiden Rotationen und also auch bei jeder durch ihre Combination entstehenden Rotation fest bleiben. Aber aus den reellen linearen Transformationen, die einen reellen Kegel der zweiten Ordnung, oder, was auf dasselbe hinauskommt, einen reellen Kegelschnitt in sich überführen, lassen sich keine anderen endlichen Gruppen bilden als diejenigen, die durch Wiederholung *derselben* Rotation um einen festen Punkt des Inneren entstehen. Die Begründung ist genau dieselbe, die man für das entsprechende Theorem der gewöhnlichen ebenen Geometrie angeben kann, welches aussagt, dass man durch Zusammensetzung zweier Drehungen um zwei verschiedene Punkte der Ebene keine endliche Gruppe von Bewegungen erzeugen kann. Der Kern des Beweises für dieses Theorem der elementaren Geometrie und für die entsprechende Behauptung bei projectivischer Maassbestimmung und reellem Fundamentalkegelschnitt liegt übereinstimmend darin, dass in beiden Fällen die Ausdehnung der Ebene eine unendlich grosse ist. Einen ähnlichen Schluss haben wir schon oben angewandt, als wir unter allen Arten von Bewegungen allein die Rotationen als solche bezeichneten, die sich möglicherweise nach endlichmaliger Wiederholung reproduciren: nur bei ihnen ist die Länge der vom einzelnen Punkte zu durchlaufenden Trajectorie eine endliche.

Sollen jetzt *mehrere* Rotationen durch Combination zu einer endlichen Gruppe Anlass geben, so werden ihre Axen, da sie sich gegenseitig im Innern der Kugel schneiden müssen, entweder ein und denselben im Innern gelegenen Punkt gemein haben, oder alle in einer Ebene liegen, so zwar, dass der in der Ebene enthaltene Schnittkreis mit der Kugel alle ihre gegenseitigen Schnittpunkte einschliesst. Allein man überzeugt sich, dass der letztere Fall ohne den ersteren nicht eintreten kann. Denn zuvörderst: Sollen die betr. Rotationen überhaupt eine endliche Gruppe erzeugen können, so müssen sie aus Drehungen um 180 Grad bestehen. Denn bei jedem anderen Drehungswinkel würden beim Eintritte der Rotation um eine der Axen die übrigen $(n-1)$ in eine solche Lage übergeführt, in der jede $(n-2)$ der ursprünglichen Axen nicht mehr träfe. Man hätte also weiterhin Rotationen zu combiniren, deren Axen sich nicht schneiden, was nichts Endliches geben kann. — Die Rotationen, welche hier möglicherweise in Betracht kommen, haben also auf die ihren Axen gemeinsame Ebene jedenfalls den Einfluss, dass sie dieselbe immer wieder mit sich selbst zur Deckung bringen, und es ist nun die Frage, ob man aus solchen Umlegungen einer Ebene, in welcher ein reeller, fest bleibender Kegelschnitt vorhanden ist, ein endliches System erzeugen kann. Aber das ist wieder, wie die entsprechende Forderung, die man bei gewöhnlicher Maassbestimmung stellen mag, unmöglich wegen des unendlich grossen Flächeninhalts einer solchen Ebene.

Soll also durch Zusammensetzung von Rotationen eine endliche Gruppe entstehen, so müssen sich ihre Axen alle in einem Punkte des Kugel-Inneren schneiden, und also sind durch die oben angeführten Gruppen alle in Betracht kommenden Gruppen erschöpft.

§ 3.

Zusätzliche Bemerkungen.

An diese Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Transformationen im binären Gebiete knüpfe ich hier beiläufig die Bemerkung: *dass zugleich alle endlichen Gruppen von Bewegungen im Nicht-Euklidischen Raume bestimmt sind.* Man hat nämlich für diese sechsfach unendlich vielen Bewegungen das fundamentale Theorem, *dass sie sich aus zwei vertauschbaren Gruppen von nur dreifach unendlich vielen zusammensetzen, deren jede man als Gruppe aller linearer Transformationen eines binären Gebietes auffassen kann.* Diese Zerlegung, welche implicite in der bereits genannten Arbeit von Lindemann (diese Annalen Bd. VII) und in der Habilitationsschrift von Frahm (Tübingen 1873) enthalten ist*), entspricht dem Umstande, dass es specielle lineare Transformationen einer Fläche zweiten Grades in sich giebt, bei denen das eine oder das andere System der Erzeugenden völlig ungeändert bleibt. Weil sich die Erzeugenden jedes Systems rational durch einen Parameter darstellen lassen, sind die Transformationen dieser Art, welche sich auf dasselbe System Erzeugender

*) Vergl. auch Clifford in den Proc. der Mathematical Society 1873.

beziehen, geradezu durch die linearen Transformationen eines binären Gebietes vorgestellt; weil ferner bei jeder Transformation das andere Erzeugendensystem gar nicht afficirt wird, sind die beiderlei Transformationen mit einander vertauschbar. *Man wird alle endlichen Gruppen von Bewegungen des Raumes bekommen, indem man jede endliche Gruppe, die sich aus den Transformationen der einen Art zusammensetzt, combinirt mit allen anderen aus den Transformationen der anderen Art zusammenzusetzenden endlichen Gruppen**).

Ist nun die fundamentale Fläche zweiten Grades insbesondere eine reelle, nicht geradlinige, so entspricht jeder reelle Punkt derselben einer Erzeugenden des einen und auch des anderen Systems. Jede lineare Transformation des einen Erzeugendensystems, welche von der (entgegengesetzt) gleichen Transformation des anderen Erzeugendensystems begleitet ist, wird eine *reelle* lineare Transformation der Fläche in sich darstellen. Daher kann man die reellen Punkte der Fläche als ein Gebiet $x + iy$, die reellen Collineationen der Fläche in sich als lineare Transformationen des $x + iy$ auffassen, *und man hat sonach eine rein projectivische Begründung der Repräsentation einer complexen Veränderlichen auf der Kugel oder überhaupt auf einer nicht geradlinigen reellen Fläche zweiten Grades.* Die endlichen Gruppen *reeller* Bewegungen, welche im Falle einer solchen Fundamentalfläche vorhanden sind, decken sich geradezu mit den endlichen Gruppen linearer Transformationen, die man im binären Gebiete construiren kann.

Es sei hier nun auch der Beziehung gedacht, welche zwischen dem in § 2. gelösten Probleme und einer Fragestellung besteht, zu welcher Schwarz in seiner oben genannten Abhandlung geführt wird, und die ihn eben zum Studium derjenigen Formen hinleitet, welche durch die Ecken der regulären Körper auf der Riemann'schen Kugelfläche vorgestellt werden. Zu dem Zwecke sei es gestattet, vorübergehend einen neuen Ausdruck einzuführen. Wenn man die Kugel durch eine Ebene schneidet, so giebt es eine Collineation des Raumes, welche die Kugel in sich überführt und den ganzen Schnittkreis mit der Ebene ungeändert lässt. Sie besteht in einer perspectivischen Umformung, welche als fest bleibende Ebene die gegebene und als Centrum der Perspectivität ihren Pol in Bezug auf die Kugel benutzt. Diese Transformation soll schlechthin als *Spiegelung* an der gegebenen Ebene bezeichnet werden. Eine Spiegelung ist keine Bewegung, sondern eine solche ergiebt sich erst durch Zusammensetzung zweier Spiegelungen.

---

*) Nimmt man die Fundamentalfläche der Maassbestimmung imaginär, so werden die so zusammengesetzten Gruppen lauter reelle Bewegungen unter sich befassen können. Den auf einer Kugelfläche befindlichen n Ecken eines regulären Körpers entsprechend bekommt man hier „reguläre" Systeme von n^2 durch den Raum vertheilten Punkten.

Die entsprechende Aenderung von $x + iy$ ist daher auch keine lineare Transformation, sondern ergiebt sich, wenn man mit einer solchen gleichzeitig eine Vertauschung von $+i$ mit $-i$ verbindet.

Man kann nun überhaupt das Problem aufstellen: *alle endlichen Gruppen von Umänderungen anzugeben, die durch Zusammensetzung verschiedener Spiegelungen entstehen können.* Jede solche Gruppe wird auch eine endliche Gruppe von Bewegungen umfassen, weil zwei Spiegelungen combinirt eine Bewegung ergeben. Dass aber die endlichen Gruppen von Bewegungen, welche man so erhält, in der That alle solchen Gruppen erschöpfen, ist nicht von vorneherein klar, sondern ergiebt sich nur hinterher. Man wird das angeregte Problem zunächst direct in einer Weise zu erledigen haben, welche den in § 2. angestellten Ueberlegungen sehr ähnlich ist. Man zeigt, dass sich alle spiegelnden Ebenen, wenn etwas Endliches entstehen soll, in einem Punkte des Kugel-Innern schneiden müssen, und dann weiter, nachdem man diesen Punkt in den Kugelmittelpunkt verlegt hat, *dass sie nothwendig Symmetrieebenen eines regulären Polyëders sind* (sofern sie nicht alle auf einer festen Ebene senkrecht stehen)*). Die Gruppen von Bewegungen, welche in den so aufgestellten Gruppen von Spiegelungen enthalten sind, stimmen dann in der That mit den in § 2. aufgestellten überein.

Es ist nun ein specieller Fall des hier eingeführten neuen Problems, welcher bei Schwarz vorliegt. Schwarz verlangt — ich bediene mich dabei der eben eingeführten Terminologie — die Bedingung anzugeben, unter der die Spiegelung an nur *drei* verschiedenen Ebenen etwas Endliches liefern kann, und sein Nachweis darf sich dementsprechend darauf beschränken, dass der Schnittpunkt der drei Ebenen im Kugel-Innern zu liegen hat, und die Ebenen, sofern man den Schnittpunkt in den Kugelmittelpunkt verlegt, Symmetrie-Ebenen eines regulären Polyëders sind (wieder abgesehen von den Fällen, in denen die drei Ebenen auf einer vierten Ebene senkrecht stehen oder auch zwei der Ebenen auf der dritten). Die so erzielte Antwort umfasst also in der That dieselben Fälle, die bei der allgemeineren Fragestellung und bei der in § 1, 2 vorliegenden auftreten.

§ 4.

Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich.

Binäre Formen, welche mehr als zwei verschiedene Wurzelpunkte besitzen, können nur durch eine endliche Zahl linearer Transformationen in sich übergehen. Denn es giebt nur eine endliche Zahl von Weisen, die Wurzelpunkte einander zuzuordnen, und durch eine solche Zuord-

*) Vergl. z. B. Elling B. Holst in der Tidskrift for Mathematik, 1875, p. 87.

nung ist, unter der gemachten Voraussetzung, eine lineare Transformation, falls überhaupt eine existirt, vollständig bestimmt. Denn zur Kenntniss einer linearen Transformation reicht es aus, zu wissen, was bei ihr aus drei irgendwie angenommenen Punkten wird. Sehen wir daher von solchen binären Formen ab, die nur einen oder nur zwei verschiedene Wurzelpunkte besitzen, so werden wir alle binären Formen mit linearen Transformationen in sich erhalten, indem wir eine Anzahl Wurzelpunkte beliebig annehmen und auf sie die Transformationen irgend einer der vorstehend bestimmten endlichen Gruppen anwenden. Besonderes Interesse werden diejenigen Formen besitzen, welche durch Anwendung der bez. Transformationen aus einem einzelnen Punkte entspringen.

Unter ihnen treten als die einfachsten zunächst die allgemeinen *cubischen* und *biquadratischen* Formen auf. Wie die linearen Transformationen derselben in sich beschaffen sind, wie man in Folge dessen die Lage der zu ihnen gehörigen Covarianten ermitteln kann, ist theils von mir bei früheren Gelegenheiten angegeben (vergl. z. B. diese Annalen Bd. IV, p. 352, dann das oben genannte Programm), theils von Hrn. Wedekind neuerdings entwickelt worden. Es werde daher von diesen Erörterungen nur so viel wiederholt, als zum Verständniss des Folgenden nothwendig ist. Es sei also vor allen Dingen das bereits in der Einleitung berührte Princip hervorgehoben, welches über die Lage der verschiedenen, hier aus der algebraischen Theorie bekannten, Covarianten entscheidet: *dass nämlich die Covarianten durch dieselben linearen Transformationen in sich übergehen müssen, wie die Grundform.*

Betrachten wir eine binäre cubische Form. Da man drei Punkte der Kugel in drei beliebige andere durch lineare Transformation überführen kann, so denke man sich die drei Wurzelpunkte der Form f als äquidistante Punkte eines grössten Kreises, der der Aequator heissen soll. Dann bestehen die 6 linearen Transformationen, welche f in sich überführen, aus Drehungen durch 120 Grad um die die beiden Pole verbindende Axe und aus Drehungen durch 180 Grad um diejenigen drei Durchmesser, welche bez. je einen Wurzelpunkt von f enthalten. Ertheilt man den Wurzelpunkten von f die „geographische“ Länge

$$0^0, \quad 120^0, \quad 240^0,$$

so sind die sechs Punkte, welche aus einem beliebig angenommenen entstehen, dessen Breite α, dessen Länge β ist, dargestellt durch:

$$\begin{array}{lll} \alpha,\ \beta, & \alpha,\ \beta + 120^0, & \alpha,\ \beta + 240^0, \\ -\alpha,\ -\beta, & -\alpha,\ -\beta + 120^0, & -\alpha,\ -\beta + 240^0. \end{array}$$

Zu diesen Gruppen von sechs Punkten gehört dreifach zählend das

Paar der Pole, *dasselbe stellt also die einzige quadratische Covariante, welche es giebt, die Covariante* Δ *vor**). Andererseits findet sich unter ihnen doppeltzählend das Tripel der Halbirungspunkte der von den Wurzelpunkten f auf dem Aequator bezeichneten Strecken; *sie repräsentiren aus analogen Gründen die Covariante* Q.

Um sich von dem Formensysteme einer *biquadratischen* Form f Rechenschaft zu geben, erinnere man sich, dass die Covariante sechsten Grades T aus drei paarweise zu einander harmonischen Punktepaaren besteht. Dieselbe kann daher repräsentirt werden durch diejenigen sechs Punkte, in denen die Kugel von drei zu einander rechtwinkligen Durchmessern geschnitten wird. Die Lage der vier Wurzelpunkte von f, wie überhaupt der vier Wurzelpunkte einer beliebigen Form aus der Schaar $\varkappa f + \lambda H$, ist dann am einfachsten anzugeben, indem man auf dieses Axenkreuz eine gewöhnliche Coordinatenbestimmung gründet. Bedeuten x, y, z die Coordinaten eines der Wurzelpunkte von $\varkappa f + \lambda H$, so sind

$$\begin{array}{rrr} x, & -y, & -z, \\ -x, & y, & -z, \\ -x, & -y, & z \end{array}$$

die übrigen; denn es sind je zwei solche Punkte zu einem Punktepaare von T harmonisch. Die drei linearen Transformationen, welche, abgesehen von der identischen Transformation, die biquadratische Form in sich überführen, und die dadurch geometrisch definirt sind, dass sie die Wurzelpunkte je paarweise vertauschen, sind sonach dargestellt durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel zweier Coordinaten**).

Unter den Quadrupeln $\varkappa f + \lambda H$ finden sich, sofern man von denjenigen absieht, die doppeltzählend durch ein Punktepaar von T dargestellt sind, noch zweierlei, die eine grössere Zahl linearer Transformationen in sich gestatten: diejenigen drei, welche ein harmonisches, und die zwei, welche ein äquianharmonisches Doppelverhältniss besitzen. Im ersten Falle verschwindet eine der drei Coordinaten x, y, z und die anderen beiden werden ihrem absoluten Werthe nach gleich; im zweiten Falle sind alle Coordinaten bis aufs Vorzeichen gleich zu setzen: *die Wurzelpunkte der äquianharmonischen Form bilden ein reguläres Tetraëder.* Das zweite zu demselben Axenkreuze gehörige reguläre Tetraëder repräsentirt das zugehörige H.

---

*) Wegen dieser und ähnlicher Bezeichnungen vergl. immer Clebsch, Theorie der binären Formen.

**) Vergl. die Arbeit des Hrn. Wedekind, sowie eine neuere Mittheilung desselben (Erlanger Berichte Juli 1875), in der er aus den Wurzelpunkten von f diejenigen von H construirt.

Es sind mit diesen Erörterungen zugleich diejenigen Formen besprochen, die durch das reguläre *Oktaëder* und den *Würfel* dargestellt werden. Das Oktaëder repräsentirt eine Form sechsten Grades von der Art der Covariante T einer biquadratischen Form. Die Zahl der Bewegungen, welche ein Oktaëder mit sich zur Deckung bringen, beträgt 24; die Gruppen von 24 Punkten, welche durch diese Bewegungen aus einem einzelnen Punkte erzeugt werden, umfassen jedesmal sechs der zum Oktaëder gehörigen biquadratischen Formen $\varkappa f + \lambda H$: solche sechs, welche gleiches Doppelverhältniss haben. Unter ihnen findet sich doppeltzählend eine Gruppe von 12 Punkten, bestehend aus den drei harmonischen Quadrupeln $\varkappa f + \lambda H$, und dreifach zählend eine Gruppe von 8 Punkten, die aus den zwei äquianharmonischen Quadrupeln besteht und die Ecken des zugehörigen *Würfels* darstellt.

Von regulären Körpern bleiben noch die beiden zusammengehörigen: das *Ikosaëder* und das *Pentagondodekaëder* zu nennen. Die Zahl der linearen Transformationen dieser Formen in sich beträgt 60. Unter den Gruppen von je 60 durch diese Transformationen zusammengeordneten Punkten befinden sich die Eckpunkte des Ikosaëders fünfmal, die des Dodekaëders dreimal zählend. Es findet sich ferner noch eine doppeltzählende Gruppe von 30 Punkten, mit der dann aber die mehrfach zählenden Gruppen erschöpft sind. Man erhält diese Punkte folgendermassen. Die 15 Ebenen, welche man durch den Kugelmittelpunkt und bez. 4 sich paarweise gegenüberliegende Ecken des Ikosaëders hindurchlegen kann, lassen sich in fünf Tripel von zu einander rechtwinkligen zerlegen. Die 15 Durchschnittslinien der Ebenen dieser Tripel schneiden die gemeinten 30 Punkte aus.

Endlich sind noch solche Punktsysteme zu erwähnen, welche aus einem einzelnen Punkte durch Wiederholung einer beliebigen Rotation durch einen rationalen Theil von 2π hervorgehen. Sie entsprechen den *Kreistheilungsgleichungen*. Combinirt man mit diesen Rotationen noch eine durch 180 Grad um eine gegen die ursprüngliche Rotationsaxe senkrechte, sie schneidende Linie, so entstehen Gruppen von der doppelten Punktzahl. Führt man, wie oben bei Betrachtung der cubischen Form, eine Bestimmung der Punkte durch geographische Breite und Länge aus, so werden die Charaktere der Punkte:

$$\alpha, \ \beta + \frac{2k\pi}{n}, \qquad -\alpha, \ -\beta + \frac{2k\pi}{n}.$$

Die Untersuchung der Kreistheilungsgleichungen, wie derjenigen, die sich auf den letztangeführten Fall beziehen, kann genau nach den weiter entwickelten Methoden erfolgen; wir führen dieselbe aber weiterhin der Kürze wegen nicht aus.

§ 5.

Ein allgemeines Princip. Erste Anwendung auf Oktaëder und Ikosaëder.

Es seien $\Pi = 0$, $\Pi' = 0$ die Gleichungen zweier Punkt-Aggregate, welche aus zwei irgendwie angenommenen Punkten durch Anwendung der linearen Transformationen irgend einer der aufgezählten Gruppen hervorgehen: mit der Festsetzung, dass Π, bez. Π' die geeignete Potenz der betr. Gleichung vorstellt, wenn der anfängliche Punkt zufällig so gewählt ist, dass er eine mehrfach zählende Gruppe erzeugt. Dann behaupte ich, dass

$$\varkappa\Pi + \varkappa'\Pi' = 0,$$

unter $\frac{\varkappa}{\varkappa'}$ einen Parameter verstanden, *überhaupt alle Punktsysteme darstellt, welche durch die betr. linearen Transformationen aus einem einzelnen Punkte hervorgehen.* — Es werden sich nämlich Π und Π' bei Anwendung der linearen Transformationen allerdings um Factoren ändern können, aber diese Factoren müssen bei beiden dieselben sein. Es stellt also

$$\varkappa\Pi + \varkappa'\Pi' = 0$$

jedenfalls ein Punktsystem vor, welches durch die Transformation nicht geändert wird. Aber es giebt nur einfach unendlich viele Punktsysteme der gemeinten Art, und über den Werth von $\frac{\varkappa}{\varkappa'}$ ist gar nichts festgesetzt; indem wir also dem Parameter alle Werthe ertheilen, erhalten wir alle Punktsysteme, die es überhaupt giebt.

Eine Anzahl bekannter Eigenschaften der aufgezählten Formen sind ein Ausfluss dieser Bemerkung. Ich erinnere daran, dass bei den binären cubischen Formen zwischen f^2, Q^2 und Δ^3 eine lineare Relation besteht, dass bei den binären biquadratischen sich alle zu demselben T gehörigen Formen durch $\varkappa f + \lambda H$ darstellen lassen. Ist ferner etwa $f = 0$ die Gleichung eines Oktaëders, $H = 0$ der zugehörige Würfel, $T = 0$ die oben genannte Punktgruppe von 12 Punkten, so hat man eine homogene lineare Relation zwischen f^4, H^3, T^2. Und in der That findet sich gelegentlich der Untersuchung einer solchen Form f eine derartige Relation bei Clebsch (Theorie der binären Formen p. 450) angegeben. Andererseits leitet Schwarz dieselbe in seiner Arbeit ab unter der besonderen Voraussetzung, dass f in einer bestimmten kanonischen Form gegeben sei. Schwarz notirt endlich auch die homogene lineare Relation, welche zufolge des ausgesprochenen Princips zwischen f^5, H^3, T^2 bestehen muss, wenn $f = 0$ ein Ikosaëder vorstellt, $H = 0$ das zugehörige Pentagondodekaëder, $T = 0$ die oben eingeführte Gruppe von 30 Punkten*).

---

*) Die Methode, welche Schwarz dabei benutzt, ist, abgesehen von der

Ich werde nun zunächst, unter Beschränkung auf *Oktaëder* und *Ikosaëder*, zeigen, wie dieser Satz sofort gestattet, eine Uebersicht über die bei ihnen vorhandenen rationalen Covarianten zu erhalten. Die Beschränkung auf die genannten beiden Formen geschieht hier und im Folgenden der Einfachheit wegen. Das Ikosaëder ist es eigentlich, welches das Hauptinteresse auf sich zieht; das Oktaëder wird aber immer vorab untersucht, weil die bei ihm stattfindenden Verhältnisse beim Ikosaëder als bekannt vorausgesetzt werden müssen.

Zuvörderst ist ersichtlich, dass Oktaëder und Ikosaëder nur *eine Invariante* besitzen. Da man nämlich z. B. jedes Oktaëder mit jedem anderen durch lineare Transformation zur Deckung bringen kann, so haben alle absoluten Invarianten, die man aufstellen könnte, gegebene numerische Werthe, und es drücken sich demnach alle denkbaren Invarianten mit Hülfe numerischer, von vornherein angebbarer, Grössen durch Potenzen einer allein beizubehaltenden Invariante aus.

Betrachten wir jetzt eine beliebige, rationale Covariante. Dieselbe muss aus lauter Gruppen zusammengehöriger Punkte bestehen und also, ev. nach Erhebung in die richtige Potenz, als ein Aggregat von Factoren $\varkappa\Pi + \varkappa'\Pi'$ darstellbar sein, d. h. als eine homogene ganze Function von Π und Π'. Die Coefficienten dieser Function können, wenn Π und Π' dieselbe Dimension in den Coefficienten der Grundform besitzen, wie vorausgesetzt sein soll, bei der ihnen begrifflich zukommenden invarianten Bedeutung, nur durch numerische Factoren von einer Potenz der einen, allein vorhandenen Invariante verschieden sein. Zieht man diese Potenz als gemeinsamen Factor vor, so besteht die Covariante im Uebrigen aus einem homogenen Aggregate von Π und Π'. Auf diese Weise erschliesst man:

Alle rationalen ganzen Covarianten unserer Form drücken sich, abgesehen von einer etwa vortretenden Potenz der einen überhaupt vorhandenen Invariante, rational und ganz aus durch diejenigen Formen, welche

---

Form, von der im Texte genannten nicht so sehr verschieden. Man kann sie folgendermassen aussprechen. Man setze

$$y = -\frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{\Pi}{\Pi'}$$

und bilde vermöge dieser Substitution das Gebiet der gegebenen Kugel auf das Gebiet der complexen Variabeln y ab. Einem Systeme von Symmetriekreisbögen, das auf der Kugel verläuft, entspricht dabei, wie man zeigen kann, ein Kreis. Man hat dann ferner das allgemeine Gesetz anzuwenden: dass nämlich eine conforme Abbildung, die ein Stück einer Kreisperipherie in ein ebensolches überführt, immer die Eigenschaft besitzt, symmetrisch zur ersteren gelegene Punkte in solche zu verwandeln, die für die zweite symmetrisch sind. Eine zweimalige Anwendung dieses Satzes ergiebt den im Texte aufgestellten Satz, insofern eine zweimalige Uebertragung durch Symmetrie (Spiegelung) eine lineare Transformation vorstellt.

die unter den zugehörigen Punktsystemen enthaltenen mehrfach zählenden darstellen. Die letzteren also bilden das volle System der Covarianten.

Ich hebe ausdrücklich den Unterschied hervor, der zwischen dieser Ueberlegung und den allgemeinen Methoden besteht, durch welche Gordan gelehrt hat, für eine binäre Form beliebigen Grades ein volles Formensystem aufzustellen. Bei Gordan sind immer Formen mit allgemeinen Coefficienten vorausgesetzt; hier handelt es sich wesentlich um specielle Formen. (Vergl. Gordan: Ueber das Formensystem binärer Formen. Leipzig 1875. Schlussbemerkung.)

§ 6.

Das Formensystem des Oktaëders und des Ikosaëders.

Die allgemeine Methode, welche weiterhin immer angewandt werden soll, ist nun die: *Auf Grund des im vorstehenden Paragraphen angegebenen Princips werden wir gewisse Relationen der Art nach erschliessen und dann die in ihnen vorkommenden Zahlen-Coefficienten durch Ausrechnung an einer kanonischen Form bestimmen.*

Die kanonischen Formen, welche wir dabei für Oktaëder und Ikosaëder zu Grunde legen, sind dieselben, die sich bei Schwarz angegeben finden:

$$\text{Oktaëder: } f = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4),$$
$$\text{Ikosaëder: } f = x_1 x_2 (x_1^{10} + 11\, x_1^5 x_2^5 - x_2^{10}),$$

man verificirt sie leicht durch Betrachtung der Lagenverhältnisse der Wurzelpunkte.

Betrachten wir jetzt das Oktaëder f. Setzen wir

$$f = a_x^6,$$

so lehrt die allgemeine Invariantentheorie Bildungen zweiten Grades in den Coefficienten aufstellen:

$$(ab)^6 = A, \quad (ab)^4 a_x^2 b_x^2, \quad (ab)^2 a_x^4 b_x^4 = H.$$

Wir werden hier zunächst erschliessen, dass die zweitangeführte Bildung identisch verschwindet. Denn unter den zu einem Oktaëder gehörigen Gruppen zusammengeordneter Punkte findet sich keine mit nur vier verschiedenen Punkten. Andererseits kann man dieses identische Verschwinden als Charakterisirung der Oktaëdergleichung auffassen. Jede Form sechsten Grades, welche isolirte Wurzelpunkte besitzt (Gleichungen mit verschwindender Discriminante mögen einen Augenblick ausgeschlossen sein), kann auf die Form transformirt werden: $x_1 x_2 \varphi_4$, wo φ_4 eine Function vierten Grades in x_1, x_2 ist, in welcher x_1^4 und $-x_2^4$ der Coefficient 1 beigelegt werden kann. Wenn man dann die vierte Ueberschiebung $(ab)^4 a_x^2 b_x^2$ wirklich berechnet und ihr identisches Verschwinden verlangt, so zeigt sich, dass man eben die für das Oktaëder angegebene kanonische Form erhält:

Eine Gleichung sechsten Grades $f = 0$ mit nicht verschwindender Discriminante soll eine Oktaëdergleichung heissen, wenn die vierte Ueberschiebung von f mit sich selbst verschwindet.

Fragen wir weiter, was H bedeutet. H kann nicht identisch verschwinden (sonst würden, nach einem bekannten Satze, alle Wurzelpunkte von f coincidiren). Da aber unter den Gruppen zusammengehöriger Punkte, wie sie beim Oktaëder auftreten, nur eine aus blos acht Punkten besteht: diejenige, welche durch die Ecken des zugehörigen Würfels dargestellt wird, *so ist $H = 0$ die Gleichung dieses Würfels.*

Dieselbe Schlussweise zeigt, *dass die Functionaldeterminante T von f und H, eine Form vom 12^{ten} Grade, gleich Null gesetzt, das Product der drei zu $f = 0$ gehörigen harmonischen Quadrupel vorstellt.*

Es fragt sich jetzt, ob die Invariante A verschwindet. Diese Frage beantwortet sich verneinend durch Ausrechnung an der kanonischen Form*). *Es giebt also eine Invariante zweiten Grades in den Coefficienten $A = (ab)^6$.* Eine solche wird aber gerade verlangt, um die lineare Relation, welche nach den obigen Erörterungen zwischen f^4, H^3, T^2 stattzufinden hat, auch in den Coefficienten homogen herzustellen. Die bereits erwähnte, bei Clebsch angegebene Relation ist in der That diese:

$$\frac{Af^4}{36} + \tfrac{1}{2} H^3 + T^2 = 0$$

Auf Grund der Bemerkungen des vorigen Paragraphen kann man jetzt behaupten, *dass f, H, T, A das volle Formensystem von f ausmachen.* Es ist nur noch zu zeigen, dass nicht A, ev. bis auf einen numerischen Factor, das volle Quadrat eines rationalen Ausdrucks ersten Grades in den Coefficienten ist. Man überzeugt sich von der Unmöglichkeit, A so darzustellen, an einem Beispiele, indem man etwa f in der Form

$$x_1 x_2 (\lambda x_1^4 + \mu x_2^4)$$

voraussetzt.

---

*) Für $f = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) = a_x^6$ ergiebt sich:

$$A = (ab)^6 = \tfrac{1}{3},$$
$$H = (ab)^2 a_x^4 b_x^4 = -\tfrac{1}{18}(x_1^8 + 14 x_1^4 x_2^4 + x_2^8),$$
$$T = [f,\ H] \quad = -\tfrac{1}{108}(x_1^{12} - 33 x_1^8 x_2^4 - 33 x_1^4 x_2^8 + x_2^{12}).$$

Diese Ausdrücke befriedigen in der That die weiter im Texte angegebene Relation:

$$\frac{Af^4}{36} + \tfrac{1}{2} H^3 + T^2 = 0.$$

Da die Discriminante der Oktaëdergleichung nicht identisch verschwindet, andererseits vom Grade 10 in den Coefficienten sein muss, so ist sie bis auf einen Zahlenfactor $= A^5$. Verschwindet also A, so rücken zwei Wurzelpunkte des Oktaëders zusammen, und es ist dann, bei den zwischen den Wurzeln herrschenden Doppelverhältniss-Relationen, leicht zu schliessen, dass überhaupt fünf Wurzelpunkte zusammenrücken, während der sechste irgendwo abgetrennt liegt. Eine noch speciellere Form erhalten wir, wenn wir auch noch das identische Verschwinden von H verlangen: *indem dann alle Wurzelpunkte von* f zusammenrücken, wird f die sechste Potenz eines linearen Ausdrucks.

Betrachten wir ferner das Ikosaëder:

$$f = a_x^{12}.$$

Man überzeugt sich durch ganz ähnliche Schlüsse, wie soeben beim Oktaëder, dass von den Ueberschiebungen von f über sich selbst, jedenfalls diese:

$$(ab)^4 a_x^8 b_x^8, \quad (ab)^8 a_x^4 b_x^4, \quad (ab)^{10} a_x^2 b_x^2$$

identisch verschwinden. Durch directe Ausrechnung findet man in Anlehnung an die oben aufgeführte kanonische Form umgekehrt:

Eine Form zwölften Grades mit nicht verschwindender Discriminante stellt, gleich Null gesetzt, ein Ikosaëder vor, wenn ihre vierte Ueberschiebung mit sich selbst verschwindet.

Dagegen darf die Hesse'sche Form

$$H = (ab)^2 a_x^{10} b_x^{10}$$

nicht identisch verschwinden, weil sonst f ein zwölfte Potenz wäre; *sie repräsentirt daher das bereits mit demselben Buchstaben bezeichnete Pentagondodekaëder.* Aus ähnlichen Gründen folgt: *dass die von uns mit T bezeichnete Covariante vom 30^ten^ Grade die Functionaldeterminante von f und H repräsentirt.*

Aber untersuchen wir ferner die noch bleibenden Ueberschiebungen von f über sich selbst:

$$(ab)^{12}, \quad (ab)^6 a_x^6 b_x^6.$$

Die erstere ist eine Invariante, die wiederum als A bezeichnet werden soll. Dass sie nicht verschwindet, ergiebt sich durch Ausrechnung an der kanonischen Form. Aber auch die zweite Bildung — sie mag Π heissen — verschwindet, zufolge Ausrechnung, nicht identisch. Sie kann daher, als vom 12^ten^ Grade, von f selbst nur um einen Factor verschieden sein:

$$\Pi = B \quad f.$$

Dieses B ist sonach definirt *als eine rationale Invariante ersten Grades in den Coefficienten von* f; sie muss, bis auf einen numerischen Factor, gleich $\sqrt{A}$ sein. Aber es fragt sich, ob man B als eine ganze, rationale Function der Coefficienten von f darstellen kann. Dies zeigt sich an einem Beispiele als unmöglich. Man denke nämlich f zunächst in der oben gegebenen kanonischen Form und substituire dann

$$x_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2,$$
$$x_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2.$$

Für die neue Form wird B bis auf einen Zahlenfactor gleich der sechsten Potenz der Substitutionsdeterminante, also gleich $(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^6$ sein müssen; aber es zeigt sich unmöglich, diesen Ausdruck aus den Coefficienten des neuen f linear zusammenzusetzen.

Das Vorhandensein einer in den Coefficienten rationalen Invariante vom ersten Grad wird auch durch die lineare Relation verlangt, welche nach dem Früheren zwischen f^5, H^3, T^2 stattfinden soll. Denn während H^3 und T^2 vom sechsten Grade in den Coefficienten von f sind, hat f^5 nur den fünften Grad und man muss ihm also die Invariante B als Factor zusetzen.

Man hat eine Relation

$$\varkappa \cdot Bf^5 + \lambda H^3 + \mu T^2 = 0,$$

wo $\varkappa$, λ, μ numerische Constanten sind).*

---

*) Für die oben angegebene kanonische Form

$$f = x_1^{11} x_2 + 11\, x_1^6 x_2^6 - x_1 x_2^{11}$$

findet sich:

$$A = \frac{25}{84}, \qquad B = -\frac{5}{84},$$

ferner:

$$12^2 \cdot H = -(x_1^{20} + x_2^{20}) + 228\,(x_1^{15}x_2^5 - x_1^5 x_2^{15}) - \underline{494}\, x_1^{10} x_2^{10},$$
$$12 \cdot T = (x_1^{30} + x_2^{30}) + 522\,(x_1^{25}x_2^5 - x_1^5 x_2^{25}) - 10005\,(x_1^{20}x_2^{10} + x_1^{10}x_2^{20}),$$

und also

$$7 \cdot 12^2 \cdot B \cdot f^5 + 5 \cdot 12^4 \cdot H^3 + 5 \cdot T^2 = 0.$$

Vermöge der so geschriebenen Relation ist man in der Lage, die von Schwarz l. c. angedeutete algebraische Reducirbarkeit des Integrals

$$\int \frac{(x\,dx)}{\sqrt[6]{f}}$$

auf ein elliptisches Integral folgendermassen durchzuführen. Man setze:

$$z_1 = H, \qquad z_2 = \sqrt[3]{Bf^5}.$$

So ist

$$(z\,dz) = \frac{1}{12} \cdot B^{\frac{1}{3}} \cdot f^{\frac{2}{3}} \cdot T$$

und also unser Integral

$$= \int \frac{12\,(z\,dz)}{B^{\frac{1}{3}} \cdot f^{\frac{5}{6}} \cdot T}$$

$$= \int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{B}} \cdot \frac{(z\,dz)}{\sqrt{-720\, z_1^3 z_2 + 7\, z_2^4}}.$$

Andererseits ergiebt sich:

Das volle Formensystem von f besteht aus f, Π, H, T und *A. Zwischen seinen Formen besteht neben der vorstehenden Relation noch diese* (in welcher der Werth des numerischen Coefficienten der kanonischen Form entnommen ist):

$$84\,\Pi^2 = A f^2.$$

Die Untersuchung specieller Formen des Ikosaëders hat folgende Resultate. Die Discriminante ist proportional zu A^{11}. Verschwindet A, so fallen also Wurzelpunkte von f zusammen, und zwar fallen gleich 11 Wurzelpunkte zusammen, während der zwölfte noch beliebig bleibt. Auch er vereinigt sich mit den elf übrigen, sobald H identisch verschwindet.

Es mag zum Schlusse noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die drei Formen f, H, T, welche nach dem Vorstehenden für Oktaëder und Ikosaëder eine so wichtige Rolle spielen, auch bei der allgemeinen Vertheilung der Covarianten einer beliebigen binären Form, wie sie Gordan in seiner neuesten Schrift gegeben hat (Ueber das Formensystem binärer Formen, Leipzig 1875), eine zusammengehörige Gruppe bilden; sie constituiren, nach der dort angewandten Bezeichnung, das System A_1 von f.

§ 7.

Irrationale Covarianten des Oktaëders. Die Auflösung der Oktaëdergleichung.

Dieselben Principien, welche im vorstehenden Paragraphen zur Untersuchung der rationalen Covarianten von Oktaëder und Ikosaëder verwandt wurden, ergeben eine Menge von Relationen für irrationale Covarianten derselben. Von diesen Beziehungen sollen hier einige wenige entwickelt werden, welche für die Auflösung der Oktaëder- und Ikosaëdergleichung von Bedeutung sind. Wenn die Auflösung der Oktaëdergleichung, die sich algebraisch gestaltet, auch schon bekannt ist*), so mag sie hier des Zusammenhangs und der späteren Benutzung wegen doch dargestellt werden.

Beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung des Oktaëders, weil sich bei ihm eine Reihe der auch beim Ikosaëder vorhandenen Beziehungen einfacher darstellen lässt. Ich behaupte: *Jede Ecke des Oktaëders drückt sich rational durch die gegenüberstehende aus.*

---

*) Vergl. Clebsch und Gordan, Annali di Matematica Serie 2, t. I, und Clebsch, Binäre Formen, p. 451.

Sei nämlich, um diese Darstellung nur auf eine Weise zu entwickeln*), $H_x{}^8 = 0$ der zum Oktaëder gehörige Würfel, x eine Oktaëderecke, so ist

$$H_x{}^7 H_y = 0$$

die Gleichung der gegenüberstehenden Ecke. Der Beweis ist einfach dieser: Die hingeschriebene Polare ist simultane Covariante des Oktaëders und des Punktes x. Das System der letzteren, und also auch jede Covariante derselben, geht aber durch vier lineare Transformationen in sich über, entsprechend Drehungen durch 90 Grad um die Verbindungsgerade der Ecke x mit der gegenüberliegenden. Der durch die hingeschriebene Polare repräsentirte Punkt kann daher nur entweder mit x selbst oder mit der gegenüberliegenden Ecke coincidiren, und die erstere dieser beiden Möglichkeiten ist zu verwerfen, weil dann x der Gleichung $H = 0$ genügen würde.

Auf Grund dieser Darstellung wird man schliessen, *dass die Spaltung des Oktaëders in die drei Paare gegenüberliegender Ecken von einer rationalen Gleichung dritten Grades abhängt.* Eine solche kann man in folgender Weise aufstellen.

Es sei φ eins der Punktepaare, $\frac{f}{\varphi}$ das Aggregat der übrigen vier Wurzelpunkte von f. Beide Formen gehen durch 8 von den 24 linearen Transformationen, welche f mit sich zur Deckung bringen, in sich über. Dabei vertauschen sich**) die 8 Ecken des Würfels H unter einander. *Man wird also*, da unter den Gruppen zusammengehöriger 8 Punkte φ viermal, $\frac{f}{\varphi}$ zweimal zählt, *H in der Form darstellen können:*

$$H = \varkappa \varphi^4 + \varkappa' \cdot \left(\frac{f}{\varphi}\right)^2.$$

Betrachtet man hier φ^2 als Unbekannte, so ist dies eine Gleichung dritten Grades der gesuchten Art. Dieselbe enthält, wie alle weiterhin aufzustellenden Resolventen, noch die Veränderlichen x_1, x_2 als willkührliche

---

*) Genau geradeso beweist man, dass

$$H_x{}^6 H_y{}^2 = 0, \qquad H_x{}^5 H_y{}^3 = 0$$

dieselbe Ecke bez. zweimal und dreimal zählend vorstellen; Analoges leisten die Polaren

$$T_x{}^{11} T_y = 0, \qquad T_x{}^{10} T_y{}^2 = 0, \qquad T_x{}^9 T_y{}^3 = 0$$

der Covariante $T = T_x{}^{12}$. Andererseits repräsentiren, für $f = a_x{}^6$, die Polaren:

$$a_x{}^4 a_y{}^2 = 0, \qquad a_x{}^3 a_y{}^3 = 0, \qquad a_x{}^2 a_y{}^4 = 0,$$

unter x eine Oktaëderecke verstanden, das Product dieser Ecke in die einmal, zweimal, dreimal gezählte gegenüberliegende.

**) Man verificirt solche Angaben immer sofort an einem Modell.

Parameter. Ertheilt man ihnen feste Werthe, so erfährt man durch Auflösung der Gleichung den numerischen Werth, welchen φ^2 dementsprechend erhält. Will man φ^2 als Function der x kennen, so hat man dieselbe Berechnung für zwei weitere Werthepaare durchzuführen, die man, um neue Irrationalitäten zu vermeiden, dem ursprünglichen benachbart wählen kann.

Zur wirklichen Herstellung der cubischen Gleichung gehen wir auf die kanonische Form zurück:

$$f = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4).$$

Eins der Punktepaare φ ist dann:

$$\varphi = 2\, x_1 x_2,$$

wo der absolute Werth so genommen ist, dass die Determinante von φ gleich -1. Dann folgt aus dem oben angegebenen Werthe von H:

$$H = -\frac{1}{18} \cdot \varphi^4 - \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{f}{\varphi}\right)^2,$$

und setzt man jetzt etwa

$$p = \frac{\varphi^2}{\sqrt[3]{f^2}},$$

so kommt die Gleichung:

$$p^3 + 18 \frac{H}{\sqrt[3]{f^4}} \cdot p + 4 = 0.$$

Von ihr gehen wir sofort zu derjenigen über, die für ein beliebiges Coordinatensystem gilt, in dem wir durch Einführen der Invariante A des Oktaëders, die für die kanonische Form den Werth $\frac{1}{3}$ hat, und der Determinante Δ der quadratischen Form φ, für welche wir zunächst den Werth -1 annahmen, homogen machen. So erhält man:

Bedeutet φ die durch ein Paar gegenüberstehender Ecken des Oktaëders vorgestellte quadratische Form, Δ deren Determinante, und setzt man:

$$p = -\sqrt[3]{\frac{3\,A}{f^2}} \cdot \frac{\varphi^2}{\Delta},$$

so hat man:

$$p^3 + 18 \frac{H}{\sqrt[3]{3\,A f^4}} \cdot p + 4 = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man, indem man noch zur Vereinfachung des Resultats von der zwischen f, H, T bestehenden Relation Gebrauch macht:

$$p = \sqrt[3]{2 \cdot \frac{f^2 \sqrt{-A} + 6\,T}{f^2 \sqrt{-A}}} + \sqrt[3]{2 \cdot \frac{f^2 \sqrt{-A} - 6\,T}{f^2 \sqrt{-A}}},$$

ein Resultat, welches mit dem bei Clebsch p. 451 auf anderem Wege abgeleiteten übereinstimmt.

§ 8.

Analoge Untersuchungen beim Ikosaëder*).

Wie beim Oktaëder wird man auch beim Ikosaëder jede Ecke rational durch die gegenüberliegende darstellen können und also schliessen, dass die Zerspaltung des Ikosaëders f in die sechs Paare gegenüberstehender Punkte von einer Gleichung sechsten Grades abhängt. Sei φ ein solches Paar. Unter den 60 Bewegungen, welche f mit sich zur Deckung bringen, finden sich 10, welche φ ungeändert lassen. Dieselben vertauschen die 10 Punkte $\frac{f}{\varphi}$ alle unter einander. Andererseits vertheilen sich mit Bezug auf sie die 20 Punkte von H in zwei Gruppen von je 10. Man wird also H als Product zweier Factoren darstellen können, die aus φ^5 und $\frac{f}{\varphi}$ linear zusammengesetzt sind, d. h. man wird setzen können:

$$H = \varkappa\varphi^{10} + \lambda\varphi^4 \cdot f + \mu\frac{f^2}{\varphi^2}.$$

Betrachtet man hier φ^2 als Unbekannte, so hat man eine Gleichung sechsten Grades der geforderten Beschaffenheit.

Zur fertigen Herstellung derselben gehen wir zu der kanonischen Form zurück:

$$f = x_1 x_2 (x_1^{10} + 11\, x_1^5 x_2^5 - x_2^{10}).$$

Eins der Paare φ, mit der Determinante -1 genommmen, ist dann etwa

$$\varphi = 2\, x_1 x_2.$$

Sodann entnimmt man dem oben angegebenen Werthe von H:

$$12^2 \cdot H = -\frac{5^5}{2^{10}} \cdot \varphi^{10} + \frac{5^3}{2^3} \cdot \varphi^4 \cdot f - \frac{4\, f^2}{\varphi^2},$$

und setzt man jetzt:

$$\pi = -\frac{5\,\varphi^2}{4\sqrt[3]{f}},$$

so kommt:

$$\pi^6 + 10\,\pi^3 - \frac{12^2\, H}{\sqrt[3]{f^5}} \cdot \pi + 5 = 0.$$

Um zu einem beliebigen Coordinatensysteme überzugehen, hat man die Determinante Δ von φ, die gleich -1 genommen wurde, und die Invariante B von f, welche für die kanonische Form gleich $-\frac{5}{84}$ ist, einzuführen.

*) Vergl. Erlanger Berichte. Juli 1875.

Man setze also:

$$\pi = -\frac{5}{4}\sqrt[3]{\frac{84}{5}\cdot\frac{B}{f}}\cdot\frac{\varphi^2}{\Delta},$$

so kommt:

$$\pi^6 + 10\,\pi^3 + \frac{720\,H}{\sqrt[3]{2100\,B f^5}}\cdot\pi + 5 = 0,$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

Man kann aber ferner beim Ikosaëder *eine Resolvente fünften Grades* aufstellen, welche aus folgendem geometrischem Probleme erwächst: die 30 Ecken der Covariante T vertheilen sich, wie wiederholt hervorgehoben, auf fünf reguläre Oktaëder; man soll diese Oktaëder trennen.

Sei t eins derselben. Dasselbe geht durch 12 der 60 Bewegungen, welche das Ikosaëder f mit sich zur Deckung bringen, in sich über. Bei diesen 12 Bewegungen vertauschen sich die Ecken von f unter einander. Andererseits spalten sich die 24 Punkte $\frac{T}{t}$ in zwei Gruppen von je 12 zusammengehörigen. Man wird also setzen können:

$$\frac{T}{t} = \varkappa t^4 + \lambda t^2 f + \mu f^2,$$

und dies ist, wenn man t als Unbekannte betrachtet, eine Gleichung fünften Grades der verlangten Art.

Die Ausrechnung gestaltet sich mit Hülfe der kanonischen Form folgendermassen. Man findet (vergl. den folgenden §), dass eins der Oktaëder t gleich gesetzt werden kann:

$$t = (x_1^2 + x_2^2)\,(x_1^4 + 2\,x_1^3 x_2 - 6\,x_1^2 x_2^2 - 2\,x_1 x_2^3 + x_2^4).$$

Die zugehörige Invariante A (die nun als a bezeichnet sein soll) hat den Werth $\frac{20}{3}$. Man findet dann

$$\frac{12\,T}{t} = t^4 - 10\,t^2 f + 45\,f^2,$$

und setzt man jetzt

$$p = \frac{t}{\sqrt{f}},$$

so kommt:

$$p^5 - 10\,p^3 + 45\,p = \frac{12\,T}{\sqrt{f^5}}.$$

Indem man jetzt zu allgemeiner Coordinatenbestimmung übergeht, hat man folgendes Resultat:

Sei t eins der fünf Oktaëder, a die zugehörige Invariante, so setze man:

$$p = 4\sqrt{-\frac{7\,B}{a f}}\cdot t.$$

Dann besteht die Gleichung:

$$p^5 - 10p^3 + 45p = \frac{30\,T}{\sqrt{-105\,Bf^5}}.$$

§ 9.

Die irrationalen Covarianten des Ikosaëders in kanonischer Form.

Des weiteren Vergleichs wegen sollen hier die vorstehend benutzten verschiedenen irrationalen Covarianten des Ikosaëders, für die kanonische Form berechnet, zusammengestellt werden.

Die *12 Wurzeln der Gleichung* $f = 0$, für

$$f = x_1^{11}x_2 + 11\,x_1^6x_2^6 - x_1x_2^{11},$$

erhalten die folgenden Coordinaten:

$$\frac{x_1}{x_2} = 0, \quad \infty, \quad a\,\varepsilon^\nu, \quad -\frac{1}{a}\,\varepsilon^\nu,$$

wo

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \quad a = \varepsilon + \varepsilon^4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Hieraus beiläufig das Resultat: Die Doppelverhältnisse, welche man aus den Ecken des Ikosaëders bilden kann, sind rationale Functionen von ε. Man kann auch sagen: nach Adjunction von ε drücken sich die 12 Wurzeln einer Ikosaëdergleichung durch drei beliebige derselben rational aus.

Die *6 Punktepaare* φ, welche entstehen, indem man die gegenüberliegenden Ecken des Ikosaëders zusammenfasst, sollen als φ_∞, φ_0, $\varphi_1 \cdots \varphi_4$ bezeichnet sein; φ_∞ umfasse die Wurzeln 0, ∞, φ_ν die beiden $a\,\varepsilon^\nu$, $-\frac{1}{a}\,\varepsilon^\nu$. Wir wählen die φ mit übrigens willkührlichem Vorzeichen so, dass die zugehörige Determinante gleich -1. Dann kommt:

$$\varphi_\infty = 2\,x_1x_2,$$

$$\varphi_\nu = \frac{2}{\sqrt{5}}\,(\varepsilon^{-\nu}x_1^2 + x_1x_2 - \varepsilon^\nu x_2^2).$$

Um ferner die *Oktaëder* t zu berechnen, seien ψ, χ irgend zwei der φ. Dann stellen, behaupte ich,

$$\psi + \chi = 0, \quad \psi - \chi = 0, \quad [\psi, \chi] = 0 \text{ (Functionaldeterminante)}$$

drei Punktepaare von T dar, die zusammen ein t bilden. Für jedes t erhält man so drei Darstellungen.

Die beiden Punktepaare $\psi \pm \chi = 0$ werden nämlich offenbar von den beiden Halbirungslinien der Winkel ausgeschnitten (auf der Kugel), welche die Axen der ψ und χ mit einander bilden. Denn sie gehören erstens mit ψ und χ zu derselben Involution und gehen zweitens durch diejenigen linearen Transformationen in sich über, welche ψ und χ mit einander vertauschen. — Die Functionaldeterminante $[\psi, \chi]$ dagegen stellt diejenige Form dar, welche gleichzeitig zu ψ und χ harmonisch ist und also ausgeschnitten wird von dem gemeinsamen Perpendikel der Axen von ψ und χ.

Nennt man also die 5 Oktaëder in verständlicher Reihenfolge t_0, $t_1 \cdots t_4$, so ist t_ν bis auf einen Factor gleich

$$(\varphi_\infty + \varphi_\nu)(\varphi_\infty - \varphi_\nu)[\varphi_\infty, \varphi_\nu].$$

Den Factor wählen wir, in Uebereinstimmung mit dem vorangehenden Paragraphen so, dass die zugehörige Invariante a_ν gleich $\frac{20}{3}$ wird. Man findet ihn (bei willkührlich gewähltem Vorzeichen) $= \frac{\sqrt{5}}{8}$, also

$$\begin{aligned} t_\nu &= \frac{\sqrt{5}}{8}(\varphi_\infty + \varphi_\nu)(\varphi_\infty - \varphi_\nu)[\varphi_\infty, \varphi_\nu] \\ &= \varepsilon^{2\nu}(x_1^6 - 2\,x_1 x_2^5) + \varepsilon^{-2\nu}(x_2^6 + 2\,x_1^5 x_2) \\ &\quad - \varepsilon^\nu \cdot 5\,x_1^2 x_2^4 - \varepsilon^{-\nu} \cdot 5\,x_1^4 x_2^2, \end{aligned}$$

womit zugleich der oben für t_0 benutzte Werth verificirt ist*).

Man kann auch schreiben:

$$\begin{aligned} t_\nu &= \frac{-5\sqrt{5}}{8}(\varphi_\infty + \varphi_\nu)(\varphi_{\nu+1} + \varphi_{\nu-1})(\varphi_{\nu+2} + \varphi_{\nu-2}) \\ &= \frac{+5}{8}(\varphi_\infty - \varphi_\nu)(\varphi_{\nu+1} - \varphi_{\nu-1})(\varphi_{\nu+2} - \varphi_{\nu-2}) \\ &= \frac{5i\sqrt{5}}{8}(\varphi_\infty^2 - \varphi_\nu^2)^{\frac{1}{2}}(\varphi_{\nu+1}^2 - \varphi_{\nu-1}^2)^{\frac{1}{2}}(\varphi_{\nu+2}^2 - \varphi_{\nu-2}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

In Folge dessen hat man zwischen der entsprechenden Wurzel p_ν der Gleichung fünften Grades $\left(a = \frac{20}{3}\right)$:

$$p_\nu = 2\sqrt{\frac{-21\,B}{5\,f}} \cdot t_\nu$$

und den sechs Wurzeln π_∞, $\pi_0 \cdots \pi_\nu$ der Gleichung sechsten Grades $(\Delta = -1)$:

---

*) Der Vollständigkeit wegen sei noch erwähnt, dass die Punktepaare des zugehörigen Pentagondodekaëders dargestellt sind durch:

$$\varepsilon^{-\nu} x_1^2 - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} x_1 x_2 - \varepsilon^{+\nu} x_2^2,$$

und dass dieselben proportional sind zu den fünften Ueberschiebungen zweier Oktaëder t. (Das Letztere schliesst man wieder aus dem Umstande, dass es 3 Bewegungen giebt, welche gleichzeitig zwei Oktaëder t und ein Punktepaar des Pentagondodekaëders in sich überführen.)

$$\pi = \frac{5}{4}\sqrt[3]{\frac{84}{5}\cdot\frac{B}{f}}\cdot\varphi^2$$

folgende Beziehung:

$$p_\nu = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\,(\pi_\infty - \pi_\nu)^{\frac{1}{2}}\,(\pi_{\nu+1} - \pi_{\nu-1})^{\frac{1}{2}}\,(\pi_{\nu+2} - \pi_{\nu-2})^{\frac{1}{2}}.$$

§ 10.

Beziehungen zu anderweitigen Untersuchungen.

Die Resolventen sechsten und fünften Grades, sowie insbesondere die Formeln des letzten Paragraphen stimmen, wie bereits in der Einleitung gesagt, genau überein mit Formeln, welche bei Untersuchungen über die Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades von Brioschi, Hermite und Kronecker gegeben worden sind. Es sei wegen derselben insbesondere auf den Aufsatz von Joubert: Sur l'équation du sixième degré (Comptes Rendus 1867, I, p. 1237—1240) verwiesen, insofern dort einige Unexactheiten, welche in Brioschi's bez. Formeln vorkommen, verbessert sind. Neu ist nur die Bedeutung, unter der hier diese Formeln auftreten, und die damit zusammenhängende geometrische Herleitung derselben. Andererseits entnimmt man den genannten Untersuchungen, dass die Gleichung sechsten Grades, welche die Punktepaare des Ikosaëders trennt, und also die Ikosaëdergleichung selbst, durch elliptische Functionen gelöst werden kann, was hier indess nicht weiter verfolgt werden soll. —

Zum Schlusse werde auch noch die Galois'sche Gruppe der Ikosaëdergleichung bestimmt. Den linearen Transformationen entsprechend, welche die Gleichung in sich überführen, sind jedesmal 60 der Doppelverhältnisse, welche man aus ihren Wurzeln bilden kann, einander gleich, die Differenzen dieser Doppelverhältnisse also Null und somit rational bekannt. Diese Doppelverhältnissgleichheiten bleiben, wie eine nähere Ueberlegung zeigt, bei folgenden und nur bei folgenden Vertauschungen der Wurzeln ungeändert:

1. Bei denjenigen (60) Vertauschungen, welche einer linearen Transformation des Ikosaëders in sich entsprechen, und
2. bei denjenigen Vertauschungen, welche aus einer solchen linearen Transformation hervorgehen, indem man überdies jede Wurzel durch die gegenüberliegende ersetzt.

Die Galois'sche Gruppe umfasst also 120 Substitutionen. Sie kann auf 60 Substitutionen eingeschränkt werden, wenn man den numerischen Werth des Doppelverhältnisses von vier Wurzeln, die nicht in einer Ebene liegen, adjungirt. Denn ein solches Doppelverhältniss stellt eine complexe Grösse vor, welche bei den Operationen 2. in die conjugirte Grösse übergeht. Alle diese Doppelverhältnisse aber stellen sich nach einer im vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung als rationale Functionen einer fünften Einheitswurzel ε dar, und *also ist die Adjunction von ε nöthig und hinreichend, um die Gruppe auf 60 Substitutionen zu reduciren.*

Um die Structur der so reducirten Gruppe zu charakterisiren, genügt es, darauf hinzuweisen, dass sich bei den 60 Bewegungen, welche das Ikosaëder mit sich zur Deckung bringen, die fünf Oktaëder t unter einander vertauschen. Es entsprechen die Substitutionen der Gruppe demnach den Vertauschungen von fünf Elementen, welche deren Differenzenproduct ungeändert lassen.

München, im Juni 1875.