

Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik.

Von

ADOLF KNESER in Berlin.

Viele Fragen der mathematischen Physik, besonders solche, die sich auf die Verteilung der Wärme und auf Schwingungsvorgänge beziehen, führen auf eine analytische Aufgabe, der Sturm und Liouville in den ersten Bänden des Liouvilleschen Journals eine Reihe klassischer Abhandlungen gewidmet haben, und die in folgender Weise ausgesprochen werden kann.

Es seien g, k, l drei in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = X$ gegebene Funktionen von x , und r ein positiver Parameter. Bestimmt man dann V als Funktion von x durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dV}{dx} \right) + (gr - l)V = 0$$

und verlangt, daß sie den Bedingungen

$$(1) \quad \begin{aligned} k \frac{dV}{dx} - hV \Big|_0^0 &= 0, \\ k \frac{dV}{dx} + HV \Big|_0^X &= 0 \end{aligned}$$

genüge, in denen durch h und H Konstante bezeichnet sind, so ist dies nur möglich, wenn dem Parameter r gewisse besondere Werte beigelegt werden. Man erhält für ihn eine transcendente Gleichung, die, wenn für die Funktionen k, g, l angemessene Voraussetzungen gemacht werden, nur einfache positive Wurzeln r_1, r_2, \dots besitzt. Die zugehörigen Funktionen V , welche bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, seien V_1, V_2, \dots ; sie werden*) als die Normalfunktionen der betreffenden Aufgabe bezeichnet und haben die leicht erweisliche Grundeigenschaft

*) Lord Rayleigh, Theory of sound I Nr. 118.

$$(2) \quad \int_0^X g V_\mu V_\nu dx = 0,$$

wenn μ und ν verschiedene ganze Zahlen sind. Es handelt sich darum, eine in dem Intervall von $x=0$ bis $x=X$ willkürlich gegebene Funktion $f(x)$ durch eine Reihe von der Form

$$(3) \quad f(x) = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \dots$$

darzustellen, für deren Koeffizienten man, wenn die Entwicklung möglich ist und gleichmäßig konvergiert, auf Grund der Eigenschaft (2) sofort den Ausdruck

$$(4) \quad A_\nu = \frac{\int_0^X g f(x) V_\nu dx}{\int_0^X g V_\nu^2 dx}.$$

erhält, indem man nach Fourier die Gleichung (3) mit $g V_\nu$ multipliziert und von 0 bis X integriert.

Das Ziel, dem die vorliegenden Untersuchungen zustreben, besteht nun darin, unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen zu beweisen, daß die mit den Koeffizienten (4) gebildete Reihe (3) die Funktion $f(x)$ wirklich darstellt; dies gelingt, indem der Funktion $f(x)$ im wesentlichen dieselben Beschränkungen wie bei dem Dirichletschen Beweise für die Fouriersche Reihendarstellung auferlegt werden. Einzelne analytische Entwicklungen, die ich dabei benutze, sind durch die hierher gehörigen Arbeiten von Dini*), Harnack**), Poincaré***) und Stekloff†) angeregt oder aus ihnen entlehnt; der Grundgedanke aber kann in folgender Weise angedeutet werden.

Die angeführten neueren Autoren benutzen sämtlich ein von Cauchy ††) bei seiner Untersuchung der Fourierschen Reihe eingeführtes Hilfsmittel; sie konstruieren eine Funktion einer komplexen Variablen r , welche x als Parameter enthält, an Singularitäten nur Pole $r = r_\nu$ aufweist, und als Residuen die entsprechenden Glieder der Reihe (3) ergibt. Poincaré hat wie es scheint zuerst darauf hingewiesen, daß die Cauchysche Hilfsfunktion dasjenige Integral der Gleichung

*) Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche, Pisa 1880.

**) Sächs. Ber. 1884.

***) Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Paris 1895. Rendiconti del circolo mat. di Palermo 1894.

†) Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) III.

††) Exercices 1827, Oeuvres (2) VII.

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dV}{dx} \right) + (gr - l)V + f(x) = 0$$

ist, welches den Bedingungen (1) genügt. Hinsichtlich dieser Funktion von r benutze ich nur die leicht ersichtliche Tatsache, daß irgend ein Wert r_v aus der Reihe ihrer Pole wegfällt, wenn der entsprechende Koeffizient A_v verschwindet; sind diese Größen sämtlich gleich Null, so ist die Cauchysche Hilfsfunktion ganz, d. h. eine beständig konvergente Potenzreihe des Arguments r . Das ist aber, wie sich zeigen läßt, nur möglich, wenn die Funktion $f(x)$ identisch verschwindet, und so gewinnt man den Satz, daß in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = X$ überall die Gleichung

$$f(x) = 0$$

gilt, wenn alle A_v verschwinden.

Hieraus erschließt man durch die oben angedeutete Argumentation von Fourier die gewünschte Gleichung (3), sobald deren rechte Seite gleichmäßig konvergiert, und der zweite Teil unsrer Arbeit besteht darin, Bedingungen aufzusuchen, denen die Funktion $f(x)$ unterworfen werden muß, um für die Reihe (3) die bezeichnete Eigenschaft zu sichern. Die erhaltenen Bedingungen werden dann einerseits möglichst erweitert; andererseits untersuche ich die Vereinfachungen des Beweises, die bei engeren Voraussetzungen möglich werden und von Interesse sind, wenn man die einzelnen Probleme der mathematischen Physik mit einem möglichst geringen Aufwande von allgemeiner Theorie behandeln will.

I. Neue Theorie der Fourierschen Reihe.

§ 1.

Vorbereitungen.

Es sei $f(x)$ eine von $x = 0$ bis $x = \pi$ stetige Funktion, ϱ eine Konstante; setzt man

$$p = p(x) = \frac{1}{\varrho} \int_0^x f(\alpha) \sin \varrho(\alpha - x) d\alpha,$$

so findet man

$$p'(x) = - \int_0^x f(\alpha) \cos \varrho(\alpha - x) d\alpha,$$

$$p''(x) = - f(x) - \varrho \int_0^x f(\alpha) \sin \varrho(\alpha - x) d\alpha,$$

und sieht unmittelbar, daß p ein Integral der Gleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \varrho^2 y + f(x) = 0$$

ist, und zwar dasjenige, für welches

$$(2) \quad p(0) = p'(0) = 0.$$

Aus einer Lösung dieser Gleichung findet man aber andere, indem man beliebige Integrale der homogenen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \varrho^2 y = 0$$

addiert; vier Lösungen der Gleichung (1) sind demnach, wenn durch C Konstante bezeichnet werden,

$$\begin{aligned} u &= p + C_1 \sin \varrho x, & v &= p + C_2 \cos \varrho x, \\ w &= p + C_3 \sin \varrho x, & s &= p + C_4 \cos \varrho x, \end{aligned}$$

und die Gleichungen (2) ergeben

$$u(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad s'(0) = 0.$$

In diesen Ausdrücken bestimmen wir die Konstanten C durch die Forderungen

$$u(\pi) = 0, \quad v'(\pi) = 0, \quad w'(\pi) = 0, \quad s(\pi) = 0;$$

dann bieten die vier Größen u, v, w, s alle vier möglichen Fälle dar, in denen an jeder der Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ entweder die Funktion, oder ihre erste Ableitung verschwindet, und man erhält für die Konstanten C folgende Bestimmungen:

$$\begin{aligned} p(\pi) + C_1 \sin \varrho \pi &= 0, & p'(\pi) - C_2 \varrho \sin \varrho \pi &= 0, \\ p'(\pi) + C_3 \varrho \cos \varrho \pi &= 0, & p(\pi) + C_4 \cos \varrho \pi &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned} u &= \frac{\varrho p(x) \sin \varrho \pi - \varrho p(\pi) \sin \varrho x}{\varrho \sin \varrho \pi}, \\ v &= \frac{\varrho p(x) \sin \varrho \pi + p'(\pi) \cos \varrho x}{\varrho \sin \varrho \pi}, \\ w &= \frac{\varrho p(x) \cos \varrho \pi - p'(\pi) \sin \varrho x}{\varrho \cos \varrho \pi}, \\ s &= \frac{\varrho p(x) \cos \varrho \pi - \varrho p(\pi) \cos \varrho x}{\varrho \cos \varrho \pi}, \end{aligned}$$

und da die Ausdrücke für $p(x)$ und $p'(x)$ zeigen, daß $\varrho p(x)$, $\varrho p(\pi)$ und $p'(\pi)$ ganze Funktionen von ϱ sind, so gilt dasselbe von den Zählern der Brüche u, v, w, s , und zwar sind diese, wie man leicht sieht, bei u und v gerade, bei w und s ungerade Funktionen von ϱ ; sie mögen der Reihe nach durch G_1, G_2, G_3, G_4 bezeichnet werden, sodaß

$$u = \frac{G_1(\varrho)}{\varrho \sin \varrho \pi}, \quad v = \frac{G_2(\varrho)}{\varrho \sin \varrho \pi}, \quad w = \frac{G_3(\varrho)}{\varrho \cos \varrho \pi}, \quad s = \frac{G_4(\varrho)}{\varrho \cos \varrho \pi}.$$

Man findet dann leicht

$$G_1(0) = G_3(0) = G_4(0) = 0, \quad G_2(0) = p'(\pi)|_{\varrho=0} = -\int_0^{\pi} f(\alpha) d\alpha;$$

da nun $G_1(\varrho)$ und $G_2(\varrho)$ gerade Funktionen sind und $\varrho = 0$ im Nenner von u und v eine doppelte, im Nenner von w und s eine einfache Nullstelle ist, so ist $\varrho = 0$ ein Pol nur bei v , und auch hier nur, wenn $G_2(0)$ von Null verschieden ist.

Wenn ferner n eine positive ganze Zahl oder Null ist, gelten die Gleichungen

$$G_1(n) = -np(\pi) \sin nx = -\sin nx \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin n(\alpha - \pi) d\alpha,$$

$$G_2(n) = -p'(\pi) \cos nx = -\cos nx \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos n(\alpha - \pi) d\alpha,$$

$$G_3\left(n + \frac{1}{2}\right) = -p'(\pi) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha - \pi) d\alpha,$$

$$G_4\left(n + \frac{1}{2}\right) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)p(\pi) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \\ = -\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha - \pi) d\alpha,$$

oder kurz, da die Funktionen G entweder gerade oder ungerade sind,

$$G_1(\pm n) = \pm \sin nx \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha,$$

$$G_2(\pm n) = \pm \cos nx \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha,$$

(3)

$$G_3\left(\pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) = \pm \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha d\alpha,$$

$$G_4\left(\pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) = \pm \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha d\alpha.$$

Nun sind $\varrho = \pm n$ die Nullstellen der Nenner von u und v , $\varrho = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)$ diejenigen der Nenner von w und s , und alle diese Nullstellen sind, abgesehen von $\varrho = 0$, von der ersten Ordnung; verschwindet also z. B. $G_1(n)$, so ist der betreffende Wert von n sowie auch $-n$ nur scheinbar eine

singuläre Stelle von u , und Entsprechendes gilt, wenn eine der anderen Größen (3) verschwindet, während x ein beliebiger der Werte von 0 bis π sein kann. Bestehen alle Gleichungen

$$G_1(n) = 0,$$

so hat u überhaupt keine Singularität für endliche Werte von ϱ , ist also eine ganze Funktion; das analoge Resultat ist für v , w und s leicht auszusprechen, wobei zu beachten ist, daß, wie bemerkt, die Funktion v ihren doppelten Pol $\varrho = 0$ unter der Bedingung $G_2(0) = 0$ verliert. Man erhält somit folgendes Resultat:

Besteht eine der vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha &= 0, & \int_0^\pi f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha &= 0, \\ \int_0^\pi f(\alpha) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \, d\alpha &= 0, & \int_0^\pi f(\alpha) \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \, d\alpha &= 0 \end{aligned}$$

für alle nicht negativen ganzen Werte von n , so ist im ersten Falle u , im zweiten v , im dritten w , im vierten s eine ganze Funktion von ϱ , und zwar für alle dem Intervall von 0 bis π angehörigen Werte von x .

§ 2.

Der Fall, daß alle Koeffizienten einer Fourierschen Reihe verschwinden.

Ist eine der Funktionen u , v , w , s ganz, so muß, wie wir zeigen wollen, die Funktion $f(x)$ identisch verschwinden.

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß in den Ausdrücken u , v , w , s Zähler und Nenner immer zugleich gerade oder ungerade Funktionen von ϱ sind, daß also irgend eine dieser Größen, etwa u , wenn sie eine ganze Funktion von ϱ ist, in der Form

$$(1) \quad u = u_0 + u_1 \varrho^2 + u_2 \varrho^4 + \dots$$

entwickelt werden kann. Die Koeffizienten u_0, u_1, \dots sind stetige Funktionen von x und haben stetige erste und zweite Ableitungen, da dies von $p(x)$ und den übrigen in den Zählern $G_1(\varrho), \dots$ vorkommenden Funktionen von x gilt; aus der Form des Ausdrucks $p(x)$ ist ferner ersichtlich, daß die Reihe (1) nach x gliedweise differenziert werden darf und, wenn ϱ festgehalten wird, im ganzen Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ gleichmäßig konvergiert.

Substituiert man die angegebene Reihe für u in die Differentialgleichung

$$u'' + \varrho^2 u + f(x) = 0,$$

und setzt die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von ϱ^2 gleich Null, so erhält man

$$(2) \quad u_0'' + f(x) = 0, \quad u_1'' + u_0 = 0, \quad u_2'' + u_1 = 0, \dots$$

Multipliziert man von den hier vorkommenden Formeln

$$u_{m+1}'' + u_m = 0, \quad u_n'' + u_{n-1} = 0$$

die erste mit u_n , die zweite mit u_{m+1} , so ergibt sich

$$(3) \quad \int_0^\pi u_n u_{m+1}'' dx = - \int_0^\pi u_m u_n dx, \quad \int_0^\pi u_{m+1} u_n'' dx = - \int_0^\pi u_{m+1} u_{n-1} dx.$$

Andrerseits erhält man durch zwei partielle Integrationen

$$(4) \quad \int_0^\pi u_n'' u_{m+1} dx = u_{m+1} u_n' - u_{m+1}' u_n \Big|_0^\pi + \int_0^\pi u_n u_{m+1}'' dx,$$

und in allen diesen Formeln kann man den Buchstaben u durch v , w oder s ersetzen, indem man von den Entwicklungen

$$(5) \quad \begin{aligned} v &= v_0 + v_1 \varrho^2 + v_2 \varrho^4 + \dots, \\ w &= w_0 + w_1 \varrho^2 + w_2 \varrho^4 + \dots, \\ s &= s_0 + s_1 \varrho^2 + s_2 \varrho^4 + \dots \end{aligned}$$

ausgeht.

Jetzt bedenken wir, daß für beliebige Werte von ϱ die Gleichungen

$$\begin{aligned} u(0) = u(\pi) = 0, \quad v'(0) = v'(\pi) = 0, \quad w(0) = w'(\pi) = 0, \\ s'(0) = s(\pi) = 0 \end{aligned}$$

bestehen; differenzieren wir dieselben nach ϱ^2 , so folgt, wenn die Entwicklungen (1), (5) vorausgesetzt werden,

$$\begin{aligned} u_v(0) = u_v(\pi) = 0, \quad v_v'(0) = v_v'(\pi) = 0, \\ w_v(0) = w_v(\pi) = 0, \quad s_v'(0) = s_v(\pi) = 0, \end{aligned}$$

woraus man unmittelbar schließt, daß

$$(6) \quad u_{m+1} u_n' - u_n u_{m+1}' \Big|_0^\pi = 0,$$

und daß diese Gleichung richtig bleibt, wenn man u durch v , w oder s ersetzt. Demgemäß ergeben die Formeln (3), (4)

$$\int_0^\pi u_{m+1} u_{n-1} dx = \int_0^\pi u_m u_n dx$$

nebst drei Relationen derselben Form für v , w und s ; das Integral auf der rechten Seite ist also nur von der Summe $m + n$ abhängig und kann demnach durch U_{m+n} bezeichnet werden. Es ist offenbar analog jenem

Integral gebildet, das Schwarz bei der Integration einer partiellen Differentialgleichung eingeführt hat*).

Eine häufig benutzte Argumentation geht dann, indem man unter α, β beliebige reelle Konstante versteht, von der Identität

$$\int_0^\pi (\alpha u_{n+1} + \beta u_{n-1})^2 dx = U_{2n+2} \alpha^2 + 2 U_{2n} \alpha \beta + U_{2n-2} \beta^2$$

aus; da die rechte Seite eine quadratische Form der Argumente α, β ist, die nicht negativ werden kann, so kann ihre Determinante nicht positiv sein, d. h.

$$(7) \quad U_{2n}^2 - U_{2n-2} U_{2n+2} \leq 0.$$

Wäre nun

$$U_{2n} = \int_0^\pi u_n^2 dx = 0,$$

so müßte u_n als stetige Funktion von x in dem ganzen Integrationsintervall verschwinden, woraus sich den Relationen (2) zufolge dasselbe für u_{n-1}, u_{n-2}, \dots und schließlich für u_0 und $f(x)$ ergeben würde. Wenn also $f(x)$ an mindestens einer Stelle des Intervalls von 0 bis π von Null verschieden ist, so sind die Größen U_0, U_2, U_4, \dots sämtlich positiv und die Ungleichung (7) ergibt

$$(8) \quad \frac{U_2}{U_0} \leq \frac{U_4}{U_2} \leq \frac{U_6}{U_4} \leq \dots$$

Von hier aus kommt man leicht zu dem weiteren Resultat, daß u nicht für alle Werte von x in dem Intervall von 0 bis π eine ganze Funktion von ϱ sein kann. Bei dieser Annahme wäre nämlich, da die mit u_0 multiplizierte Reihe (1) von $x=0$ bis $x=\pi$ gliedweise integriert werden darf, auch die Reihe

$$(9) \quad \int_0^\pi dx (u_0^2 + u_0 u_1 \varrho^2 + u_0 u_2 \varrho^4 + \dots) = U_0 + U_1 \varrho^2 + U_2 \varrho^4 + \dots$$

eine ganze Funktion von ϱ und bliebe ganz, wenn man die ungeraden Potenzen von ϱ^2 striche. In der so erhaltenen Reihe sind aber die Quotienten jedes Gliedes durch das vorhergehende

$$\frac{U_2 \varrho^4}{U_0}, \frac{U_4 \varrho^4}{U_2}, \frac{U_6 \varrho^4}{U_4}, \dots$$

also den Relationen (8) zufolge nicht kleiner als der erste von ihnen, der, da U_2 von Null verschieden ist, größer als Eins ist, sobald man für ϱ^2 einen angemessenen positiven Wert nimmt. Die Reihe (9) ist demnach

* Schwarz Abhandlungen I, S. 247.

sicher nicht beständig konvergent, es sei denn, daß alle Größen U_0, U_2, \dots den Wert Null haben, d. h. daß $f(x)$ in dem oben angegebenen Umfange identisch verschwinde.

Berücksichtigt man noch, daß die an die Gleichung (6) geknüpften Schlüsse wie diese selbst gültig bleiben, wenn man den Buchstaben u durch v, w oder s ersetzt, so kann das erhaltene Resultat auf Grund des in § 1 Bewiesenen in folgender Weise ausgesprochen werden:

Ist $f(x)$ eine in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ stetige Funktion und gilt eins der Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha &= 0, & \int_0^\pi f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha &= 0, \\ \int_0^\pi f(\alpha) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \, d\alpha &= 0, & \int_0^\pi f(\alpha) \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \, d\alpha &= 0, \end{aligned}$$

indem man unter n alle positiven ganzen Zahlen oder Null versteht, so hat $f(x)$ in dem bezeichneten Intervall überall den Wert Null.

§ 3.

Gleichmäßige Konvergenz und Summe der Fourierschen Reihe.

Das Resultat des § 2 führt leicht zu dem Satze, daß irgend eine der Reihen

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{2}{\pi} \sum_v^{1, \infty} \sin vx \int_0^\pi f(\alpha) \sin v\alpha \, d\alpha, \\ R_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\alpha) \, d\alpha + \frac{2}{\pi} \sum_v^{1, \infty} \cos vx \int_0^\pi f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha, \\ R_3 &= \frac{2}{\pi} \sum_v^{0, \infty} \sin \left(v + \frac{1}{2}\right) x \int_0^\pi f(\alpha) \sin \left(v + \frac{1}{2}\right) \alpha \, d\alpha, \\ R_4 &= \frac{2}{\pi} \sum_v^{0, \infty} \cos \left(v + \frac{1}{2}\right) x \int_0^\pi f(\alpha) \cos \left(v + \frac{1}{2}\right) \alpha \, d\alpha, \end{aligned}$$

in dem ganzen Intervall von 0 bis π mit $f(x)$ übereinstimmt, sobald sie in diesem Intervall mit Einschluß der Grenzen gleichmäßig konvergiert und demnach eine stetige Funktion von x ist. Dann kann man die entsprechende der Reihen

$$R_1 \sin nx, \quad R_2 \cos nx, \quad R_3 \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x, \quad R_4 \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x$$

gliedweise von 0 bis π integrieren und findet, wenn n und m verschiedene ganze Zahlen sind, mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin nx \sin mx \, dx &= \int_0^\pi \cos nx \cos mx \, dx = \int_0^\pi \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x \, dx \\ &= \int_0^\pi \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x \cos \left(m + \frac{1}{2}\right) x \, dx = 0,\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \sin^2 nx \, dx = \int_0^\pi \cos^2 nx \, dx = \int_0^\pi \sin^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) x \, dx = \int_0^\pi \cos^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

eins der Resultate

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (R_1 - f(x)) \sin nx \, dx &= 0, & \int_0^\pi (R_2 - f(x)) \cos nx \, dx &= 0, \\ \int_0^\pi (R_3 - f(x)) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x \, dx &= 0, & \int_0^\pi (R_4 - f(x)) \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x \, dx &= 0,\end{aligned}$$

womit nach § 2 eine entsprechende der Gleichungen

$$f(x) = R_1, \quad f(x) = R_2, \quad f(x) = R_3, \quad f(x) = R_4$$

bewiesen ist.

Um diese Bemerkungen fruchtbar zu machen, suchen wir Bedingungen, unter denen eine der Reihen R in dem angegebenen Bereiche gleichmäßig konvergiert.

Die Funktion $f(x)$ habe zunächst in dem Intervall von 0 bis π stetige erste und zweite Ableitungen; dann findet man für die Koeffizienten der Reihen R , indem man zweimal partiell integriert, folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha &= -\frac{f(\alpha) \cos n\alpha}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi f'(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha \\ &= -\frac{f(\alpha) \cos n\alpha}{n} + \frac{f'(\alpha) \sin n\alpha}{n^2} \Big|_0^\pi - \frac{1}{n^2} \int_0^\pi f''(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha, \\ \int_0^\pi f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha &= \frac{f(\alpha) \sin n\alpha}{n} \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi f'(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha \\ (1) \qquad &= \frac{f(\alpha) \sin n\alpha}{n} - \frac{f'(\alpha) \cos n\alpha}{n^2} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n^2} \int_0^\pi f''(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(\alpha) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha d\alpha &= - \frac{f(\alpha) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha}{n + \frac{1}{2}} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi f'(\alpha) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha d\alpha \\
&= - \frac{f(\alpha) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha}{n + \frac{1}{2}} + \frac{f'(\alpha) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \Big|_0^\pi \\
&\quad - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \int_0^\pi f''(\alpha) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha d\alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(\alpha) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha d\alpha &= \frac{f(\alpha) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha}{n + \frac{1}{2}} \Big|_0^\pi - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi f'(\alpha) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha d\alpha \\
&= \frac{f(\alpha) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha}{n + \frac{1}{2}} + \frac{f'(\alpha) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \Big|_0^\pi \\
&\quad - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \int_0^\pi f''(\alpha) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha d\alpha.
\end{aligned}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Koeffizienten der Reihe R_1 bei der Annahme

$$f(0) = f(\pi) = 0$$

die Gestalt

$$\frac{\Psi}{n^2}$$

haben, wobei Ψ zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen verbleibt; dasselbe gilt demnach auch von den Gliedern der Reihe R_1 , welche somit, wie der Vergleich mit der Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

lehrt, unbedingt und gleichmäßig konvergiert. Ähnliche Schlüsse macht man für die Reihe R_2 ohne irgend eine Voraussetzung betreffs der Werte $f(0)$ und $f(\pi)$, für R_3 bei der Annahme

$$f(0) = 0,$$

und für R_4 bei der Annahme

$$f(\pi) = 0;$$

damit ist nach den zu Anfang dieses Paragraphen gemachten Bemerkungen folgender Satz bewiesen:

Ist die Funktion $f(x)$ nebst ihrer ersten und zweiten Ableitung in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ stetig, so gilt für dieses die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) d\alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu}^{1, \infty} \cos \nu x \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos \nu \alpha d\alpha;$$

wird ferner vorausgesetzt

$$f(0) = f(\pi) = 0,$$

so ist

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu}^{1, \infty} \sin \nu x \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin \nu \alpha d\alpha;$$

endlich hat man bei der Annahme

$$f(0) = 0$$

die Gleichung

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu}^{0, \infty} \sin \left(\nu + \frac{1}{2} \right) x \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \alpha d\alpha$$

und bei der Annahme

$$f(\pi) = 0$$

die Entwicklung

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu}^{0, \infty} \cos \left(\nu + \frac{1}{2} \right) x \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \alpha d\alpha.$$

In jeder dieser vier Gleichungen konvergiert bei der zugehörigen Voraussetzung die rechte Seite von $x = 0$ bis $x = \pi$ gleichmäßig und absolut.

Die Darstellung einer stetigen mit stetiger erster und zweiter Ableitung versehenen periodischen Funktion $f(x)$ durch die nach Cosinus und Sinus fortschreitende Reihe ergibt sich jetzt sehr leicht; hat man nämlich

$$F(x + 2\pi) = F(x), \quad F(-\pi) = F(+\pi),$$

so setze man

$$f(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2};$$

dann ist

$$f(0) = f(\pi) = 0, \quad f(-x) = -f(x),$$

und unser Satz gibt für $f(x)$ eine Reihe R_1 , welche auch für das Intervall von $-\pi$ bis 0 gilt. Setzt man ferner

$$g(x) = \frac{F(x) + F(-x)}{2}$$

sodaß

$$g(-x) = g(x),$$

so erhält man für $g(x)$ eine von $-\pi$ bis $+\pi$ geltende Cosinusreihe, woraus sich vermittelt der Gleichung

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

das gesuchte Resultat ergibt.

So einfach und im einzelnen bekannt diese Entwicklungen sind, schien es mir doch von Interesse, die Theorie der Fourierschen Reihe unter Voraussetzungen, die in sehr vielen Anwendungen ausreichen, ohne jene feineren Betrachtungen zu entwickeln, die das Wesen des von Dirichlet gegebenen Konvergenzbeweises ausmachen und auch in den auf dem zweiten Mittelwertsatze beruhenden Beweisen implizite enthalten sind. Allerdings sind unsere Voraussetzungen keineswegs bei allen Anwendungen zulässig; man denke nur an die Theorie der gezupften Saite*), bei welcher Unstetigkeiten von $f'(x)$ auftreten, und an die harmonische Analyse in der Wechselstromtechnik**), bei welcher unstetige Funktionen $f(x)$ darzustellen sind.

§ 4.

Allgemeinere Bedingungen der Konvergenz.

Wir sagen im Anschluß an Poincaré, eine Funktion sei der Dirichletschen Bedingung unterworfen, wenn sie als Differenz zweier monotoner Funktionen dargestellt werden kann, d. h. zweier Funktionen, deren jede entweder nicht zunimmt oder nicht abnimmt. Speziell genügt, wie man leicht sieht***), eine Funktion der Dirichletschen Bedingung, wenn sie nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten und Extremen aufweist, wie es Dirichlet selbst in seiner klassischen Abhandlung über die Fouriersche Reihe voraussetzt. Übrigens hat jede der Dirichletschen Bedingung unterworfenen Funktion eine beschränkte Schwankung und umgekehrt; ferner ist jede solche Funktion integrierbar†).

Es seien nun $F(x)$ eine monotone Funktion, φ , ξ , η Konstante, ξ_1 , η_1 Werte zwischen ξ und η ; dann gibt der zweite Mittelwertsatz die Formeln

*) Helmholtz, Vorlesungen über Akustik § 35.

**) Perry (Fricke-Süchting) Analysis für Ingenieure § 134.

***) Picard, Traité d'analyse I, Kap. 9, Nr. 13.

†) Jordan, Cours d'analyse, 2. Aufl., I, Nr. 67—72. Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur Nr. 37.

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\eta} F(\alpha) \sin \varrho \alpha d\alpha &= F(\xi) \int_{\xi}^{\xi_1} \sin \varrho \alpha d\alpha + F(\eta) \int_{\xi_1}^{\eta} \sin \varrho \alpha d\alpha \\ &= \frac{F(\xi)[\cos \varrho \xi - \cos \varrho \xi_1] + F(\eta)[\cos \varrho \xi_1 - \cos \varrho \eta]}{\varrho}, \\ \int_{\xi}^{\eta} F(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha &= \frac{F(\xi)(\sin \varrho \eta_1 - \sin \varrho \xi) + F(\eta)(\sin \varrho \eta - \sin \varrho \eta_1)}{\varrho}; \end{aligned}$$

man kann also setzen

$$\int_{\xi}^{\eta} F(\alpha) \sin \varrho \alpha d\alpha = \frac{\Psi_0}{\varrho}, \quad \int_{\xi}^{\eta} F(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha = \frac{\Psi_1}{\varrho},$$

wobei Ψ_0 und Ψ_1 absolut kleiner sind als das Vierfache des größten absoluten Betrages der Funktion $F(x)$. Daraus folgen unmittelbar, wenn $f(x)$ eine von $x = \xi$ bis $x = \eta$ der Dirichletschen Bedingung unterworfenen Funktion ist, die Gleichungen

$$\int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) \sin \varrho \alpha d\alpha = \frac{\Psi_2}{\varrho}, \quad \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha = \frac{\Psi_3}{\varrho},$$

in denen ebenfalls die Größen Ψ zwischen endlichen, von ϱ unabhängigen Grenzen liegen; sie sind als Differenzen zweier Größen Ψ_0 oder Ψ_1 dem absoluten Betrage nach kleiner als das Achtfache des größten absoluten Betrages der beiden monotonen Funktionen, deren Differenz $f(x)$ ist.

Hat $f(x)$ die bezeichnete Eigenschaft in einem größeren, die Werte ξ und η umfassenden Intervall J , in welchem wir uns ξ und η veränderlich denken, so können die Größen Ψ in Grenzen eingeschlossen werden, die von ϱ , ξ und η unabhängig sind; denn diese Grenzen können in der angegebenen Weise durch die größten absoluten Beträge der im Intervall J monotonen Funktionen ausgedrückt werden, deren Differenz $f(x)$ ist, also durch Werte, die offenbar von ξ und η nicht abhängen. Hiervon wird in den späteren Abschnitten vielfach Gebrauch gemacht.

Auf Grund dieser Bemerkungen zeigen die Formeln (1) des § 3, wenn man nach der ersten partiellen Integration stehen bleibt, daß die Reihen R_1, R_2, R_3, R_4 schon dann absolut und gleichmäßig konvergieren, wenn die übrigen Voraussetzungen des § 3 für $f(x)$ festgehalten werden, hinsichtlich der Ableitungen aber nur festgesetzt wird, daß $f'(x)$ der Dirichletschen Bedingung genüge, während die zweite Ableitung nicht einmal zu existieren braucht; denn für jede der vier Reihen ergibt sich das allgemeine Glied in der Form

$$\frac{\Psi}{n^2},$$

wobei Ψ zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen liegt. Der Satz des § 3 bleibt also richtig, wenn unter $f(x)$ nur eine von $x = 0$ bis $x = \pi$ stetige Funktion verstanden wird, die eine der Dirichletschen Bedingung unterworfenen erste Ableitung besitzt.

Hiermit dürfte die Theorie der Fourierschen Reihe für alle Anwendungen, bei denen keine unstetigen Funktionen darzustellen sind, in genügendem Umfange begründet sein.

§ 5.

Rückblick auf die Dirichletsche Theorie.

Um aber unsre Untersuchung so allgemein wie möglich gestalten zu können, müssen wir auf den Grundgedanken des Dirichletschen Beweises zurückgehen, den man für jede einzelne der vier Reihen R mit geringer Modifikation durchführen könnte, da sich bei ihnen allen die ersten n Glieder in ähnlicher Weise wie bei der gewöhnlichen Fourierschen Reihe summieren lassen. Noch bequemer ist es, diese Reihen als spezielle Fälle der gewöhnlichen Fourierschen Reihe aufzufassen, was nach einfachen Substitutionen auch bei R_3 und R_4 möglich ist.

Die Funktion $f(x)$ genüge auf der Strecke von $x = -\pi$ bis $x = +\pi$ der Dirichletschen Bedingung; daraus folgt*), daß sie bei der Annäherung an eine Unstetigkeitsstelle von links oder rechts her bestimmten Grenzen zustrebt, die wie gewöhnlich durch $f(x-0)$ und $f(x+0)$ bezeichnet werden mögen. Sie sei ferner periodisch mit der Periode 2π , sodaß allgemein

$$f(x+2\pi+0) = f(x+0), \quad f(x+2\pi-0) = f(x-0)$$

gesetzt werden kann. Wenn nun vorausgesetzt wird

$$-\pi \leq x \leq +\pi, \quad -\pi \leq g < h \leq \pi,$$

und die Reihe

$$\frac{1}{2\pi} \int_g^h f(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_v^{1,\infty} \cos vx \int_g^h f(\alpha) \cos v\alpha d\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_v^{1,\infty} \sin vx \int_g^h f(\alpha) \sin v\alpha d\alpha$$

durch $R^{g,h}$ oder nötigenfalls durch $R(x)^{g,h}$ bezeichnet wird, so können die wichtigsten Ergebnisse der Dirichletschen Theorie in folgender Form ausgesprochen werden:

I. Wenn $f(x)$ überall stetig ist, konvergiert $R^{-\pi,\pi}$ auf jeder endlichen Strecke gleichmäßig**).

*) Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Nr. 37.

**) Picard, Traité d'analyse I, S. 239.

II. Wenn

so ist

$$x > g, \quad x - g < 2\pi,$$

$$R^{g,x} = \frac{1}{2} f(x-0);$$

wenn dagegen

$$x < h, \quad h - x < 2\pi,$$

so ist

$$R^{x,h} = \frac{1}{2} f(x+0).$$

III. Wenn entweder

$$x < g, \quad h - x < 2\pi,$$

oder

$$x > h, \quad x - g < 2\pi,$$

d. h. wenn x außerhalb der Strecke von g bis h liegt und von keinem ihrer Punkte den Abstand 2π hat, so ist

$$R^{g,h} = 0.$$

Um diese Eigenschaften, soweit es geht, auf die Reihen R_1, \dots, R_4 zu übertragen, werde jetzt unter $f(x)$ eine Funktion verstanden, die nur im Intervall von $x=0$ bis $x=\pi$ gegeben ist und der Dirichletschen Bedingung genügt, und werde angenommen

$$0 \leq g < h \leq \pi, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Ferner sei $R_v^{g,h}$ die Reihe, welche aus R_v entsteht, wenn man im Koeffizienten jedes Gliedes die Integrationsgrenzen 0 und π durch g und h ersetzt; genauer werde die so erhaltene Reihe durch $R_v(x)^{g,h}$ bezeichnet. Für negative Argumente werde $f(x)$ in verschiedener Weise definiert.

1) Es werde festgesetzt

$$(1) \quad f(-x) = -f(x), \quad f(x+2\pi) = f(x);$$

dann gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_g^h f(\alpha) \sin \nu \alpha d\alpha &= - \int_{-g}^{-h} f(\alpha) \sin \nu \alpha d\alpha, \\ \int_g^h f(\alpha) \cos \nu \alpha d\alpha &= \int_{-g}^{-h} f(\alpha) \cos \nu \alpha d\alpha, \end{aligned}$$

und aus ihnen folgt sofort

$$(2) \quad R_1^{g,h} = R^{g,h} - R^{-g,-h}.$$

Nun ist die durch die Gleichungen (1) definierte erweiterte Funktion $f(x)$ im allgemeinen an den Stellen $x=0$ und $x=\pm\pi$ unstetig; unter der besonderen Voraussetzung

$$f(0) = f(\pi) = 0$$

fallen jedoch diese Unstetigkeiten weg, und wenn $f(x)$ außerdem von $x = 0$ bis $x = \pi$ stetig ist, so zeigt die Eigenschaft I kombiniert mit der Gleichung (2), in der man $g = 0$ und $h = \pi$ setzt, daß die Reihe $R_1^{0,\pi}$ in dem bezeichneten Intervall gleichmäßig konvergiert.

Wenn ferner

$$\pi > x > g \geq 0,$$

so ist

$$x - g < 2\pi, \quad x - (-x) < 2\pi;$$

in der Eigenschaft II können also x und g , in der Eigenschaft III die Werte $-x$ und $-g$ für g und h genommen werden und man findet

$$R^{g,x} = \frac{1}{2} f(x - 0), \quad R^{-g,-x} = 0,$$

also

$$(3) \quad R_1^{g,x} = \frac{1}{2} f(x - 0).$$

Ebenso ergibt sich, wenn

$$\pi \geq h > x > 0$$

ist, die der Formel (3) analoge

$$(4) \quad R_1^{x,h} = \frac{1}{2} f(x + 0).$$

Endlich gilt nach III bei einer der Annahmen

$$0 \leq x < g, \quad \pi \geq x > h$$

die Gleichung

$$(5) \quad R_1^{g,h} = 0,$$

da x außerhalb der Intervalle von g bis h und von $-g$ bis $-h$ liegt, und von keinem ihrer Punkte den Abstand 2π hat.

2) Erweitert man die Definition von $f(x)$ durch die Gleichungen

$$f(-x) = f(x), \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

so findet man leicht

$$\begin{aligned} \int_g^h f(\alpha) \sin \nu \alpha d\alpha &= \int_{-g}^{-h} f(\alpha) \sin \nu \alpha d\alpha, \\ \int_g^h f(\alpha) \cos \nu \alpha d\alpha &= -\int_{-g}^{-h} f(\alpha) \cos \nu \alpha d\alpha, \end{aligned}$$

und hieraus

$$(6) \quad R^{g,h} - R^{-g,-h} = R_2^{g,h} = \frac{1}{\pi} \int_g^h f(\alpha) d\alpha + \sum_{\nu} \frac{2}{\pi} \cos \nu x \int_g^h f(\alpha) \cos \nu \alpha d\alpha.$$

Dabei ist die erweiterte Funktion von $x = g$ bis $x = h$ stetig, wenn dies von der ursprünglichen gilt; die Eigenschaft I ergibt also daß die Reihe $R_2^{0,\pi}$ von $x = 0$ bis $x = \pi$ gleichmäßig konvergiert, wenn $f(x)$ auf dieser Strecke stetig ist.

Man findet ferner aus der Gleichung (6) genau wie unter 1) die Gleichungen (3), (4), (5), in denen R_2 für R_1 gesetzt ist, unter den dort ausgesprochenen Voraussetzungen.

3) Um ähnliche Entwicklungen für die Reihe R_3 durchführen zu können, werde

$$f(2x) = \bar{f}(x)$$

gesetzt, sodaß \bar{f} zunächst nur von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$ gegeben ist; in weiterem Umfang definieren wir durch die Gleichungen

$$(7) \quad \bar{f}(\pi - x) = \bar{f}(x), \quad \bar{f}(-x) = -\bar{f}(x),$$

aus denen die Periodizität

$$\bar{f}(x + 2\pi) = \bar{f}(x)$$

folgt, sodaß \bar{f} unter 1) für f gesetzt und zur Bildung einer Reihe R_1 benutzt werden kann, die wir durch \bar{R}_1 bezeichnen. Nun findet man leicht aus der ersten Gleichung (7)

$$\begin{aligned} \int_g^h \bar{f}(\alpha) \sin 2\nu \alpha d\alpha &= \int_{\pi-g}^{\pi-h} \bar{f}(\alpha) \sin 2\nu \alpha d\alpha, \\ \int_g^h \bar{f}(\alpha) \sin (2\nu + 1) \alpha d\alpha &= - \int_{\pi-g}^{\pi-h} \bar{f}(\alpha) \sin (2\nu + 1) \alpha d\alpha, \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \bar{R}_1^{g,h} - \bar{R}_1^{\pi-g, \pi-h} &= \sum_{\nu}^{0, \infty} \frac{4}{\pi} \sin (2\nu + 1) x \int_g^h \bar{f}(\alpha) \sin (2\nu + 1) \alpha d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu}^{0, \infty} \sin (2\nu + 1) x \int_{\frac{2}{2}g}^{2h} f(\alpha) \sin \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \alpha d\alpha \\ &= R_3(2x)^{2g, 2h}, \end{aligned}$$

oder auch

$$(8) \quad \bar{R}_1 \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{2}g, \frac{1}{2}h} - \bar{R}_1 \left(\frac{x}{2} \right)^{\pi - \frac{1}{2}g, \pi - \frac{1}{2}h} = R_3^{g,h}.$$

Diese Gleichung ergibt bei einer der Voraussetzungen

$$(9) \quad \pi > x > g \geq 0, \quad \pi \geq h > x > 0,$$

da dann $\frac{x}{2}$ außerhalb der Strecke von $\pi - \frac{1}{2}h$ bis $\pi - \frac{1}{2}g$ liegt, also der Gleichung (5) zufolge

$$\bar{R}_1 \left(\frac{x}{2} \right)^{\pi - \frac{1}{2}g, \pi - \frac{1}{2}h} = 0$$

ist, die einfachere Formel

$$R_3^{g,h} = \bar{R}_1 \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{2}g, \frac{1}{2}h},$$

und die Gleichungen (3), (4) zeigen sofort, je nachdem die erste oder zweite Voraussetzung (9) gilt,

$$R_3^{g,x} = \frac{1}{2} \bar{f} \left(\frac{x}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} f(x-0)$$

oder

$$R_3^{x,h} = \frac{1}{2} \bar{f} \left(\frac{x}{2} + 0 \right) = \frac{1}{2} f(x+0).$$

Ferner erhält man, wenn eine der Ungleichungen

$$0 \leq x < g, \quad \pi \geq x > h$$

gilt, aus der Gleichung (8), da in beiden Fällen auch

$$\frac{x}{2} < \pi - \frac{1}{2} h < \pi - \frac{1}{2} g$$

ist, die Folgerung

$$R_3^{g,h} = 0.$$

Damit sind auch für R_3 Gleichungen von derselben Form wie (3), (4), (5) unter denselben Voraussetzungen nachgewiesen.

Was endlich die Eigenschaft I betrifft, so ist davon auszugehen, daß $\bar{f}(x)$ im allgemeinen an der Stelle $x=0$ unstetig ist, und daß diese Unstetigkeit wegfällt bei der Annahme

$$(10) \quad f(0) = 0;$$

die an der Stelle $x=\pi$ erscheinende Unstetigkeit von $\bar{f}(x)$ braucht nicht beachtet zu werden, da auf der linken Seite der Gleichung (8) nur $\bar{f}\left(\frac{x}{2}\right)$ vorkommt. Die Eigenschaft I ergibt also bei der Voraussetzung (10) und wenn $f(x)$ von $x=0$ bis $x=\pi$ stetig ist, daß die Reihe $R_3^{0,\pi}$ auf dieser Strecke gleichmäßig konvergiert.

4) Die Reihe R_4 bedarf keiner besonderen Betrachtung; denn die Identität

$$\begin{aligned} & \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x \int_g^h f(\alpha) \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \alpha d\alpha \\ &= \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (\pi - x) \int_{\pi-g}^{\pi-h} f(\pi - \alpha) \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \alpha d\alpha \end{aligned}$$

zeigt, daß die mit der Funktion $f(\pi-x)$ gebildete Reihe $R_4^{\pi-g, \pi-h}$ mit der früher betrachteten $R_3^{g,h}$ identisch ist. Man sieht hieraus leicht, daß die für R_3 erhaltenen Resultate auch für R_4 gelten mit der einen Modifikation, daß in der Gleichung (10) die linke Seite durch $f(\pi)$ ersetzt wird.

Die ganze Entwicklung dieses Paragraphen ergibt, daß Verschiedenheiten bei den Reihen R_n nur da auftreten, wo es sich um die Eigenschaft I und ihre Ausdehnung handelt; die bei der Reihe R_1 in den

Gleichungen (3), (4), (5) ausgedrückten Eigenschaften kommen unter genau denselben Voraussetzungen auch bei den übrigen Reihen vor. Führt man jetzt die neuen Bezeichnungen

$$z = \frac{xZ}{\pi}, \quad f\left(\frac{\pi z}{Z}\right) = \varphi(z), \quad \xi = \frac{gZ}{\pi}, \quad \eta = \frac{hZ}{\pi}$$

ein, so entsprechen den Intervallen von $x=0$ bis $x=\pi$ und von $x=g$ bis $x=h$ die Strecken von $z=0$ bis $z=Z$ und von $z=\xi$ bis $z=\eta$, in deren erster $\varphi(z)$ der Dirichletschen Bedingung genügt, und die Reihen $R_\nu^{g,h}$ werden, wenn man nach wachsenden Werten von ν ordnet:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{1,\infty} \sin \frac{\nu \pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \frac{\nu \pi \alpha}{Z} d\alpha, \\ & \frac{1}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) d\alpha + \frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{1,\infty} \cos \frac{\nu \pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \frac{\nu \pi \alpha}{Z} d\alpha, \\ & \frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{0,\infty} \sin \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi \alpha}{Z} d\alpha, \\ & \frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{0,\infty} \cos \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi \alpha}{Z} d\alpha; \end{aligned}$$

bezeichnet man daher eine dieser Reihen durch $R^{\xi,\eta}$, so zeigen die erwähnten gemeinsamen Resultate bei der stets geltenden Voraussetzung

$$0 \leq \xi < \eta \leq Z$$

folgendes. Wenn eine der Annahmen

$$Z > z > \xi, \quad \eta > z > 0$$

gemacht wird, so folgt die entsprechende der Gleichungen

$$R^{\xi,z} = \frac{1}{2} \varphi(z-0), \quad R^{z,\eta} = \frac{1}{2} \varphi(z+0);$$

Wenn dagegen eine der Beziehungen

$$0 \leq z < \xi, \quad Z \geq z > \eta$$

gilt, so ist

$$R^{\xi,\eta} = 0.$$

Gleichmäßig konvergent ist die Reihe $R^{0,Z}$ von $z=0$ bis $z=Z$, wenn $\varphi(z)$ in diesem Intervall stetig ist, und bei der ersten Reihe $\varphi(0)$ und $\varphi(Z)$, bei der dritten $\varphi(0)!$, bei der vierten $\varphi(Z)$ verschwindet.

II. Die Darstellung willkürlicher Funktionen beim Problem der radial abkühlenden Kugel.

§ 6.

Modifikation des § 2.

Beim Problem der Wärmebewegung in einer Kugel, deren Temperatur in jeder mit der Oberfläche konzentrischen Kugelschicht konstant ist, wird*) folgende analytische Aufgabe gestellt. Es soll eine im Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ willkürlich gegebene Funktion $f(x)$ in eine Reihe

$$(1) \quad f(x) = \sum_{\nu}^{0, \infty} a_{\nu} \sin \varrho_{\nu} x$$

entwickelt werden, wenn $\varrho_0, \varrho_1, \dots$ die positiven Wurzeln der Gleichung

$$(2) \quad H \sin \varrho \pi + \varrho \cos \varrho \pi = 0$$

sind, in welcher H eine positive Konstante bedeutet. Dabei erscheint die Funktion $f(x)$ in der speziellen Form

$$f(x) = x F(x),$$

und $F(x)$ ist, wenn der Radius durch passende Wahl der Längeneinheit $= \pi$ gemacht wird, die Anfangstemperatur der untersuchten Kugel als Funktion des Abstandes vom Mittelpunkt, also eine im Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ endliche stetige Funktion von x , sodaß es für die Aufgabe der Wärmelehre genügt, stetige Funktionen $f(x)$ zu betrachten, für welche

$$f(0) = 0.$$

Daß nun eine konvergente Entwicklung (1) unter angemessenen Voraussetzungen hinsichtlich der Funktion $f(x)$ möglich ist, läßt sich durch eine ähnliche Schlußreihe wie die im Abschnitt I für die Fouriersche Reihe benutzte ableiten.

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß der Gleichung (2) zufolge, wenn man V für $\sin \varrho x$ setzt, die Relationen

$$\frac{dV}{dx} + HV \Big|_{\pi} = 0, \quad V|_0 = 0$$

gelten, während V die Gleichung

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \varrho^2 V = 0$$

erfüllt, und bestimmen u als Integral der Gleichung

$$u'' + \varrho^2 u + f(x) = 0$$

*) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen II, § 52 ff.

bei willkürlichen Werten von ϱ durch die Anfangsbedingungen

$$(3) \quad u|_0 = 0, \quad u' + Hu|^\pi = 0.$$

Man hat dann, indem man unter $p(x)$ dieselbe Größe wie in § 1, unter A und B Konstante versteht, den Ausdruck

$$u = p(x) + A \sin \varrho x + B \cos \varrho x;$$

da nun

$$p(0) = p'(\pi) = 0,$$

so ergeben die Gleichungen (3)

$$B = 0, \quad p'(\pi) + Hp(\pi) + A(\varrho \cos \varrho \pi + H \sin \varrho \pi) = 0,$$

und wenn man

$$\bar{\omega}(\varrho) = \varrho \cos \varrho \pi + H \sin \varrho \pi$$

setzt, so erhält man:

$$u = \frac{p(x)(\varrho \cos \varrho \pi + H \sin \varrho \pi) - \sin \varrho x (p'(\pi) + Hp(\pi))}{\bar{\omega}(\varrho)}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist, wie der explizite Ausdruck $p(x)$ zeigt, eine ganze Funktion von ϱ , die mit ϱ verschwindet, und durch $G(\varrho)$ bezeichnet werde. Der Nenner hat die Nullstellen 0 und $\pm \varrho_v$, deren erste, da sie einfach ist und $G(0)$ verschwindet, keine Singularität verursacht. Die übrigen sind ebenfalls einfach*), und man findet sofort

$$G(\pm \varrho_v) = \pm \sin \varrho_v x (p'(\pi) + Hp(\pi))|_{\varrho=\varrho_v};$$

da ferner allgemein

$$\begin{aligned} p'(\pi) + Hp(\pi) &= \frac{1}{\varrho} \int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho \alpha (H \cos \varrho \pi - \varrho \sin \varrho \pi) d\alpha \\ &\quad - \frac{1}{\varrho} \int_0^\pi f(\alpha) \cos \varrho \alpha (\varrho \cos \varrho \pi + H \sin \varrho \pi) d\alpha, \end{aligned}$$

und für $\varrho = \varrho_v$

$$p'(\pi) + Hp(\pi) = \frac{H \cos \varrho_v \pi - \varrho_v \sin \varrho_v \pi}{\varrho_v} \int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_v \alpha d\alpha,$$

so ist

$$G(\pm \varrho_v) = 0,$$

sobald

$$(4) \quad \int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_v \alpha d\alpha = 0.$$

Gilt also diese Gleichung für alle ganzen Zahlen v , so ist u eine

*) Riemann-Weber II, § 53.

ganze Funktion von ϱ für alle dem Intervall von 0 bis π angehörigen Werte von x , und man kann in der Form

$$u = u_0 + u_1 \varrho^2 + u_2 \varrho^4 + \dots$$

entwickeln, da allgemein

$$G(\varrho) = -G(-\varrho), \quad \overline{w}(\varrho) = -\overline{w}(-\varrho),$$

also u eine gerade Funktion von ϱ ist.

Die Koeffizienten haben, wenn $f(x)$ eine stetige Funktion ist, dieselben Stetigkeitseigenschaften wie die ebenso bezeichneten Größen in § 2, und man erhält wie dort die Rekursionsformeln

$$u''_0 + f(x) = 0, \quad u''_{v+1} + u_v = 0.$$

Die Anfangsbedingungen (3) ergeben ferner

$$u_v|_0 = 0, \quad u'_v + H u_v|^\pi = 0,$$

sodaß jedenfalls die Gleichungen (6) des § 2 gelten, d. h.

$$u_{m+1} u'_n - u'_{m+1} u_n|_0^\pi = 0.$$

Aus diesen aber folgt mit genau denselben Schlüssen wie in § 2, daß u nur dann eine ganze Funktion von ϱ sein kann, wenn $f(x)$ in dem ganzen Intervall von $x=0$ bis $x=\pi$ verschwindet. Kombiniert man dieses Resultat mit der oben gefundenen Bedeutung der Gleichungen (4), so erhält man folgenden Satz.

Ist $f(x)$ eine in dem Intervall von $x=0$ bis $x=\pi$ stetige Funktion und bestehen alle Gleichungen

$$\int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_v \alpha d\alpha = 0,$$

in denen ϱ_v irgend eine positive Wurzel der mit einer positiven Konstanten H gebildeten Gleichung

$$\varrho \cos \varrho \pi + H \sin \varrho \pi = 0$$

ist, so hat $f(x)$ in dem bezeichneten Intervall überall den Wert Null.

Die Funktion u , die beim Beweis dieses Resultat benutzt wurde, ist im wesentlichen mit der von Cauchy eingeführten meromorphen Hilfsfunktion identisch.

§ 7.

Die Möglichkeit der Entwicklung.

Auf die gesuchte Entwicklung

$$(1) \quad f(x) = \sum_v^{0, \infty} a_v \sin \varrho_v x.$$

kann man, wenn die Reihe von $x = 0$ bis $x = \pi$ gleichmäßig konvergiert und die Entwicklung überhaupt möglich ist, die bekannte Fouriersche Argumentation anwenden, welche die Koeffizienten kennen lehrt. Es gilt nämlich, wenn μ und ν verschiedene ganze Zahlen sind, die Gleichung*)

$$\int_0^{\pi} \sin \varrho_{\nu} \alpha \sin \varrho_{\mu} \alpha d\alpha = 0;$$

aus dieser folgt, da bei den eingeführten Annahmen in der Gleichung (1), auch nachdem man mit $\sin \varrho_{\nu} x$ multipliziert hat, gliedweise integriert werden darf,

$$a_{\nu} \int_0^{\pi} \sin^2 \varrho_{\nu} \alpha d\alpha = \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin \varrho_{\nu} \alpha d\alpha.$$

Bildet man nun umgekehrt mit den hierdurch definierten Größen a_{ν} die Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{\nu}^{0, \infty} a_{\nu} \sin \varrho_{\nu} x,$$

und gelingt es, die Funktion $f(x)$ so zu beschränken, daß diese Reihe von $x = 0$ bis $x = \pi$ gleichmäßig konvergiert, so ist $\varphi(x)$ jedenfalls eine in dem bezeichneten Intervall stetige Funktion von x ; man findet wie oben

$$a_{\nu} \int_0^{\pi} \sin^2 \varrho_{\nu} \alpha d\alpha = \int_0^{\pi} \varphi(\alpha) \sin \varrho_{\nu} \alpha d\alpha,$$

also

$$\int_0^{\pi} (f(\alpha) - \varphi(\alpha)) \sin \varrho_{\nu} \alpha d\alpha = 0,$$

und nach § 6 ergibt sich die gewünschte Gleichung

$$f(x) = \varphi(x)$$

für die ganze Strecke von 0 bis π . Damit ist die Richtung der weiteren Untersuchung gegeben; sie weicht von der analogen im Abschnitt I hauptsächlich deshalb ab, weil die Größen ϱ_{ν} weniger einfache Werte haben als die dort an der entsprechenden Stelle erscheinenden Konstanten.

Wir beginnen mit der schon von Fourier gemachten Bemerkung**), daß man

$$(2) \quad \varrho_{\nu} = \nu + \frac{1}{2} + \varepsilon_{\nu}$$

setzen kann, wobei

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_{\nu} = 0.$$

*) Riemann-Weber II, § 54.

**) Riemann-Weber II, § 53.

Trägt man diese Werte in die Gleichung

$$\bar{\omega}(\varrho_\nu) = 0$$

ein, so findet man

$$\operatorname{tg} \varepsilon_\nu \pi = \frac{H}{\nu + \frac{1}{2} + \varepsilon_\nu}$$

und erhält den Ausdruck

$$(3) \quad \varepsilon_\nu = \frac{e_\nu}{\nu},$$

in welchem alle Größen e_ν zwischen endlichen von ν unabhängigen Grenzen liegen.

Man findet ferner leicht*)

$$\int_0^\pi \sin^2 \varrho_\nu \alpha \, d\alpha = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2H}{\pi(\varrho_\nu^2 + H^2)} \right),$$

und die Gleichungen (2), (3) ergeben

$$1 : \int_0^\pi \sin^2 \varrho_\nu \alpha \, d\alpha = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{m_\nu}{\nu^2} \right),$$

wobei durch m_ν Größen von derselben Beschaffenheit wie e_ν bezeichnet werden; hieraus folgt

$$(4) \quad a_\nu = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{m_\nu}{\nu^2} \right) \int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha.$$

Nimmt man nun an, $f(x)$ habe in dem betrachteten Intervall stetige erste und zweite Ableitungen, und es sei gemäß den Anforderungen des Wärmeleitungsproblems

$$f(0) = 0,$$

so erhält man durch partielle Integration die Formel

$$\int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha = - \frac{f(\alpha) \cos \varrho_\nu \alpha}{\varrho_\nu} + \frac{f'(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha}{\varrho_\nu^2} \Big|_0^\pi - \frac{1}{\varrho_\nu^2} \int_0^\pi f''(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha$$

oder, da die Gleichung

$$\cos \varrho_\nu \pi = - \frac{H \sin \varrho_\nu \pi}{\varrho_\nu},$$

gilt,

$$\int_0^\pi f(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha = \frac{[Hf(\pi) + f'(\pi)] \sin \varrho_\nu \pi}{\varrho_\nu^2} - \frac{1}{\varrho_\nu^2} \int_0^\pi f''(\alpha) \sin \varrho_\nu \alpha \, d\alpha.$$

*) Riemann-Weber II, § 54.

Das Integral auf der rechten Seite liegt dem absoluten Werte nach unter einer leicht angebbaren Konstanten; mit Berücksichtigung der Formeln (2), (4) kann man also setzen

$$a_\nu = \frac{q_\nu}{\nu^2},$$

wobei q_ν zwischen endlichen von ν unabhängigen Grenzen verbleibt. Daraus ist aber unmittelbar ersichtlich, daß die Reihe

$$\sum a_\nu \sin \varrho_\nu x$$

unter den eingeführten Voraussetzungen nicht nur in dem gewünschten Umfange gleichmäßig, sondern auch absolut konvergiert; denn ihre Glieder sind absolut kleiner als die entsprechenden der mit einer gewissen positiven Konstanten multiplizierten Reihe

$$\sum \frac{1}{\nu^2}.$$

Erinnert man sich jetzt der an die Fouriersche Argumentation geknüpften Bemerkungen, so sieht man, daß folgender Satz bewiesen ist: *Eine Funktion $f(x)$, die in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = \pi$ mit ihrer ersten und zweiten Ableitung stetig ist und für $x = 0$ verschwindet, kann stets in eine für das bezeichnete Intervall gleichmäßig konvergierende Reihe*

$$f(x) = \sum_{\nu}^{0, \infty} a_\nu \sin \varrho_\nu x$$

entwickelt werden, wenn die Größen ϱ_ν durch die Gleichung

$$\varrho_\nu \cos \varrho_\nu \pi + H \sin \varrho_\nu \pi = 0$$

definiert sind, und H eine positive Konstante bedeutet.

Allgemeinere Bedingungen, unter denen die hier untersuchte Entwicklung willkürlicher Funktionen möglich ist, ergeben sich aus § 16.

III. Die Sturm-Liouvillesche Darstellung willkürlicher Funktionen.

§ 8.

Zur Geschichte des Problems.

Nach den allgemeinen Sturm-Liouvilleschen Normalfunktionen V_ν hat man eine willkürliche Funktion z. B. beim Problem der Abkühlung eines heterogenen geradlinigen Stabes zu entwickeln. Erstreckt dieser sich längs der Abszissenachse von $x = 0$ bis $x = X$ und ist g die spezifische Wärme,

k die innere Leitfähigkeit, l das Strahlungsvermögen, t die Zeit, so genügt die Temperatur u der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \quad g \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - lu,$$

und den Grenzbedingungen

$$(2) \quad \begin{aligned} k \frac{\partial u}{\partial x} - hu \Big|_{x=0} &= 0, \\ k \frac{\partial u}{\partial x} + Hu \Big|_{x=X} &= 0, \end{aligned}$$

in denen h und H die Werte der äußeren Leitfähigkeit in den Endquerschnitten, also positive Konstante bedeuten. Von hier aus kommt man zu den von t unabhängigen Funktionen V und der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{d}{dx} \left(k \frac{dV}{dx} \right) + (gr - l)V = 0$$

durch die Substitution

$$u = Ve^{-rt},$$

wobei r eine Konstante ist, und die Grenzbedingungen (2) die Gleichung

$$\overline{\omega}(r) = 0$$

ergeben, deren Wurzeln r_1, r_2, \dots den einzelnen Normalfunktionen V_1, V_2, \dots entsprechen. Die willkürliche Funktion $f(x)$, welche in die Reihe

$$(4) \quad f(x) = \sum A_r V_r$$

entwickelt werden muß, ist die Temperatur zur Zeit $t = 0$.

Dasselbe analytische Problem tritt bei verschiedenen Fragen der mathematischen Physik auf; als ein besonders eleganter Fall sei Kirchhoffs Theorie der Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand erwähnt*), bei welcher k und g Konstante, h und H beide positiv sind und l identisch verschwindet, sodaß die Normalfunktionen trigonometrische werden.

Daß eine solche Darstellung (4) möglich ist, beweist Stekloff**) in einer schönen Abhandlung unter der Voraussetzung, daß die Funktion $f(x)$ stetige erste und zweite Ableitungen besitzt und den Gleichungen

$$(5) \quad k(0)f'(0) - hf(0) = 0, \quad k(X)f'(X) + Hf(X) = 0$$

genügt. Diese den Gleichungen (2) analogen Beschränkungen sind der Natur des Problems angemessen z. B. bei den Schwingungen einer heterogenen Saite, welche ebenfalls auf die Gleichung (3) führen; man hat hier, wenn die Saite in den Punkten $x=0$ und $x=X$ befestigt ist,

$$h = H = \infty$$

*) Kirchhoff, Abhandlungen III, S. 82. Wiedemanns Annalen Bd. 21, 1884.

**) Problème de refroidissement d'une barre hétérogène, Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) III.

zu setzen und, da $f(x)$ die Anfangsgestalt der Saite bestimmt, von vornherein nur solche Funktionen zu betrachten, die für $x = 0$ und $x = X$ verschwinden. Anders liegt die Sache bei dem Problem der Wärmeleitung. Hier bilden die Gleichungen (5) eine wesentliche und vom physikalischen Standpunkt wohl durchaus willkürlich erscheinende Beschränkung, durch welche z. B. der Fall einer konstanten Anfangstemperatur ausgeschlossen wird.

Allerdings gibt Stekloff auch für eine den Bedingungen (5) nicht unterworfenen Funktion eine Darstellung, die z. B., wenn k konstant, etwa gleich Eins ist, die Form

$$(6) \quad f(x) = A + Bx + \sum_v A_v V_v$$

hat. Eine solche Entwicklung ist aber für das Wärmeleitungsproblem nicht zu gebrauchen; denn bei diesem leitet man aus der Reihe (4) ein Integral der partiellen Differentialgleichung (1) in der Form

$$u = \sum e^{-r_v t} V_v$$

her, welches den Anfangsbedingungen genügt. Nun könnte man versuchen, aus der Reihe (6) in analoger Weise ein Integral

$$u = A\varphi(t) + Bx\psi(t) + \sum_v A_v e^{-r_v t} V_v$$

zu bilden, welches, wenn

$$(7) \quad \varphi(0) = \psi(0) = 1$$

ist, für $t = 0$ in die Anfangstemperatur $f(x)$ übergeht. Aber die Gleichung (1) würde, da die einzelnen Glieder

$$e^{-r_v t} V_v$$

partikuläre Integrale sind, ergeben

$$g(A\varphi'(t) + Bx\psi'(t)) = -l(A\varphi(t) + Bx\psi(t)),$$

also wenn man $t = 0$ setzte und die Gleichungen (7) benutzte,

$$g(A\varphi'(0) + Bx\psi'(0)) = -l(A + Bx).$$

Die Größen A und B verschwinden aber nach der von Stekloff gegebenen Bestimmung*) nicht beide; wenn die Gleichungen (5) nicht gelten; die erhaltene Gleichung würde also eine ganz besondere analytische Beziehung zwischen den Funktionen g und l fordern, und kann daher im allgemeinen nicht als richtig angesehen werden. Ob auf eine andere Weise die Entwicklung (6) mit besserem Erfolg für die Wärmeleitungsaufgabe zu verwenden ist, lasse ich dahingestellt.

Mit Rücksicht auf diese Verhältnisse und darauf, daß Liouville selbst die Beschränkung (5) ausdrücklich für unzulässig erklärt**), darf

*) a. a. O. S. 313, Gleichungen (51).

**) Journal de math. (1) II, S. 419.

wohl behauptet werden, daß diejenige Darstellung willkürlicher Funktionen durch die Normalfunktionen, mit welcher sich Sturm und Liouville beschäftigt haben, noch nicht als möglich und konvergent nachgewiesen ist. Dieses Ziel hoffe ich auf den folgenden Blättern zu erreichen, indem ich die in den ersten Abschnitten auf spezielle Fragen angewandten Methoden mit Entwicklungen kombiniere, die Liouville in der bewundernswerten dritten Abhandlung*) über unsern Gegenstand gegeben hat.

§ 9.

Die Cauchysche Hilfsfunktion.

Das Intervall von $x = 0$ bis $x = X$, dem wir stets seine Grenzen zurechnen, heiße J ; in ihm seien k, g, l stetige mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehene Funktionen von x , die ersten beiden positiv und die dritte nicht negativ; r sei eine Konstante und w_1, w_2 zwei voneinander unabhängige Lösungen der Gleichung

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left(k \frac{dy}{dx} \right) + (gr - l)y = 0$$

die auf eine von r unabhängige Weise, etwa durch die Anfangswerte

$$(2) \quad w_1(0) = w_2'(0) = 0, \quad w_1'(0) = w_2(0) = 1$$

bestimmt seien. Sie sind in dem Intervall J mit ihren ersten Ableitungen endlich und stetig, da dies in der Gleichung (1) von den Koeffizienten der Größen y und y' gilt, wenn man den Faktor von y'' auf den Wert 1 bringt. Anders wäre es, wenn k an einzelnen Stellen des Intervalls J verschwände, und hierauf beruht es, daß die Entwicklung nach Besselschen Funktionen besondere Methoden erfordert.

Die Integrale w_1, w_2 können ferner**) in beständig konvergente Potenzreihen des Arguments r entwickelt werden, deren Koeffizienten in dem Intervall J dieselben Stetigkeitseigenschaften wie die Integrale selbst besitzen, und die zitierte Argumentation von Picard zeigt, daß die Reihen w_1, w_2 bei festem r hinsichtlich der Variablen x im Intervall J gleichmäßig konvergieren. Ebenso sind auch w_1' und w_2' ganze Funktionen von r , die aus w_1 und w_2 entstehen, indem man die nach Potenzen von r geordneten Ausdrücke gliedweise differenziert. Schreibt man nämlich die Gleichung (1) in der Form

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

*) Journal de math. (1) II, S. 418.

**) Picard, Traité d'analyse III, S. 92.

so folgt, indem man die Gleichungen (2) benutzt,

$$w_1' - 1 = -Pw_1 \Big|_0^x + \int_0^x (P' - Q) w_1 dx.$$

Hieraus sieht man zunächst, daß w_1' eine ganze Funktion von r ist, und da das Integral einer im Gebiet J gleichmäßig konvergenten Reihe, wenn man von 0 bis x integriert und x demselben Gebiet angehört, ebenfalls gleichmäßig konvergiert, kann man w_1' gliedweise integrieren, um w_1 zu erhalten, womit das Behauptete erwiesen ist. Analoge Schlüsse gelten offenbar für w_2 .

Die der Gleichung (1) zugehörigen Normalfunktionen V , seien nun durch die Gleichungen

$$(3) \quad k \frac{dV}{dx} - hV \Big|_0^x = k \frac{dV}{dx} + HV \Big|^x = 0$$

definiert, in denen h, H Konstante bedeuten; wir schließen auch den Fall nicht aus, daß h und H oder eine dieser Größen den Wert ∞ annimmt d. h. daß eine der Gleichungen (3) oder beide in die Form

$$(4) \quad V \Big|_0^x = 0, \quad V \Big|^x = 0$$

übergehen. Dann bilden wir die Cauchysche Hilfsfunktion, d. h. dasjenige Integral der Gleichung

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \left(k \frac{dS}{dx} \right) + (gr - l)S + f(x) = 0,$$

welches für V gesetzt den für die Normalfunktionen charakteristischen Grenzbedingungen (3) oder (4) genügt.

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß, wenn $f(x)$ eine beliebige auf der Strecke J stetige Funktion ist, die Gleichung (5) zunächst das Integral

$$p(x) = w_1 \int_0^x \frac{w_2 f(x) dx}{\Delta} - w_2 \int_0^x \frac{w_1 f(x) dx}{\Delta},$$

hat, wobei

$$\Delta = w_1 w_2' - w_2 w_1'$$

gesetzt ist; die Gleichungen (2) ergeben nach bekannten Schlüssen

$$\Delta = \frac{\text{const.}}{k} = \frac{k(0)}{k},$$

und es ist offenbar

$$p(0) = p'(0) = 0.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (5) kann aber in der Form

$$S = p(x) + C_1 w_1 + C_2 w_2$$

geschrieben werden, wobei C_1 und C_2 von x unabhängige Größen sind;

bei endlichen Werten von h und H ergeben sich also aus den Grenzbedingungen die Gleichungen

$$(6) \quad \begin{aligned} C_1(kw_1' - hw_1) + C_2(kw_2' - hw_2)|^0 &= 0, \\ C_1(kw_1' + Hw_1) + C_2(kw_2' + Hw_2)|^x &= -p'k - Hp|^x. \end{aligned}$$

Ist einer der Werte h , H oder beide unendlich, so treten eine der folgenden oder beide an Stelle der hingeschriebenen:

$$(7) \quad \begin{aligned} C_1w_1 + C_2w_2|^0 &= C_2 = 0, \\ C_1w_1 + C_2w_2|^x &= -p(X). \end{aligned}$$

In jedem Falle ist die Determinante der Koeffizienten von C_1 und C_2 in den beiden Gleichungen ebenso wie w_1 , w_2 , w_1' , w_2' eine ganze Funktion von r , die wir $\varpi(r)$ nennen; da nun auch p als Funktion von r dieselbe Beschaffenheit hat, so kann man

$$(8) \quad S = \frac{W}{\varpi(r)}$$

setzen, und W ist eine ganze Funktion von r , die nach x ebenso wie w_1 und w_2 gliedweise differenziert werden darf, und die ebenso wie S den für die Normalfunktionen charakteristischen Grenzbedingungen genügt.

Die hier auftretende Größe $\varpi(r)$ ist für die Theorie der Normalfunktionen von fundamentaler Bedeutung: man erhält nämlich die Gleichung

$$(9) \quad \varpi(r) = 0,$$

wenn man zum Ausdruck bringt, daß die Größe $C_1w_1 + C_2w_2$ den Grenzbedingungen (3) oder (4) genügen soll; damit fordert man Gleichungen, die aus den Systemen (6), (7) hervorgehen, indem man in der zweiten Gleichung auf der rechten Seite Null schreibt. Die Gleichung (9) definiert also diejenigen Werte r_v , welche für r gesetzt die Gleichung (1) in die Differentialgleichung der Normalfunktion V_v überführen. Von diesen verschwindet keine identisch, da man für C_1 und C_2 stets Werte erhalten kann, die den bezeichneten Gleichungen genügen und nicht beide den Wert Null haben, w_1 und w_2 aber linear unabhängige Integrale sind. Hieraus folgt weiter*), daß die Gleichung (9) nur einfache Wurzeln besitzt. Die Größe S hat daher als Funktion von r an Singularitäten nur einfache Pole, und diese an keinen andern Stellen als $r = r_v$.

Nun folgt aus der Differentialgleichung (5), wenn man den Ausdruck (8) einsetzt, unmittelbar

$$(10) \quad \frac{d}{dx} \left(k \frac{dW}{dx} \right) + (gr - l) W + f(x) \varpi(r) = 0;$$

*) Jordan, Cours d'analyse III, Nr. 307.

für den speziellen Wert $r = r_v$ genügt daher W , da $\bar{\omega}(r_v)$ verschwindet, derselben Differentialgleichung wie die Normalfunktion V_v . Außerdem gelten für W und V_v dieselben Anfangsbedingungen; aus der auf den Wert $x = 0$ bezüglichen folgt somit

$$W(r_v) = C_v V_v,$$

wobei C_v eine Konstante ist, die möglicherweise auch den Wert Null haben kann.

Allgemein kann man ihren Wert finden, indem man die Gleichung (10) mit V_n multipliziert und über die Strecke J integriert; man erhält so

$$\int_0^x V_n \frac{d}{dx} \left(k \frac{dW}{dx} \right) dx + \int_0^x W V_n (rg - l) dx + \bar{\omega}(r) \int_0^x f(x) V_n dx = 0.$$

Durch zwei partielle Integrationen findet man aber

$$\begin{aligned} \int_0^x V_n \frac{d}{dx} \left(k \frac{dW}{dx} \right) dx &= k V_n \frac{dW}{dx} \Big|_0^x - \int_0^x k \frac{dV_n}{dx} \frac{dW}{dx} dx \\ &= k \left(V_n \frac{dW}{dx} - W \frac{dV_n}{dx} \right) \Big|_0^x + \int_0^x W \frac{d}{dx} \left(k \frac{dV_n}{dx} \right) dx, \end{aligned}$$

und der vor dem Integralzeichen stehende Ausdruck verschwindet stets wegen der den Funktionen W und V_n gemeinsam auferlegten Grenzbedingungen; somit ergibt sich

$$\int_0^x W \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{dV_n}{dx} \right) + (rg - l) V_n \right] dx + \bar{\omega}(r) \int_0^x f(x) V_n dx = 0,$$

oder, da V_n der Gleichung (1) genügt, wenn man in ihr r_n für r schreibt,

$$(r - r_n) \int_0^x g W V_n dx + \bar{\omega}(r) \int_0^x f(x) V_n dx = 0.$$

Differenziert man nach r und setzt dann $r = r_n$, womit W in $C_n V_n$ übergeht, so erhält man schließlich die Gleichung

$$\frac{C_n}{\bar{\omega}'(r_n)} \int_0^x g V_n^2 dx + \int_0^x f(x) V_n dx = 0,$$

in welcher der Nenner des ersten Gliedes stets von Null verschieden ist.

Aus diesem Resultat ist ersichtlich, daß C_v verschwindet, sobald

$$(11) \quad \int_0^x f(x) V_v dx = 0;$$

dann verschwindet also auch die Größe

$$W(r_v) = C_v V_v,$$

und da r_v eine einfache Nullstelle im Nenner des Bruches

$$S = \frac{W}{\bar{w}(r)}$$

ist, so sieht man: wenn die Gleichung (11) für alle positiven ganzen Zahlen v gilt, so ist S eine ganze Funktion von r ; ein Satz, der seinem wesentlichen Inhalt nach auch bei Stekloff vorkommt.

§ 10.

Der Fall, daß die Cauchysche Hilfsfunktion ganz ist.

Der ursprüngliche Ausdruck

$$S = p(x) + C_1 w_1 + C_2 w_2 = \frac{W}{\bar{w}(r)}$$

zeigt, daß wenn man den Zähler nach Potenzen von r entwickelt, als Koeffizienten stetige mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehene Funktionen von x erscheinen. Dasselbe gilt, da der Nenner $\bar{w}(r)$ von x unabhängig ist, von den Koeffizienten, wenn S für jeden dem Intervall J angehörigen Wert von x in eine beständig konvergente Potenzreihe des Arguments r entwickelt werden kann; es sei etwa

$$S = s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \dots$$

Dann kann man ebenso, wie in § 9 auf Grund eines Satzes von Picard betreffs der Reihen w_1 und w_2 bemerkt wurde, auch hier gliedweise nach x differenzieren und die Reihe konvergiert bei festem r hinsichtlich der Variablen x im Intervall J gleichmäßig. Die Differentialgleichung (5) des § 9 kann daher in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[k \left(\frac{ds_0}{dx} + r \frac{ds_1}{dx} + r^2 \frac{ds_2}{dx} + \dots \right) \right] \\ & + (gr - l) (s_0 + s_1 r + \dots) + f(x) = 0; \end{aligned}$$

sie ergibt, indem man die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von r gleich Null setzt, die Formeln

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{d}{dx} \left(k \frac{ds_0}{dx} \right) - ls_0 + f(x) = 0, \\ & \frac{d}{dx} \left(k \frac{ds_1}{dx} \right) - ls_1 + gs_0 = 0, \\ & \frac{d}{dx} \left(k \frac{ds_2}{dx} \right) - ls_2 + gs_1 = 0, \end{aligned}$$

allgemein

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \left(k \frac{ds_{v+1}}{dx} \right) - ls_{v+1} + gs_v = 0.$$

Da ferner die Größe S den r nicht enthaltenden Grenzbedingungen

$$k \frac{dS}{dx} - hS \Big|_0 = 0, \quad k \frac{dS}{dx} + HS \Big|^X = 0$$

oder

$$S \Big|_0 = 0, \quad S \Big|^X = 0$$

genügt, so gilt dasselbe für jede Größe s_r ; daraus folgt, wenn m und n beliebige ganze Zahlen sind

$$(3) \quad s_{m+1} \frac{ds_n}{dx} - s_n \frac{ds_{m+1}}{dx} \Big|_0^X = s_{m+1} \frac{ds_n}{dx} - s_n \frac{ds_{m+1}}{dx} \Big|^X = 0.$$

Multipliziert man die Gleichung (2), indem man $\nu = n - 1$ oder $\nu = m$ setzt, mit s_{m+1} im ersten, und mit s_n im zweiten Falle und integriert über das Intervall J , so ergibt sich

$$(4) \quad \int_0^X s_{m+1} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{ds_n}{dx} \right) - l s_n + g s_{n-1} \right] dx = 0,$$

$$\int_0^X s_n \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{ds_{m+1}}{dx} \right) - l s_{m+1} + g s_m \right] dx = 0.$$

Man erhält nun, indem man zweimal partiell integriert,

$$\begin{aligned} \int_0^X s_{m+1} \frac{d}{dx} \left(k \frac{ds_n}{dx} \right) dx &= k s_{m+1} \frac{ds_n}{dx} \Big|_0^X - \int_0^X k \frac{ds_n}{dx} \frac{ds_{m+1}}{dx} dx \\ &= k \left(s_{m+1} \frac{ds_n}{dx} - s_n \frac{ds_{m+1}}{dx} \right) \Big|_0^X + \int_0^X s_n \frac{d}{dx} \left(k \frac{ds_{m+1}}{dx} \right) dx, \end{aligned}$$

oder den Beziehungen (3) zufolge

$$\int_0^X s_{m+1} \frac{d}{dx} \left(k \frac{ds_n}{dx} \right) dx = \int_0^X s_n \frac{d}{dx} \left(k \frac{ds_{m+1}}{dx} \right) dx;$$

demgemäß ergeben die Gleichungen (4) sofort

$$\int_0^X g v_{m+1} v_{n-1} dx = \int_0^X g v_m v_n dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite hängt also nur von der Summe der Indices m, n ab und kann durch W_{m+n} bezeichnet werden.

Speziell hat man

$$W_{2\nu+2} = \int_0^X g s_{\nu+1}^2 dx, \quad W_{2\nu-2} = \int_0^X g s_{\nu-1}^2 dx, \quad W_{2\nu} = \int_0^X g s_{\nu-1} s_{\nu+1} dx,$$

und keine dieser Größen kann negativ sein, da g im Integrationsgebiet positiv ist. Aus eben diesem Grunde kann die Größe

$$\int_0^x g(\alpha s_{\nu-1} + \beta s_{\nu+1})^2 dx = W_{2\nu-2} \alpha^2 + 2W_{2\nu} \alpha \beta + W_{2\nu+2} \beta^2$$

nicht negativ sein, wie immer die reellen Größen α und β gewählt sein mögen; es gilt daher die Ungleichung

$$W_{2\nu}^2 - W_{2\nu-2} W_{2\nu+2} \leq 0.$$

Hieraus folgt, daß die Größen W mit geradem Index entweder alle verschwinden oder alle positiv sind; denn keine von ihnen ist negativ und $W_{2\nu}$ verschwindet sowohl mit $W_{2\nu-2}$ wie mit $W_{2\nu+2}$ zugleich. Ist also W_0 von Null verschieden, so ergibt die letzte Ungleichung

$$(5) \quad \frac{W_2}{W_0} \leq \frac{W_4}{W_2} \leq \frac{W_6}{W_4} \leq \dots$$

Diese Beziehungen führen aber, wie man leicht sieht, zu einem Widerspruch, wenn man annimmt, die Reihe S oder $s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \dots$ sei beständig konvergent, wenn x ein beliebiger Wert des Intervalls J ist. Dann würde nämlich dasselbe von dem Produkt

$$S s_0 = s_0 (s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \dots)$$

und, da S bei festem r im Intervall J gleichmäßig konvergiert, von der Reihe

$$\int_0^x s_0 (s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \dots) dx = W_0 + W_1 r + W_2 r^2 + \dots$$

gelten, endlich auch von derjenigen, die übrig bleibt, wenn man in der letzten Gleichung rechts die ungeraden Potenzen von r streicht. Die so erhaltene Reihe kann aber nicht beständig konvergieren, da die Quotienten eines jeden ihrer Glieder durch das vorhergehende die Größen

$$\frac{W_2}{W_0} r, \quad \frac{W_4}{W_2} r, \dots$$

sind, welche den Beziehungen (5) zufolge größer als Eins sind, sobald r einen hinreichend großen reellen Wert annimmt.

Die Größe S ist daher nur dann eine ganze Funktion von r , wenn

$$W_0 = \int_0^x g s_0^2 dx = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber für das ganze Gebiet J , in welchem s_0 stetig und g positiv ist,

$$s_0 = 0$$

und hieraus vermittelt der Gleichung (1)

$$f(x) = 0.$$

Erinnert man sich nun des in § 9 erhaltenen Resultats, so sieht man, daß folgender Satz bewiesen ist:

Wenn $f(x)$ eine im Intervall von $x = 0$ bis $x = X$ stetige Funktion und so beschaffen ist, daß alle Gleichungen

$$\int_0^x f(x) V_\nu dx = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

bestehen, in denen V_ν die in § 9 definierten Normalfunktionen sind, so verschwindet $f(x)$ in dem ganzen bezeichneten Intervall.

Diesen Satz haben Sturm und Liouville für Funktionen mit einer endlichen Anzahl von Nullstellen bewiesen; wir brauchen ihn aber in der vorliegenden allgemeinen Form, da er auf Funktionen angewandt wird, von denen wir nur wissen, daß sie stetig sind.

§ 11.

Die transformierten Normalfunktionen nach Liouville.

Das erhaltene Resultat führt ähnlich wie das analoge in den Abschnitten I und II zu dem gewünschten Endziel, wenn gezeigt werden kann, daß unter gewissen Bedingungen die zur Darstellung willkürlicher Funktionen angesetzte Reihe gleichmäßig konvergiert. Das gelingt in der Tat vermittelt einer Reihe von Umformungen, die sich im wesentlichen schon bei Liouville vorfinden.

Wir transformieren zunächst die Gleichung

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left(k \frac{dV}{dx} \right) + (gr - l) V = 0$$

durch die Substitutionen

$$z = \int_0^x \sqrt{\frac{g}{k}} dx, \quad U = V \sqrt{gk},$$

und setzen

$$r = \varrho^2, \quad \theta = \sqrt[4]{gk}, \quad Z = \int_0^x \sqrt{\frac{g}{k}} dx,$$

$$\lambda = \frac{1}{\theta \sqrt{gk}} \left\{ \theta l \sqrt{\frac{k}{g}} - \frac{d\theta}{dz} \frac{d\sqrt{gk}}{dz} - \frac{d^2\theta}{dz^2} \sqrt{gk} \right\};$$

die hierbei auftretenden Nenner verschwinden niemals, da wir g und k in dem Intervall J als positiv voraussetzen; λ bleibt daher endlich und

hat, wenn g, k, l endliche und stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung einschließlich besitzen, endliche Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung auf der Strecke von $z=0$ bis $z=Z$, die wir wiederum durch J bezeichnen wollen. Die Differentialgleichung (1) wird jetzt offenbar

$$(2) \quad \frac{d^2 U}{dz^2} + (\varrho^2 - \lambda) U = 0,$$

und die Grenzbedingungen, welche die Normalfunktionen charakterisieren, nehmen die Gestalt

$$(3) \quad \frac{dU}{dz} - h'U \Big|_0 = 0, \quad \frac{dU}{dz} + H'U \Big|^Z = 0$$

an, wobei die Konstanten h', H' zugleich mit h und H endlich, aber nicht notwendig positiv sind. Der Fall, daß von den Werten h und H mindestens einer unendlich ist, werde zunächst ausgeschlossen und muß besonders behandelt werden (§§ 15—17).

Die Gleichung (2) ist nun mit jeder der folgenden gleichbedeutend:

$$\begin{aligned} d \left(\sin \varrho z \frac{dU}{dz} - \varrho U \cos \varrho z \right) &= \lambda U \sin \varrho z dz, \\ d \left(\cos \varrho z \frac{dU}{dz} + \varrho U \sin \varrho z \right) &= \lambda U \cos \varrho z dz. \end{aligned}$$

Aus ihnen folgt, indem man durch A, B Konstante, durch z' eine Integrationsvariable bezeichnet, die für z gesetzt U und λ in U' und λ' überführe,

$$(4) \quad \begin{aligned} \sin \varrho z \frac{dU}{dz} - \varrho U \cos \varrho z &= A + \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho z' dz', \\ \cos \varrho z \frac{dU}{dz} + \varrho U \sin \varrho z &= B + \int_0^z \lambda' U' \cos \varrho z' dz'. \end{aligned}$$

Setzt man speziell $z=0$, so ergibt sich

$$A = -\varrho U \Big|_0^0, \quad B = \frac{dU}{dz} \Big|_0^0,$$

also der ersten Gleichung (3) zufolge

$$B = -\frac{h'A}{\varrho}.$$

Macht man daher die Annahme

$$(5) \quad U \Big|_0^0 = 1,$$

die erlaubt ist, da die Bedingungen (3) die Normalfunktionen nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmen, $U \Big|_0^0$ aber bei endlichen h und h' nur verschwinden könnte, wenn U identisch gleich Null wäre, was nach § 9 ausgeschlossen ist, so folgt

$$A = -\varrho, \quad B = h'.$$

Mit diesen Werten ergeben die Gleichungen (4)

$$\begin{aligned}\sin \varrho z \frac{dU}{dz} - \varrho \cos \varrho z U &= -\varrho + \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho z' dz', \\ \cos \varrho z \frac{dU}{dz} + \varrho \sin \varrho z U &= h' + \int_0^z \lambda' U' \cos \varrho z' dz',\end{aligned}$$

und indem man $\frac{dU}{dz}$ eliminiert, erhält man

$$(6) \quad U = \cos \varrho z + \frac{h' \sin \varrho z}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho (z - z') dz',$$

wobei ersichtlich die zweite der Gleichungen (3) nicht benutzt ist. Eine Ausnahme würde diese Formel nur dann erleiden, wenn $\varrho = 0$ einer der Werte wäre, zu denen Normalfunktionen gehören, was möglich ist und z. B. beim Problem der Diffusion von Gasen vorkommt.

Das erhaltene Resultat gibt über das Wertgebiet, das die Größe U durchlaufen kann, Aufschluß. Denn ist Q das Maximum ihres absoluten Betrages auf der Strecke J , so ist die rechte Seite der Gleichung (6) dem absoluten Betrage nach nicht größer als

$$\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2} + \frac{Q}{\varrho} \int_0^z |\lambda'| dz',$$

und da die stetige Funktion U an mindestens einer Stelle das Maximum ihres absoluten Betrages erreicht, folgt hieraus

$$(7) \quad Q \leq \sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2} + \frac{Q}{\varrho} \int_0^z |\lambda'| dz'.$$

Sobald nun ϱ eine gewisse positive Grenze überschritten hat, wird der Faktor von Q auf der rechten Seite kleiner als Eins, die Differenz

$$1 - \frac{1}{\varrho} \int_0^z |\lambda'| dz'$$

also positiv, und man kann aus der Ungleichung (7) oder der gleichwertigen

$$Q \left(1 - \frac{1}{\varrho} \int_0^z |\lambda'| dz'\right) \leq \sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2}$$

schließen, daß Q , sobald ϱ eine gewisse Grenze g überschritten hat, z. B. kleiner als 2 ist, U also zwischen $+2$ und -2 liegt. Unterhalb irgend

einer festen Grenze gibt es aber nur eine endliche Anzahl von Wurzeln der Gleichung

$$\bar{\omega}(r) = \bar{\omega}(\varrho^2) = 0,$$

für deren jede $|U|$ ein endliches Maximum besitzt; daraus ist ersichtlich daß es endliche von ϱ unabhängige Grenzen gibt, zwischen denen alle Größen U verbleiben, die durch die erste Gleichung (3) und die Voraussetzung (5) bestimmt sind, speziell also auch die durch die drei Gleichungen (3), (5) charakterisierten Normalfunktionen. Dies gilt, wovon wir im Abschnitt IV Gebrauch machen, auch für $H = \infty$, d. h. für den Fall, daß die zweite charakteristische Grenzbedingung der Normalfunktionen in der Form

$$U|_Z = 0$$

angesetzt wird; denn H ist bisher noch nicht in den benutzten Formeln vorgekommen.

Um die Normalfunktionen in den jetzt eingeführten Variablen genauer untersuchen zu können, werde der Ausdruck (6) für U in die zweite Gleichung (3) eingeführt; dann erhält man mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \dot{P} &= h' + H' + \int_0^Z \lambda' U' \left(\cos \varrho z' - \frac{H' \sin \varrho z'}{\varrho} \right) dz', \\ P' &= \frac{h' H'}{\varrho} + \int_0^Z \lambda' U' \left(\sin \varrho z' + \frac{H' \cos \varrho z'}{\varrho} \right) dz' \end{aligned}$$

die Gleichung

$$(8) \quad \begin{aligned} (\varrho - P') \sin \varrho Z - P \cos \varrho Z &= 0, \\ \operatorname{tg} \varrho Z &= \frac{P}{\varrho - P'}, \end{aligned}$$

die auf der bei willkürlichen Werten von ϱ geltenden Identität

$$(9) \quad \frac{dU}{dz} + H' U = (\varrho - P') \sin \varrho Z - P \cos \varrho Z$$

beruht. Aus dieser ersieht man zunächst wiederum, daß die Gleichung (8) keine Wurzeln besitzt, denen nur identisch verschwindende Normalfunktionen entsprechen; denn durch die Gleichungen

$$U|_0 = 1, \quad \frac{dU}{dz} - h' U|_0 = 0$$

wird jedenfalls bei willkürlichen Werten von ϱ ein nicht identisch verschwindendes Integral definiert, welches als stetige Funktion von z über das ganze Intervall J fortgesetzt werden kann. Ein solches ist, wie die Identität (9) zeigt, eine Normalfunktion, sobald für ϱ eine beliebige Wurzel der Gleichung (8) gesetzt wird.

Die zweite Form der Gleichung (8) zeigt ferner, daß jede ihrer positiven Wurzeln, die oberhalb einer gewissen Grenze liegt, die Form

$$\frac{n\pi}{Z} + \varepsilon_n$$

haben muß, wobei n eine ganze Zahl ist und ε_n mit $\frac{1}{n}$ zugleich unendlich abnimmt. Die zugehörige Normalfunktion fällt der Gleichung (6) zufolge annähernd mit $\cos \varrho z$ oder auch mit $\cos \frac{n\pi z}{Z}$ zusammen, verschwindet also im Intervall J genau n -mal. Nun entsprechen aber nach der Theorie von Sturm*) die Normalfunktionen den nach zunehmender Größe geordneten Wurzeln der Gleichung $\varpi(r) = 0$ in der Weise, daß die erste Normalfunktion im Intervall J gar nicht verschwindet, jede folgende aber einmal mehr als die vorhergehende; der Wurzel

$$\varrho = \frac{n\pi}{Z} + \varepsilon_n$$

entspricht also die $(n+1)^{\text{te}}$ Normalfunktion U_{n+1} , woraus zugleich folgt, daß jeder nicht negativen Zahl n eine einzige Wurzel dieser Form zugeordnet werden kann. Dies ergibt auch eine im wesentlichen von Liouville**) durchgeführte direkte Diskussion der Gleichung (8), bei der die expliziten Ausdrücke von P und P' benutzt werden.

Setzt man endlich den obigen Wert für ϱ in die Gleichung (8) ein, so ergibt sich

$$\text{tang}(n\pi + \varepsilon_n Z) = \text{tg } \varepsilon_n Z = \frac{P}{\frac{n\pi}{Z} + P' + \varepsilon_n}$$

oder

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_n Z}{\pi n \text{tg } \varepsilon_n Z} (P - (P' + \varepsilon_n) \text{tg } \varepsilon_n Z).$$

Da nun die mit n multiplizierte rechte Seite zwischen endlichen von n unabhängigen Grenzen verbleibt, und das Verhältnis $\varrho : n$ einer festen endlichen Grenze zustrebt, kann man setzen

$$\varepsilon_n = \frac{B}{\varrho}, \quad \varrho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B}{\varrho}$$

oder genauer

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B}{\varrho_{n+1}},$$

wobei B zwischen endlichen, von n und ϱ unabhängigen Grenzen liegt.

*) Journal de math. (1) I, S. 141.

**) Journal de math. (1) II, S. 424.

Hieraus folgt, indem man durch B^0 und B^1 Größen von derselben Beschaffenheit wie B bezeichnet,

$$(10) \quad \cos \varrho z = \cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{B^0}{\varrho} \sin \frac{n\pi z}{Z} + \frac{B^1}{\varrho^2},$$

und es ist

$$B^0 = \varrho \sin \frac{Bz}{\varrho}.$$

§ 12.

Erster Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz.

Nach diesen Vorbereitungen beginnen wir die Untersuchung der mit einer willkürlichen Funktion $f(x)$ gebildeten Reihe

$$\sum_v^{1, \infty} \frac{V_v \int_0^x g f(x) V_v dx}{\int_0^x g V_v^2 dx},$$

von der wir unter angemessenen Voraussetzungen zeigen wollen, daß sie die Funktion $f(x)$ darstellt, und gehen davon aus, daß die Beziehungen zwischen x, z, V, U nach § 11 ergeben

$$\int_0^x g f(x) V_v dx = \int_0^z U_v(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha, \quad \int_0^x g V_v^2 dx = \int_0^z U_v^2(\alpha) d\alpha,$$

wobei das Funktionszeichen φ durch die Gleichungen

$$\varphi(z) = f(x) \sqrt[4]{gk}, \quad z = \int_0^x \sqrt{\frac{g}{k}} dx$$

definiert sei. Hat $f(x)$ stetige erste und zweite Ableitungen, so gilt dasselbe von $\varphi(z)$ bei den in § 11 betreffs der Funktionen g, k, l gemachten Voraussetzungen.

Die obige Reihe geht, mit $\sqrt[4]{gk}$ multipliziert, in die folgende über:

$$(1) \quad R = \sum_v^{1, \infty} \frac{U_v \int_0^z U_v(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha}{\int_0^z U_v^2(\alpha) d\alpha},$$

die, wie wir zeigen wollen, den Wert $\varphi(z)$ hat.

Um dieses Ziel zunächst einmal in der einfachsten Weise zu erreichen, ohne daß die größte Allgemeinheit für die Funktion $f(x)$ an-

gestrebt würde, gehen wir davon aus, daß der Nenner des allgemeinen Gliedes der betrachteten Reihe für alle positiven ϱ der Gleichung (6) des § 11 zufolge in der Form

$$(2) \quad \int_0^Z U^2(\alpha) d\alpha = \int_0^Z \cos^2 \varrho \alpha d\alpha + \frac{2}{\varrho} \int_0^Z N \cos \varrho \alpha d\alpha + \frac{1}{\varrho^2} \int_0^Z N^2 d\alpha$$

dargestellt werden kann, wobei gesetzt ist

$$N = h' \sin \varrho \alpha + \int_0^\alpha \lambda' U' \sin \varrho (\alpha - z') dz'.$$

Da ferner U bei hinreichend großen Werten von ϱ zwischen $+2$ und -2 liegt, so schließt man aus der Gleichung (2) und der Gleichung (10) des § 11

$$\lim_{\varrho=\infty} \int_0^Z U^2(\alpha) d\alpha = \lim_{\varrho=\infty} \int_0^Z \cos^2 \varrho \alpha d\alpha = \frac{Z}{2},$$

$$(3) \quad \int_0^Z U^2(\alpha) d\alpha = \frac{Z}{2} + \frac{K}{\varrho},$$

wobei auch K zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Werten verbleibt.

Jetzt transformieren wir den Zähler des allgemeinen Gliedes der Reihe (1) durch zwei partielle Integrationen, indem wir annehmen, $f(x)$ und demnach auch $\varphi(z)$ besitze im Intervall J eine stetige erste und zweite Ableitung, und finden, sobald ϱ eine gewisse Grenze, nämlich das Maximum von $|\sqrt{\lambda}|$ überschritten hat,

$$\begin{aligned} \int_0^Z \varphi(\alpha) U(\alpha) d\alpha &= \int_0^Z \frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} \cdot (\varrho^2 - \lambda(\alpha)) U(\alpha) d\alpha \\ &= - \int_0^Z \frac{\varphi(\alpha) U''(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} d\alpha = - \frac{\varphi(\alpha) U'(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} \Big|_0^Z + \int_0^Z U'(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} \right) d\alpha \\ &= - \frac{\varphi(\alpha) U'(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} + U(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} \right) \Big|_0^Z - \int_0^Z U(\alpha) \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} \right) d\alpha, \end{aligned}$$

oder auf Grund der Grenzbedingungen, wenn h und H endlich sind,

$$= \frac{H' \varphi(Z) U(Z)}{\varrho^2 - \lambda(Z)} + \frac{h' \varphi(0)}{\varrho^2 - \lambda(0)} + U(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} \right) \Big|_0^Z - \int_0^Z U(\alpha) \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} \right) d\alpha.$$

Da nun nach § 11 die Funktion λ endliche und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzt, übersieht man sofort, daß die Größen

$$\varrho^2 \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{1 - \frac{\lambda(\alpha)}{\varrho^2}} \right),$$

$$\varrho^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} \right) = \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{1 - \frac{\lambda(\alpha)}{\varrho^2}} \right)$$

bei wachsenden Werten von ϱ endlich bleiben. Um ihr Verhalten in einer Formel ausdrücken zu können, bezeichnen wir nach Liouville allgemein durch Ψ eine von ϱ und α oder ϱ und z abhängige GröÙe, die bei wachsenden Werten von ϱ und beliebigen der Strecke J angehörigen Werten von α oder z zwischen festen, d. h. von ϱ , α und z unabhängigen Grenzen verbleibt. Alsdann kann der obige Ausdruck in der Form

$$\frac{\Psi}{\varrho^2}$$

geschrieben werden, und dasselbe gilt der Beziehung (3) zufolge und da U bei großen Werten von ϱ zwischen $+2$ und -2 liegt, von dem allgemeinen Gliede der Reihe (1). Die Werte von ϱ aber haben die asymptotische Form $\frac{n\pi}{Z}$, jedes Glied einer über sie erstreckten Reihe

$$\sum \frac{\Psi}{\varrho^2}$$

gibt also durch ein entsprechendes der konvergenten Reihe

$$\sum \frac{1}{v^2}$$

dividiert einen Quotienten, der zwischen endlichen, festen Grenzen liegt. Daraus ist unmittelbar ersichtlich, daß die Reihe R absolut konvergiert, und da die Grenzen der GröÙen Ψ von z unabhängig sind, konvergiert sie auch im Intervall J gleichmäßig.

Hat man dies einmal für stetige Funktionen $\varphi(z)$ und $f(x)$ unter irgend welchen Bedingungen festgestellt, so ist es leicht, die Reihe R zu summieren. Zunächst ist ihr Wert eine stetige Funktion von z und damit von x , etwa $F(z)$; sie kann ferner, mit U_n multipliziert, gliedweise integriert werden, und man findet so

$$(4) \quad \int_0^z F(z) U_n(z) dz = \sum_v^{1,\infty} A_v \int_0^z U_v(z) U_n(z) dz,$$

wobei gesetzt ist

$$A_v = \int_0^z \varphi(\alpha) U_v(\alpha) d\alpha : \int_0^z U_v^2(\alpha) d\alpha.$$

Nun ist die Grundeigenschaft der Normalfunktionen V , wenn n und v verschiedene positive ganze Zahlen sind, in der Gleichung

$$\int_0^x g V_n V_\nu dx = 0$$

ausgedrückt; aus ihr folgt, indem man die Variablen z und U einführt,

$$\int_0^z U_n(\alpha) U_\nu(\alpha) d\alpha = 0,$$

sodaß die Gleichung (4) ergibt

$$\int_0^z F(z) U_n(z) dz = A_n \int_0^z U_n^2(z) dz$$

oder

$$\int_0^z (F(\alpha) - \varphi(\alpha)) U_n(\alpha) d\alpha = 0$$

oder endlich, indem man nach § 11 wieder x als Variable einführt,

$$\int_0^x \left(\frac{F(z)}{\sqrt[4]{gk}} - f(x) \right) V_n dx = 0.$$

Hieraus schließt man, da $f(x)$ ebenso wie $F(z)$ im Intervall J stetig ist, nach § 10

$$F(z) = \sqrt[4]{gk} f(x) = \varphi(z).$$

Hat also $f(x)$ im Intervall von $x=0$ bis $x=X$ stetige erste und zweite Ableitungen, so gilt für dies Intervall die Darstellung:

$$f(x) = \sum_{\nu} \frac{V_\nu \int_0^x g f(x) V_\nu dx}{\int_0^x g V_\nu^2 dx},$$

und die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig von $x=0$ bis $x=X$. Dabei sind die Normalfunktionen V_ν durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dV}{dx} \right) + (gr - l)V = 0$$

und die Grenzbedingungen

$$k \frac{dV}{dx} - hV \Big|_0 = 0, \quad k \frac{dV}{dx} + HV \Big|_X = 0$$

definiert; h, H, r sind endliche Konstante, k, g, l stetige mit stetigen Ableitungen bis zur vierten Ordnung einschließlich versehene Funktionen von x , von denen die ersten beiden in dem bezeichneten Intervall positiv und l nicht negativ ist.

§ 13.

Gleichmäßige Konvergenz unter allgemeineren Bedingungen.

Um noch weitergehende Resultate abzuleiten, welche den klassischen, von Dirichlet für die Fouriersche Reihe erhaltenen analog sind, nehmen wir an, $f(x)$ genüge im Intervall J der Dirichletschen Bedingung (§ 4); gilt dasselbe von $\sqrt[4]{gk}$, so lehren die in § 12 gegebenen Transformationsgleichungen, daß auch $\varphi(z)$ als Funktion von z diese Eigenschaft besitzt; denn zwei der Dirichletschen Bedingung unterworfenen Funktionen geben ein Produkt, welches ihr ebenfalls genügt*). Wir ersetzen ferner im Zähler des allgemeinen Gliedes der Reihe R die Integrationsgrenzen durch zwei beliebige dem Intervall J angehörige Werte von z , etwa ξ und η , wodurch R in eine Reihe übergehe, die durch $R^{\xi,\eta}$ oder ausführlicher durch $R(z)^{\xi,\eta}$ bezeichnet werde; nehmen wir dann für U den Ausdruck (6) des § 11, so ergibt sich

$$(1) \quad \varrho \int_{\xi}^{\eta} U(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha = \varrho \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha - \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha \int_0^{\alpha} \lambda' U' \sin \varrho z' dz' \\ + \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \varrho \alpha d\alpha \left(h' + \int_0^{\alpha} \lambda' U' \cos \varrho z' dz' \right).$$

Nun findet man durch partielle Integration

$$\int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha \int_0^{\alpha} \lambda' U' \sin \varrho z' dz' \\ = \int_0^{\eta} \lambda' U' \sin \varrho z' dz' \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha - \int_{\xi}^{\eta} \lambda(\alpha) U(\alpha) \sin \varrho \alpha d\alpha \int_{\xi}^{\alpha} \varphi(z') \cos \varrho z' dz',$$

und da nach § 4 die Integrale

$$\int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha, \quad \int_{\xi}^{\alpha} \varphi(z') \cos \varrho z' dz'$$

in der Form $\Psi : \varrho$ geschrieben werden können, hat das zweite Integral der Summe (1) eben diese Form, wobei die Grenzen der Größe Ψ als von ξ und η unabhängig betrachtet werden können. Dieselben Schlüsse kann man für das dritte zwischen ξ und η genommene Integral auf der rechten Seite der Gleichung (1) ziehen, indem man es in die Form

$$\left(h' + \int_0^{\eta} \lambda' U' \cos \varrho z' dz' \right) \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \varrho \alpha d\alpha - \int_{\xi}^{\eta} d\alpha \lambda(\alpha) U(\alpha) \cos \varrho \alpha \int_{\xi}^{\alpha} \varphi(z') \sin \varrho z' dz'$$

*) Poincaré Propagation de la chaleur Nr. 37.

bringt, und man erhält somit

$$\int_{\xi}^{\eta} U(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha = \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

wobei die Grenzen der Größe Ψ wiederum auch von ξ und η unabhängig sein können.

Ferner folgt aus der Gleichung (3) des § 12

$$M = 1 : \int_0^z U^2(\alpha) d\alpha = \frac{2}{Z} + \frac{C}{\varrho},$$

wobei C zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Grenzen liegt; man erhält daher für das allgemeine Glied der Reihe $R^{\xi, \eta}$ den Ausdruck

$$T = UM \int_{\xi}^{\eta} U(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha = \frac{2U}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha + \frac{CU}{\varrho} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

und die Grenzen der hier erscheinenden Größe Ψ können wie von ξ und η so auch von z unabhängig genommen werden, da U zwischen festen Grenzen liegt. Dieselbe Eigenschaft hat die Größe Ψ in der Gleichung

$$CU \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha = \frac{\Psi}{\varrho},$$

die nach § 4 angesetzt werden kann, und der hieraus folgenden

$$T = \frac{2U}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2}.$$

Führen wir hier für U der Gleichung (6) des § 11 gemäß den Wert

$$\cos \varrho z + \frac{\Psi}{\varrho}$$

ein und berücksichtigen nochmals, daß

$$(2) \quad \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha = \frac{\Psi}{\varrho}$$

gesetzt werden kann, so erhalten wir den Ausdruck

$$T = \frac{2 \cos \varrho z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

in welchem wiederum Ψ die angegebenen Eigenschaften behält, da dies nach § 4 in der Gleichung (2) angenommen werden darf.

Nimmt man jetzt für $\cos \varrho z$ den Wert, den die Gleichung (10) des § 11 ergibt, so findet man, da die dort durch B bezeichneten Größen die charakteristischen Eigenschaften der Größen Ψ besitzen,

$$T = \frac{2}{Z} \left(\cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{\Psi}{\varrho} \right) \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \left(\cos \frac{n\pi \alpha}{Z} + \frac{\Psi}{\varrho} \right) d\alpha.$$

Da ferner nach § 4 und der zwischen n und ϱ geltenden Beziehung

$$\int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \frac{n\pi \alpha}{Z} d\alpha = \frac{\Psi}{\varrho}$$

gesetzt werden kann, erhält man schließlich

$$T = \frac{2}{Z} \cos \frac{n\pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \frac{n\pi \alpha}{Z} d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

und die Grenzen der Größe Ψ sind hier, wie bisher immer, von ξ, η, z unabhängig. Summiert man diese Werte, indem man $\varrho = \varrho_1, \varrho_2, \dots$ und gleichzeitig $n = 0, 1, \dots$ setzt, so ergibt sich

$$R^{\xi, \eta} = \sum_v^{0, \infty} \frac{2}{Z} \cos \frac{v\pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \cos \frac{v\pi \alpha}{Z} d\alpha + \sum \frac{\Psi}{\varrho^2}.$$

Nun ist die letzte Reihe rechts aus denselben Gründen im Gebiet J gleichmäßig und absolut konvergent, wie die gleichbezeichnete in § 12; dieselbe Eigenschaft hat daher die Reihe $R^{\xi, \eta}$ mit der rechts stehenden trigonometrischen Reihe zugleich, die abgesehen vom ersten Glied mit der zweiten der am Ende des § 5 aufgeführten Reihen übereinstimmt. Speziell ist die Reihe $R^{0, z}$ gleichzeitig im Intervall J gleichmäßig konvergent mit der Reihe

$$(3) \quad \frac{1}{Z} \int_0^z \varphi(\alpha) d\alpha + \frac{2}{Z} \sum_v^{1, \infty} \cos \frac{v\pi z}{Z} \int_0^z \cos \frac{v\pi \alpha}{Z} \varphi(\alpha) d\alpha.$$

d. h. mit der gewöhnlichen Kosinusreihe R_z des § 3, in welcher die Variable z eingeführt ist; allgemein sieht man ferner, daß die Reihe $R^{\xi, \eta}$ konvergiert, sobald $\varphi(z)$ nur der Dirichletschen Bedingung genügt.

Diese Resultate würden auch gültig bleiben, wenn der in § 11 erwähnte Ausnahmefall einträte, daß für die erste Normalfunktion $\varrho_1 = 0$ zu setzen wäre, womit die durchgeführte Transformation des Ausdrucks T hinfällig würde; denn die Konvergenz der Reihe $R^{\xi, \eta}$ wird natürlich durch ein einzelnes hinzutretendes Glied nicht beeinflußt.

Die Reihe (3) konvergiert nach § 5 gleichmäßig von $z = 0$ bis $z = Z$, wenn $\varphi(z)$ im Intervall J stetig ist und der Dirichletschen Bedingung genügt; für eine solche Funktion ergibt daher die in § 12 an die Gleichung (4) geknüpfte Argumentation sofort

$$\varphi(z) = R^{0,z}.$$

Geht man endlich wieder zu den Variablen x , $f(x)$ und V_v zurück, so kann das erhaltene Resultat wie folgt ausgesprochen werden:

Bei endlichen Werten von h und H konvergiert im Intervall von $x = 0$ bis $x = X$ die nach den Normalfunktionen V_v fortschreitende Reihe

$$\sum_v \frac{V_v \int_0^X g f(x) V_v dx}{\int_0^X g V_v^2 dx}$$

gleichmäßig gegen den Wert $f(x)$, wenn in dem bezeichneten Intervall $f(x)$ und $\sqrt[4]{gk}$ stetige, der Dirichletschen Bedingung genügende Funktionen sind, und die übrigen für g , k , l und V_v in § 12 aufgestellten Voraussetzungen festgehalten werden.

§ 14.

Unstetigkeiten der dargestellten Funktion.

Die Funktionen $\varphi(z)$ und $\varphi_0(z)$ seien im Intervall J beide stetig und der Dirichletschen Bedingung unterworfen, und mögen, wenn ξ zwischen 0 und Z liegt, in dem Teilintervall

$$(1) \quad \xi \leq z \leq Z$$

übereinstimmen, während sie bei der Voraussetzung

$$0 \leq z < \xi$$

verschieden sein können. Gehört dann z der Strecke (1) an, so stellen beide Reihen

$$\sum U M \int_0^z \varphi(\alpha) U(\alpha) d\alpha, \quad \sum U M \int_0^z \varphi_0(\alpha) U(\alpha) d\alpha$$

denselben Wert dar; da nun nach Voraussetzung offenbar

$$\int_{\xi}^z \varphi(\alpha) U(\alpha) d\alpha = \int_{\xi}^z \varphi_0(\alpha) U(\alpha) d\alpha,$$

so folgt

$$\sum U M \int_0^{\xi} U(\alpha) (\varphi(\alpha) - \varphi_0(\alpha)) d\alpha = 0$$

und die links stehende Summe ist als Differenz zweier konvergenter Reihen ebenfalls konvergent. Da ferner nach § 13 auch jede Reihe $R^{\xi, \eta}$ konvergiert, so gilt dasselbe von

$$\sum U M \int_0^{\xi} U(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha,$$

und man kann die letzte Gleichung schreiben

$$\sum U M \int_0^{\xi} U(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha = \sum U M \int_0^{\xi} U(\alpha) \varphi_0(\alpha) d\alpha,$$

oder, indem man festsetzt, R gehe in R_0 über, wenn φ_0 an Stelle von φ tritt,

$$(2) \quad R^{0, \xi} = R_0^{0, \xi}.$$

Solange daher z dem Intervall (1) angehört, und $\varphi(\alpha)$ eine beliebige von 0 bis ξ stetige und der Dirichletschen Bedingung unterworfenen Funktion ist, deren Wert für $x = \xi$ gegeben ist, hat die Reihe

$$R^{0, \xi} = \sum U M \int_0^{\xi} U(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha$$

immer einen und denselben von der besonderen Bestimmung von $\varphi(z)$ unabhängigen Wert. Wir zeigen, daß dieser Null sein muß, sobald $z > \xi$, und $\frac{1}{2} \varphi(\xi)$ für $z = \xi$.

Dazu führt eine genauere Untersuchung des Produkts

$$U M \int_0^{\xi} \varphi_0(\alpha) U(\alpha) d\alpha,$$

in welchem wir für $\varrho > 0$ nach § 11 setzen können

$$(3) \quad U = \cos \varrho z + \frac{\psi^1}{\varrho},$$

$$\psi^1 = h' \sin \varrho z + \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho(z - z') dz'$$

oder, wenn nach § 11 die Werte

$$\varrho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B}{\varrho}, \quad B^0 = \varrho \sin \frac{Bz}{\varrho}, \quad \cos \varrho z = \cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{B^1}{\varrho^2} + \frac{B^0}{\varrho} \sin \frac{n\pi z}{Z}$$

eingeführt werden,

$$U = \cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{\psi^0}{\varrho},$$

wobei

$$\psi^0 = \psi^1 + \frac{B^1}{\varrho} + B^0 \sin \frac{n\pi z}{Z}$$

ist. Benutzt man noch die in § 13 aufgestellte Formel

$$M = \frac{2}{Z} + \frac{C}{\varrho},$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} UM \int_0^{\xi} U(\alpha) \varphi_0(\alpha) d\alpha &= \left[\frac{2}{Z} \cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{2\Psi^0}{Z\varrho} + \frac{C}{\varrho} \cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{C\Psi^0}{\varrho^2} \right] \\ &\times \int_0^{\xi} \varphi_0(\alpha) \left(\cos \frac{n\pi\alpha}{Z} + \frac{\Psi^1(\alpha)}{\varrho} + \frac{B^1(\alpha)}{\varrho^2} + \frac{B^0(\alpha)}{\varrho} \sin \frac{n\pi\alpha}{Z} \right) d\alpha \\ &= \frac{2}{Z} \cos \frac{n\pi z}{Z} \int_0^{\xi} \varphi_0(\alpha) \cos \frac{n\pi\alpha}{Z} d\alpha + P + Q \end{aligned}$$

bei folgender Bedeutung der neuen Zeichen:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\varrho} \left(\frac{2\Psi^0}{Z} + C \cos \frac{n\pi z}{Z} \right) \int_0^{\xi} \varphi_0(\alpha) \cos \frac{n\pi\alpha}{Z} d\alpha \\ &+ \frac{2}{Z\varrho} \cos \frac{n\pi z}{Z} \int_0^{\xi} \varphi_0(\alpha) \left(\Psi^1(\alpha) + B^0(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{Z} \right) d\alpha, \\ Q &= \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{2\Psi^0}{Z} + C \cos \frac{n\pi z}{Z} \right) \int_0^{\xi} \varphi_0(\alpha) \Psi^0(\alpha) d\alpha \\ &+ \frac{C\Psi^0}{\varrho^2} \int_0^{\xi} \varphi_0(\alpha) U(\alpha) d\alpha + \frac{2B^1}{\varrho^2 Z} \cos \frac{n\pi z}{Z} \int_0^{\xi} \varphi_0(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Jetzt sei

$$0 < \eta < \xi$$

und

$$\varphi_0(z) = 0$$

für das Intervall von $z = 0$ bis $z = \eta$; wenn dagegen

$$\eta \leq z \leq \xi$$

angenommen wird, sei

$$(4) \quad \varphi_0(z) = \frac{\varphi(\xi)(z-\eta)}{\xi-\eta},$$

sodaß $\varphi_0(z)$ in dem Intervall von $z = 0$ bis $z = \xi$ nicht nur stetig ist und der Dirichletschen Bedingung genügt, sondern auch monoton ist; $\varphi(\xi)$ ist der vorgeschriebene Wert der gegebenen Funktion $\varphi(z)$ an der Stelle $z = \xi$, den wir von Null verschieden voraussetzen dürfen, da andernfalls die ausgesprochene Behauptung evident wäre.

Dies festgesetzt, sind zunächst die in der Summe Q zusammengefaßten Glieder hinsichtlich ihres Wertes leicht zu kontrollieren; sie haben alle die Gestalt

$$\frac{\Psi}{\varrho^2},$$

wobei Ψ zwischen von η und ϱ unabhängigen Grenzen bleibt, da die durch die Gleichung (4) definierten Werte von $\varphi_0(z)$ zwischen 0 und $\varphi(\xi)$ liegen. Läßt man η an ξ heranrücken, so werden alle Integrale beliebig klein, da das Integrationsintervall zusammenschrumpft, während der Integrand endlich bleibt; man kann also

$$Q = \frac{\Psi}{\varrho^2}$$

setzen, und es läßt sich zeigen, daß die über alle Werte von ϱ erstreckte Summe

$$(5) \quad \sum Q = \sum_{\nu}^{0, \infty} \frac{\Psi_{\nu}}{\varrho_{\nu+1}^2}$$

dem absoluten Werte nach beliebig klein gemacht werden kann. Denn zunächst kann man m so groß wählen, daß die Summe

$$\sum_{\nu}^{m, \infty} \frac{\Psi_{\nu}}{\varrho_{\nu+1}^2},$$

unabhängig von η der Null so nahe liegt, wie man will; ist dies erreicht, so kann man η so nahe bei ξ wählen, daß die endliche Summe

$$\sum_{\nu}^{0, m-1} \frac{\Psi_{\nu}}{\varrho_{\nu+1}^2},$$

ebenfalls so klein ist, wie man will, und auch wenn $\xi - \eta$ noch weiter abnimmt, stets unter einer vorgeschriebenen Grenze verbleibt. Der Wert der Summe (5) kann also in der Tat der Null beliebig angenähert werden.

Um ein ähnliches Resultat auch für ΣP zu erhalten, gehen wir von der Formel (3) aus, welche

$$\Psi^1(\alpha) = \psi(\alpha) \sin \varrho \alpha + \chi(\alpha) \cos \varrho \alpha$$

ergibt in der Bezeichnung

$$\psi(\alpha) = h' + \int_0^{\alpha} \lambda' U' \cos \varrho z' dz',$$

$$\chi(\alpha) = - \int_0^{\alpha} \lambda' U' \sin \varrho z' dz'.$$

Da nun offenbar $\psi'(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$ zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Grenzen liegen, so kann eine ebenfalls von ϱ unabhängige Konstante A so gewählt werden, daß die Summe $A + \psi(\alpha)$, wenn α die Werte von 0 bis Z durchläuft, stets größer als eine feste positive Zahl, etwa Eins ist. Dann zeigt die Gleichung

$$\frac{d[\varphi_0(\alpha)(A + \psi(\alpha))]}{d\alpha} = \frac{\varphi(\xi)[A + \psi(\alpha)]}{\xi - \eta} + \varphi_0(\alpha)\psi'(\alpha),$$

die jedenfalls auf der Strecke von $\alpha = \eta$ bis $\alpha = \xi$ gilt, daß die Funktion $\varphi_0(\alpha)[A + \psi(\alpha)]$ von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \xi$ monoton ist, sobald $\xi - \eta$ unter eine gewisse von ϱ unabhängige Grenze herabgesetzt ist. In dieser Betrachtung kann $\psi(\alpha)$ durch eine der Funktionen $\chi(\alpha)$ und $B^0(\alpha)$ ersetzt werden, die ebenfalls mit ihren ersten Ableitungen zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Grenzen liegen, wenn α das Intervall J durchläuft.

Jetzt zeigt die Identität

$$\int_0^\xi \varphi_0(\alpha)\psi(\alpha)\sin\varrho\alpha d\alpha = \int_0^\xi \varphi_0(\alpha)[A + \psi(\alpha)]\sin\varrho\alpha d\alpha - \int_0^\xi A\varphi_0(\alpha)\sin\varrho\alpha d\alpha$$

und diejenigen, die aus ihr entstehen, wenn man $\psi(\alpha)$ durch $\chi(\alpha)$ oder $B^0(\alpha)$ und gleichzeitig $\sin\varrho\alpha$ durch $\cos\varrho\alpha$ und $\sin\frac{n\pi\alpha}{Z}$ ersetzt, daß die Teilsumme P zerlegt werden kann in Integrale

$$(6) \quad \int_0^\xi \theta(\alpha)\cos\varrho\alpha d\alpha, \quad \int_0^\xi \theta(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{Z} d\alpha$$

und ebensolche, in denen das Zeichen \cos durch \sin ersetzt ist; dabei ist $\theta(\alpha)$ eine monotone Funktion, deren Werte zwischen von η unabhängigen Grenzen liegen, und die Integrale sind mit Faktoren von der Form $\frac{\Psi}{\varrho}$ multipliziert, in denen die Grenzen der Größe Ψ sogar von $\varphi_0(z)$ überhaupt unabhängig sind. Für das erste Integral (6) aber gilt nach § 4 die Ungleichung

$$\left| \int_0^\xi \theta(\alpha)\cos\varrho\alpha d\alpha \right| < \frac{4g}{\varrho},$$

wenn g der größte absolute Betrag von $\theta(\alpha)$ im Integrationsintervall ist; ersetzt man auf der rechten Seite 4 durch eine beliebige größere Konstante, so erhält man nach demselben Satze eine obere Grenze für das zweite Integral (6). Denn zunächst ist nach § 4

$$\left| \int_0^\xi \theta(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{Z} d\alpha \right| < \frac{4gZ}{n\pi},$$

das Verhältniß $\varrho : \frac{n\pi}{Z}$ strebt aber bei wachsenden Werten von ϱ der Einheit zu. Beide Integrale (6) und diejenigen, die man erhält, wenn man in ihnen \cos durch \sin ersetzt, sind daher, sobald ϱ eine gewisse Grenze überschritten hat, absolut kleiner etwa als

$$\frac{5g}{\varrho},$$

wobei g von η unabhängig ist. Berücksichtigt man noch die Faktoren, mit denen diese Integrale in der Summe P multipliziert sind, so sieht man, daß alle Glieder derselben die Gestalt

$$\frac{\Psi}{\varrho^2}$$

haben, wobei die Grenzen der Größen Ψ von η unabhängig sind. Da ferner jedes Glied von P ein Integralzeichen enthält, unter dem der Faktor $\varphi_0(\alpha)$ vorkommt, so schließt man genau wie bei den Größen Q , daß auch die Summe aller P durch passende Wahl von η beliebig klein gemacht werden kann.

Als Resultat dieser Entwicklung erhalten wir für $R_0^{0,\xi}$ den Ausdruck

$$\sum U(z) M \int_0^\xi U(\alpha) \varphi_0(\alpha) d\alpha = \frac{1}{Z} \int_0^\xi \varphi_0(\alpha) d\alpha + \frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{1,\infty} \cos \frac{\nu\pi z}{Z} \int_0^\xi \varphi_0(\alpha) \cos \frac{\nu\pi\alpha}{Z} d\alpha + \varepsilon,$$

in welchem das Glied

$$\varepsilon = \frac{1}{Z} \int_0^\xi \varphi_0(\alpha) d\alpha + \sum P + \sum Q$$

der Null beliebig genähert werden kann, indem man η an ξ heranrücken läßt. In derselben Form erscheint die Größe $R_0^{0,\xi}$, wenn für die erste Normalfunktion $\varrho = 0$ zu setzen ist; denn ein einzelnes Glied

$$U(z) M \int_0^\xi U(\alpha) \varphi_0(\alpha) d\alpha$$

wird offenbar mit $\xi - \eta$ beliebig klein. Nun ist $R_0^{\xi,\eta}$ von η , weil überhaupt von der besonderen Wahl der Funktion $\varphi_0(z)$ der Gleichung (2) zufolge unabhängig; dasselbe gilt von der Reihe

$$\frac{1}{Z} \int_0^\xi \varphi_0(\alpha) d\alpha + \frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{1,\infty} \cos \frac{\nu\pi z}{Z} \int_0^\xi \varphi_0(\alpha) \cos \frac{\nu\pi\alpha}{Z} d\alpha,$$

die nach § 5, da ξ kleiner als Z ist, den Wert 0 oder $\frac{1}{2} \varphi(\xi)$ hat, je nachdem z größer als ξ oder $z = \xi$ ist; man findet also schließlich entsprechend diesen Fällen eine der Gleichungen

$$R_0^{0,\xi} = 0, \quad R_0^{0,\xi} = \frac{1}{2} \varphi(\xi),$$

und die Gleichung (2) ergibt sofort, indem man z für ξ setzt, demgemäß

$$0 < z < Z$$

annimmt, und die unabhängige Variable sichtbar macht,

$$(7) \quad R(z)^{0,z} = \frac{1}{2} \varphi(z);$$

für $z > \xi$ erhält man

$$(8) \quad R(z)^{0,\xi} = 0.$$

Verbindet man die letzten Gleichungen mit der Identität

$$R^{0,z} = R^{0,\xi} + R^{\xi,z},$$

so findet man

$$(9) \quad R(z)^{\xi,z} = \frac{1}{2} \varphi(z),$$

und hier treten beiderseits nur die Werte auf, welche $\varphi(z)$ auf der Strecke von ξ bis z annimmt.

Der Wert von z darf in der letzten Gleichung die obere Grenze Z nicht erreichen, da dies schon in der Gleichung (7) ausgeschlossen wurde. Für $z = Z$ aber hat man nach § 13 die Gleichung

$$R(Z)^{0,z} = \varphi(Z)$$

und die Gleichung (8), in welcher $z = Z$ gesetzt werden darf, ergibt

$$R(Z)^{\xi,z} = \varphi(Z).$$

Diese Resultate erweitern sich sofort, wenn man die Rollen der beiden Endpunkte des Intervalls J vertauscht; das ist erlaubt, da die Differentialgleichung der Normalfunktionen ebenso wie die Grenzbedingungen ihre Form behalten, wenn man $Z - z$ an Stelle von z als unabhängige Variable einführt. Ist dies geschehen, so braucht man nur die oben erhaltenen Werte von $R^{0,\xi}$ und $R^{\xi,z}$ anzuwenden, um sofort unter der Voraussetzung

$$0 \leq z < \xi < Z$$

die Gleichung

$$R(z)^{\xi,z} = 0$$

und, wenn z von Null verschieden ist,

$$(10) \quad R(z)^{z,\xi} = R(z)^{z,Z} = \frac{1}{2} \varphi(z),$$

für $z = 0$ aber die Gleichung

$$R(0)^{0,\xi} = \varphi(0)$$

zu erhalten.

Jetzt ist es leicht, auch den Fall zu erledigen, in welchem $\varphi(z)$ im Innern der Strecke J eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen besitzt. In diesen sind, wie in § 4 erwähnt, bei der Annäherung von rechts wie

von links her bestimmte endliche Grenzwerte der Funktion vorhanden, wenn die Dirichletsche Bedingung nach wie vor erfüllt ist. Eine von ihnen sei ξ , während $\varphi(z)$ auf den Strecken

$$\xi \leq z < \xi, \quad \xi < z \leq \eta$$

stetig bleibe. Dann hat man der Gleichung (9) zufolge

$$R(\xi)^{\xi, \xi} = \frac{1}{2} \varphi(\xi),$$

wobei unter $\varphi(\xi)$ der für $z = \xi$ erhaltene Wert der von $z = \xi$ bis $z = \xi$ stetigen Funktion verstanden wird, den wir, wenn $\varphi(z)$ für das ganze Intervall J betrachtet wird, als $\varphi(\xi - 0)$ bezeichnen müssen. Man hat demgemäß die letzte Gleichung in der Form

$$(11) \quad R(\xi)^{\xi, \xi} = \frac{1}{2} \varphi(\xi - 0)$$

zu schreiben und findet ebenso

$$(12) \quad R(\xi)^{\xi, \eta} = \frac{1}{2} \varphi(\xi + 0).$$

Da man ferner aus der Formel (8) leicht ersieht, daß die Gleichungen

$$R(\xi)^{0, \xi} = 0, \quad R(\xi)^{\eta, Z} = 0$$

schon dann gelten, wenn die Strecken von 0 bis ξ und von η bis Z in eine endliche Anzahl solcher zerfallen, innerhalb deren $\varphi(z)$ stetig ist, so folgt aus den Gleichungen (11) und (12) die Formel

$$R(\xi)^{0, Z} = \frac{1}{2} [\varphi(\xi - 0) + \varphi(\xi + 0)],$$

und, wenn ξ keine Unstetigkeitsstelle ist, die schon bekannte Darstellung

$$R(\xi)^{0, Z} = \varphi(\xi).$$

Drückt man endlich diese Resultate in der Variablen x aus, wobei sich die benutzten Stetigkeitseigenschaften von $\varphi(z)$ auf $f(x)$ übertragen, so findet man:

Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall von $x = 0$ bis $x = X$ der Dirichletschen Bedingung unterworfen und nur an einer endlichen Anzahl zwischen 0 und X liegender Stellen unstetig ist, übrigens aber dieselben Voraussetzungen gelten wie am Ende des § 13, so ist an jeder Unstetigkeitsstelle

$$\sum_v^{1, \infty} \frac{V_v \int_0^x g f(x) V_v dx}{\int_0^x g V_v^2 dx} = \frac{1}{2} [f(x + 0) + f(x - 0)].$$

An jeder andern Stelle des bezeichneten Intervalls ist der Wert dieser Reihe wie früher $f(x)$.

IV. Die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Normalfunktionen mit mindestens einer festen Nullstelle.

§ 15.

Die Gestalt der Normalfunktionen für $h = \infty$, $H = \infty$.

Die durchgeführte Argumentation liefert ohne wesentliche Modifikation des Grundgedankens aber vermitteltst einer etwas anderen Rechnung die analogen Resultate auch für den Fall, daß eine der Konstanten h , H oder beide unendlich sind, d. h. daß mindestens eine der Grenzbedingungen der Normalfunktionen durch eine der Gleichungen

$$V|_0 = 0, \quad V|^\infty = 0,$$

ersetzt wird. Diese Fälle, zu denen z. B. der im Abschnitt II betrachtete gehört, waren in den §§ 9 und 10 nicht ausgeschlossen; nur die von § 11 an durchgeführten Entwicklungen müssen modifiziert werden.

Es sei zunächst $h = \infty$; dann ergibt sich aus der in § 11 nach Liouville durchgeführten Transformation, die von der speziellen Gestalt der Grenzbedingungen unabhängig ist, für die Normalfunktionen U die Gleichung

$$U|_0 = 0,$$

und wenn man wie dort aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + (\varrho^2 - \lambda) U = 0$$

die ersten Integrale

$$\sin \varrho z \frac{dU}{dz} - \varrho U \cos \varrho z = A + \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho z' dz',$$

$$\cos \varrho z \frac{dU}{dz} + \varrho U \sin \varrho z = B + \int_0^z \lambda' U' \cos \varrho z' dz'$$

ableitet, findet man

$$A = 0, \quad B = \left. \frac{dU}{dz} \right|_0;$$

für positive Werte von ϱ können wir

$$\left. \frac{dU}{dz} \right|_0 = \varrho$$

setzen und erhalten dann allgemein

$$(1) \quad U = \sin \varrho z + \frac{1}{\varrho} \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho(z - z') dz'.$$

Der Ausnahmefall $\varrho = 0$ kann, wie man leicht sieht, bei positiven Werten von H nicht eintreten, und würde nur ein einzelnes, für die Konvergenzfragen unerhebliches Glied in die zu untersuchenden Reihen einführen.

Die durch die Gleichung (1) bestimmte Normalfunktion liegt, sobald ϱ eine gewisse Grenze überschritten hat, in dem ganzen Intervall J zwischen $+2$ und -2 ; denn ist Q das Maximum ihres absoluten Betrages, so ist die rechte Seite der Gleichung (1) dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$1 + \frac{Q}{e} \int_0^z |\lambda'| dz';$$

daraus folgt allgemein

$$|U| < 1 + \frac{Q}{e} \int_0^z |\lambda'| dz'$$

und weiter, sobald

$$\varrho > \int_0^z |\lambda'| dz'$$

geworden ist,

$$\left[1 - \frac{1}{e} \int_0^z |\lambda'| dz' \right] Q < 1,$$

woraus sich die ausgesprochene Behauptung ergibt.

Die Gleichung, welche die für die Normalfunktionen charakteristischen Werte von ϱ liefert, erhält man aus der zweiten Grenzbedingung

$$\frac{dU}{dz} + H' U \Big|_z = 0,$$

indem man den Wert (1) einsetzt, in folgender Form:

$$\begin{aligned} & \sin \varrho Z \left\{ H' + \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho z' dz' + \frac{H'}{e} \int_0^z \lambda' U' \cos \varrho z' dz' \right\} \\ & + \cos \varrho Z \left\{ \varrho + \int_0^z \lambda' U' \cos \varrho z' dz' - \frac{H'}{e} \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho z' dz' \right\} = 0. \end{aligned}$$

Nun bleiben die Integrale

$$\int_0^z \lambda' U' \cos \varrho z' dz', \quad \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho z' dz'$$

bei wachsenden Werten von ϱ ebenso wie U zwischen festen endlichen Grenzen; die erhaltene Gleichung reduziert sich daher, durch ϱ dividiert, im wesentlichen auf die Form

$$\cos \varrho Z = 0,$$

aus welcher sich der asymptotische Wert

$$\varrho \sim \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{Z}$$

ergibt. Eine Untersuchung, die sehr ähnlich der in § 11 durchgeführten verläuft, führt zu dem genaueren Werte

$$(2) \quad \varrho = \varrho_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{Z} + \frac{B}{\varrho},$$

wobei B zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Grenzen verbleibt.

Daß der erhaltene Wert von ϱ gerade die $(n+1)^{\text{te}}$ Normalfunktion ergibt, folgt wieder daraus, daß diese stets genau n von $z=0$ verschiedene Nullstellen besitzt; die dem Werte (2) entsprechende Normalfunktion reduziert sich aber bei großen Werten von n wesentlich auf

$$\sin (2n+1) \frac{\pi z}{2Z}$$

und verschwindet, abgesehen von $z=0$, im Intervall J an den Stellen

$$z = \frac{2Z}{2n+1}, \frac{4Z}{2n+1}, \dots, \frac{2nZ}{2n+1},$$

d. h. genau n -mal, ist also mit U_{n+1} identisch. Den Werten $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ entsprechen daher die Zahlen $n=0, 1, \dots$.

Ebenso leicht findet man die entsprechenden Resultate im Falle $H=\infty$, d. h. wenn die Größen ϱ durch die Gleichung

$$U|z=0, \quad \sin \varrho Z + \frac{1}{\varrho} \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho(Z-z') dz' = 0$$

definiert werden, die bei großen ϱ annähernd durch

$$\sin \varrho Z = 0$$

ersetzt werden kann und den asymptotischen Wert

$$(3) \quad \varrho \sim \frac{n\pi}{Z}, \quad \varrho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B}{\varrho}$$

ergibt. Die entsprechende Normalfunktion ist wesentlich

$$\sin \frac{n\pi z}{Z},$$

verschwindet also zwischen den Grenzen des Intervalls J genau $(n-1)$ mal und ist mit U_n identisch, da jetzt die n^{te} Normalfunktion $n-1$ Nullstellen zwischen 0 und Z besitzt; der durch die zweite Gleichung (3) gegebene Wert von ϱ ist also genauer durch ϱ_n zu bezeichnen.

Der letzte mögliche Fall, daß h endlich und H unendlich ist, braucht offenbar nicht besonders betrachtet zu werden, da er sich von dem ersten, in welchem für h und H das Umgekehrte gilt, nicht wesentlich unterscheidet.

§ 16.

Analoga der §§ 12 und 13.

Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, die oben für endliche Werte von h und H entwickelten Kriterien der gleichmäßigen Konvergenz der nach Normalfunktionen fortschreitenden Reihe auf den vorliegenden Fall mit einer geringen Modifikation zu übertragen.

Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, daß der Formel (1) des § 15 zufolge, wenn die Bezeichnung

$$N = \int_0^\alpha \lambda' U' \sin(\alpha - z') dz'$$

eingeführt wird, die Gleichung

$$(1) \quad \int_0^Z U^2(\alpha) d\alpha = \int_0^Z \sin^2 \varrho \alpha d\alpha + \frac{2}{\varrho} \int_0^Z N \sin \varrho \alpha d\alpha + \frac{1}{\varrho^2} \int_0^Z N^2 d\alpha$$

gilt, aus der man schließt

$$(2) \quad \lim_{\varrho=\infty} \int_0^Z U^2(\alpha) d\alpha = \frac{Z}{2}.$$

Man findet ferner wie in § 12 unter den dort für $f(x)$ eingeführten Voraussetzungen die Gleichung

$$\int_0^Z U(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha = -\frac{\varphi(\alpha) U'(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} + U(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} \right) \Big|_0^Z - \int_0^Z U(\alpha) \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varrho^2 - \lambda(\alpha)} \right) d\alpha,$$

und in ihr fällt das Glied mit $U'(0)$ weg, wenn wir annehmen

$$f(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0.$$

Für $U'(Z)$ kann man $-H'U(Z)$ schreiben, wenn H endlich ist; ist $H = \infty$, so gelte die weitere Voraussetzung

$$f(X) = 0, \quad \varphi(Z) = 0.$$

Auf diese Weise erreicht man in jedem Falle, daß alle Glieder des betrachteten Ausdrucks die Form

$$\frac{\psi}{\varrho^2}$$

haben, und dasselbe gilt der Gleichung (2) zufolge, und da $U(z)$ zwischen endlichen, von ϱ unabhängigen Grenzen liegt, von dem allgemeinen Gliede der Reihe R . Da nun ϱ nach § 15, sobald eine gewisse Grenze überschritten ist, wesentlich in arithmetischer Progression wächst, gleichviel ob H endlich oder unendlich ist, so ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe R wiederum erwiesen. Da ferner die Entwicklungen des § 10 auch für unendliche h und H gelten, so kann die Reihe R auch wie in § 12 summiert werden und hat den Wert $\varphi(z)$.

Aber auch die Entwicklungen des § 13 sind mit leichter Modifikation auf den vorliegenden Fall zu übertragen, wenn man die dort geltenden Voraussetzungen betreffs der Funktionen g, k, l und $f(x)$ festhält. Zunächst ergibt die Gleichung (1), da nach § 4

$$\int_0^z \sin \varrho \alpha \, d\alpha = \frac{\psi}{\varrho}$$

gesetzt werden kann, kombiniert mit der Gleichung

$$\int_0^z \sin^2 \varrho \alpha \, d\alpha = \frac{\varrho Z - \cos \varrho Z \sin \varrho Z}{2\varrho},$$

die Folgerung

$$(4) \quad M = 1 : \int_0^z U^2(\alpha) \, d\alpha = \frac{2}{Z} + \frac{C}{\varrho},$$

und C liegt zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Grenzen. Man findet ferner mittelst des Ausdrucks (1) in § 15

$$(5) \quad U = \sin \varrho z + \frac{\psi}{\varrho},$$

$$\varrho \int_{\xi}^{\eta} U(\alpha) \varphi(\alpha) \, d\alpha = \varrho \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \varrho \alpha \, d\alpha + \int_{\xi}^{\eta} d\alpha \varphi(\alpha) \sin \varrho \alpha \int_0^{\alpha} \lambda' U' \cos \varrho z' \, dz'$$

$$- \int_{\xi}^{\eta} d\alpha \varphi(\alpha) \cos \varrho \alpha \int_0^{\alpha} \lambda' U' \sin \varrho z' \, dz',$$

wobei wieder ξ und η beliebige Werte von z im Intervall J sein können. Da hier das zweite und dritte der zwischen ξ und η genommenen Integrale ebenso behandelt werden können wie die analogen Glieder in der Gleichung (1) des § 13, und U zwischen endlichen Grenzen bleibt, so kann man aus der letzten Gleichung nach § 4 und der Gleichung (5) schließen

$$(6) \quad U \int_{\xi}^{\eta} U(\alpha) \varphi(\alpha) \, d\alpha = \frac{2 \sin \varrho z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \varrho \alpha \, d\alpha + \frac{\psi}{\varrho^2},$$

und Ψ liegt zwischen endlichen, von ξ , η , z und ϱ unabhängigen Grenzen.

Nun ergeben die Gleichungen (2) und (3) des § 15, je nachdem H endlich oder unendlich ist,

$$\sin \varrho z = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{Z} + \frac{B^0}{\varrho} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{Z} + \frac{B^1}{\varrho^2}$$

oder

$$\sin \varrho z = \sin \frac{n\pi z}{Z} + \frac{B^0}{\varrho} \cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{B^1}{\varrho^2},$$

wobei B^1 und B^0 zwischen endlichen von ϱ unabhängigen Grenzen liegen, und

$$B^0 = \varrho \sin \frac{Bz}{\varrho}$$

ist; entsprechend beiden Fällen findet man somit

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \varrho \alpha d\alpha &= \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\alpha \pi}{Z} d\alpha + \frac{1}{\varrho} \int_{\xi}^{\eta} B \varphi(\alpha) \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\alpha \pi}{Z} d\alpha \\ &\quad + \frac{\Psi}{\varrho^2}, \end{aligned}$$

$$\int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \varrho \alpha d\alpha = \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \frac{n\alpha\pi}{Z} d\alpha + \frac{1}{\varrho} \int_{\xi}^{\eta} B \varphi(\alpha) \cos \frac{n\alpha\pi}{Z} d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2}.$$

Die zweiten Integrale rechts haben aber nach § 4 die Gestalt $\Psi : \varrho$, da $\varphi(z)$ der Dirichletschen Bedingung unterworfen ist; somit folgt eine der Gleichungen

$$\int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \varrho \alpha d\alpha = \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\alpha \pi}{Z} d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

$$\int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \varrho \alpha d\alpha = \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \frac{n\alpha\pi}{Z} d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2},$$

und auch hier haben die Größen Ψ die oben angegebene Beschaffenheit. Substituiert man diese Werte in die Gleichung (6) und berücksichtigt die Gleichung (4), so ergibt sich

$$\begin{aligned} (7) \quad & UM \int_{\xi}^{\eta} U(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{2}{Z} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{z\pi}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\alpha \pi}{Z} d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2} \end{aligned}$$

oder

$$UM \int_{\xi}^{\eta} U(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha = \frac{2}{Z} \sin \frac{n\pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \frac{n\alpha\pi}{Z} d\alpha + \frac{\Psi}{\varrho^2}.$$

Hieraus schließt man wie in § 13, daß die Reihe $R^{\xi, \eta}$, deren allgemeines Glied durch einen der letzten beiden Ausdrücke dargestellt wird, gleichmäßig konvergiert, sobald dies von der einen oder andern der Reihen

$$\frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{1, \infty} \sin \frac{\nu\pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \frac{\nu\pi\alpha}{Z} d\alpha,$$

(8)

$$\frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{0, \infty} \sin \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi\alpha}{Z} d\alpha$$

gilt; denn die Reihe

$$\sum \frac{\Psi}{\varrho^2}$$

konvergiert, da die Grenzen der Größe Ψ die oben angegebene Beschaffenheit haben, gleichmäßig, wenn man z das Intervall J durchlaufen läßt; dasselbe gilt auch, wovon wir später Gebrauch machen, hinsichtlich der Größen ξ, η .

Speziell ist die Reihe R oder $R^{0, Z}$ gleichmäßig konvergent, sobald dies von einer der für $\xi = 0, \eta = Z$ gebildeten Reihen (8) gilt, welche sich durch eine einfache Substitution auf die Reihen R_1 und R_3 des § 3 reduzieren. Erstere ist nach § 5 gleichmäßig konvergent, wenn $\varphi(z)$ der Dirichletschen Bedingung genügt und die Gleichungen

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(Z) = 0$$

bestehen; dasselbe gilt von R_3 schon, wenn nur die erste dieser Gleichungen vorausgesetzt wird.

Zusammenfassend kann man also sagen: *Die Resultate der §§ 12 und 13 bleiben für $h = \infty$, d. h. wenn die Normalfunktionen der Gleichung*

$$V|_0 = 0$$

genügen, gültig unter der Voraussetzung

$$f(0) = 0.$$

Ist auch noch $H = \infty$, sodaß die zweite Grenzbedingung der Normalfunktionen in der Gleichung

$$V|_X = 0$$

besteht, so gelten jene Resultate bei der Voraussetzung

$$f(0) = f(X) = 0.$$

§ 17.

Die dargestellte Funktion frei von Grenzbedingungen.

Um das erhaltene Resultat von den der Funktion $f(x)$ auferlegten Grenzbedingungen unabhängig zu machen, beschränken wir uns zunächst auf endliche Werte von H und nehmen an, $\varphi(z)$ sei im Intervall J eine beliebige stetige, nur der Dirichletschen Bedingung unterworfenene Funktion. Es sei ferner

$$0 < \eta < \xi < Z$$

und gelte die Gleichung

$$\varphi_0(z) = \varphi(z)$$

für die Strecke

$$\xi \leq z \leq Z;$$

dagegen sei

$$\varphi_0(z) = \frac{(z - \eta)\varphi(\xi)}{\xi - \eta},$$

sobald

$$\eta \leq z \leq \xi,$$

und

$$\varphi_0(z) = 0$$

im Intervall

$$0 \leq z \leq \eta.$$

Die so definierte Funktion $\varphi_0(z)$ ist im Intervall J stetig, verschwindet an dessen unterer Grenze und genügt der Dirichletschen Bedingung. Setzt man also allgemein

$$R^{\xi, \eta} = \sum U M \int_{\xi}^{\eta} U(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha,$$

$$R_0^{\xi, \eta} = \sum U M \int_{\xi}^{\eta} U(\alpha) \varphi_0(\alpha) d\alpha,$$

so hat man nach § 16 für $z \geq \xi$

$$(1) \quad R_0^{0, z} = \varphi_0(z) = \varphi(z)$$

und es gelten die Identitäten

$$(2) \quad R_0^{0, z} = R_0^{0, \xi} + R_0^{\xi, z} = R_0^{0, \xi} + R^{\xi, z}.$$

Da nun die linke Seite der Gleichung (2) der Gleichung (1) zufolge von η unabhängig ist und dasselbe von $R^{\xi, z}$ offenbar gilt, so ist auch $R_0^{0, \xi}$ von η unabhängig; wir zeigen, daß der Wert dieser Größe Null oder $\frac{1}{2}\varphi(\xi)$ ist, je nachdem z größer als ξ oder $z = \xi$ ist.

Zu diesem Zweck gehen wir von den Ausdrücken (4) und (5) des § 16 und (1) des § 15 aus und schreiben

$$U = \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi z}{Z} + \frac{\psi^0}{\varrho},$$

$$\psi^0 = \psi^1 + B^0 \cos \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi z}{Z} + \frac{B^1}{\varrho},$$

$$\psi^1 = \psi(z) \sin \varrho z + \chi(z) \cos \varrho z,$$

$$\psi(z) = \int_0^z \lambda' U' \cos \varrho z' dz', \quad \chi(z) = - \int_0^z \lambda' U' \sin \varrho z' dz';$$

dann ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} MU(z) \int_0^{\xi} U(\alpha) \varphi_0(\alpha) d\alpha &= \left[\frac{2}{Z} \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi z}{Z} + \frac{2\psi^0}{Z\varrho} + \frac{C}{\varrho} \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi z}{Z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C\psi^0}{\varrho^2} \right] \int_0^{\xi} \varphi_0(\alpha) \left\{ \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \alpha}{Z} + \frac{\psi^1(\alpha)}{\varrho} + \frac{B^1(\alpha)}{\varrho^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B^0(\alpha)}{\varrho} \cos \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \alpha}{Z} \right\} d\alpha \\ &= \frac{2}{Z} \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi z}{Z} \int_0^{\xi} \varphi_0(\alpha) \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \alpha}{Z} d\alpha + P + Q, \end{aligned}$$

und die Ausdrücke P , Q entstehen aus den gleichbezeichneten des § 14,

indem man den Bruch $\frac{n\pi}{Z}$ überall durch $\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}{Z}$ ersetzt und die Zeichen \cos und \sin vertauscht. Diese Umgestaltung berührt aber die in § 14 durchgeführten Schlüsse in keiner Weise; denn B^0 hat nach § 16 dieselbe Gestalt wie in § 11, und die Funktionen ψ , χ behalten ihre in § 14 allein benutzte Eigenschaft, mit ihren Ableitungen zwischen endlichen Grenzen zu liegen. Man findet daher genau wie dort, daß die Summen

$$\sum P, \quad \sum Q,$$

welche über alle Werte von ϱ zu erstrecken sind, beliebig der Null genähert werden können, indem man η an ξ heranrücken läßt. Da nun nach § 5 die Reihe

$$\sum_{\nu}^{0, \infty} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{Z} \int_0^{\xi} \varphi_0(\alpha) \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi \alpha}{Z} d\alpha$$

den Wert 0 oder

$$\frac{1}{2} \varphi_0(\xi) = \frac{1}{2} \varphi(\xi)$$

hat, je nachdem z größer als ξ oder gleich ξ ist, so kann die Größe $R_0^{\alpha, \xi}$ im ersten Falle der Null, im zweiten dem Werte $\frac{1}{2} \varphi(\xi)$ beliebig angenähert werden. Sie ist aber, wie oben bemerkt, von η unabhängig; also folgt, wenn $z > \xi$

$$R_0^{\alpha, \xi} = 0,$$

und die Gleichung (1) ergibt, indem man die Variable dem Zeichen R anfügt,

$$(3) \quad \varphi(z) = R(z)^{\xi, z}.$$

Ebenso erhält man für $z = \xi$

$$(4) \quad R_0^{\alpha, \xi} = R^{\alpha, \xi} = \frac{1}{2} \varphi(\xi), \quad R^{\xi, z} = \frac{1}{2} \varphi(\xi).$$

Mit der Gleichung (3) kombinieren wir die in § 16 betonte Tatsache, daß in der Gleichung

$$\begin{aligned} R^{\xi, \eta} &= \sum U M \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) U(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{2}{Z} \sum_{\nu}^{0, \infty} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{Z} \int_{\xi}^{\eta} \varphi(\alpha) \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi \alpha}{Z} d\alpha + \sum \frac{\psi}{\varrho^2} \end{aligned}$$

die Reihe

$$(5) \quad \sum \frac{\psi}{\varrho^2}$$

hinsichtlich der Größen ξ und η gleichmäßig konvergiert. Da nun jedes ihrer Glieder eine stetige Funktion von ξ und η ist, so gilt dasselbe von der ganzen Summe (5), und ebenso auch von $R^{\xi, \eta}$ unter der Voraussetzung

$$z > \eta > \xi,$$

da dann nach § 5 die trigonometrische Reihe in dem obigen Ausdruck $R^{\xi, \eta}$ verschwindet, und zwar auch für $\xi = 0$. Die Gleichung (3) aber ergibt

$$\varphi(z) = R^{\xi, z} = R^{\eta, z}$$

und damit

$$R^{\eta, z} - R^{\xi, z} = R^{\xi, \eta} = 0;$$

läßt man also ξ gegen die Grenze Null konvergieren, so nähert sich $R^{\xi, \eta}$ der Grenze $R^{0, \eta}$, und man findet übereinstimmend mit der Formel (8) des § 14

$$(6) \quad R^{0, \eta} = 0,$$

mithin, sobald z von Null verschieden ist,

$$(7) \quad R^{0, z} = \varphi(z),$$

womit eine willkürliche Funktion auch im Falle $h = \infty$ durch die Normalfunktionen dargestellt ist, ohne daß $\varphi(0)$ und $f(0)$ zu verschwinden brauchten.

Diese Entwicklung kann, wenn zunächst $\varphi(Z) = 0$, ohne wesentliche Änderung auf den Fall $H = \infty$ übertragen werden, indem man $n + \frac{1}{2}$ und $\nu + \frac{1}{2}$ durch n und ν ersetzt. Sodann kann für den Fall, daß $\varphi(Z)$ von Null verschieden ist, eine der durchgeführten analoge Betrachtung für die in der oberen Grenze Z endigenden Intervalle angestellt werden; man findet auch hier, wenn

$$Z \geq \xi > z > 0$$

ist, die der Gleichung (6) analoge

$$R^{\xi, z} = 0.$$

Somit ergibt sich, gleichviel ob H endlich oder unendlich ist, immer die Darstellung (7), solange z keinen der Werte 0 und Z annimmt.

Übersetzt man die erhaltenen Resultate in die Sprache der Variablen x und $f(x)$, so findet man, daß die nach Normalfunktionen fortschreitende Reihe, auch wenn die Größen h und H nicht beide endlich sind, die der Dirichletschen Bedingung unterworfenen und stetigen Funktion $f(x)$ auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = X$ darstellt, auch wenn über $f(0)$ und $f(X)$ nichts vorausgesetzt wird; nur muß x , wenn $h = \infty$ ist, von 0, wenn $H = \infty$ ist, von X verschieden bleiben.

Endlich kann auch der Fall, daß $f(x)$ Unstetigkeiten aufweist, ebenso wie in § 14 behandelt werden. Denn zunächst ergibt die Gleichung (4), wenn

$$0 < \xi < z < Z,$$

die Beziehungen

$$(8) \quad R(z)^{0, z} = R(z)^{\xi, z} = \frac{1}{2} \varphi(z),$$

welche dieselbe Form haben wie die unter denselben Voraussetzungen geltenden Gleichungen (7) und (9) des § 14. Ebenso kann auch die Gleichung (10) des § 14:

$$(9) \quad R(z)^{z, \xi} = \frac{1}{2} \varphi(z),$$

die unter der Voraussetzung

$$0 < z < \xi < Z$$

gilt, auf den vorliegenden Fall übertragen werden. Das ist unmittelbar ersichtlich, wenn die Konstanten h und H beide unendlich sind, da dann die Enden des Intervalls J dieselben Eigenschaften haben und vertauscht werden können, womit die Gleichungen (8) und (9) ineinander übergehen. Andere Erwägungen führen zu der Gleichung (9), wenn H endlich ist. Dann muß man davon ausgehen, daß mit einer Modifikation, die wir angeben wollen, die Entwicklung des § 14 auch für den Fall $H = \infty$ gültig bleibt. Bei dieser Annahme bleibt nämlich die in der Gleichung (6) des § 11 gegebene Darstellung der Funktion U , wie dort schon bemerkt wurde, richtig, und da die Normalfunktionen am oberen Ende des Intervalls J verschwinden, erhält man für große Werte von ϱ die annähernde Bestimmung

$$\cos \varrho Z = 0,$$

sodaß durchgehends in den Werten von ϱ die Zahl n durch $n + \frac{1}{2}$ zu ersetzen ist. Vertauscht man jetzt die Enden des Intervalls J , indem man $Z - z$ an Stelle von z als Argument einführt, so kommt man auf den Fall, daß H endlich, h unendlich ist, zurück, und die Gleichung (9) erscheint als eine andre Form der Gleichung (9) des § 14.

Auf Grund dieser Formeln findet man durch genau dieselbe Schlußreihe wie in § 14, daß, wenn die Funktion $f(x)$ im Innern des Intervalls J eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten besitzt, an jeder von diesen der Wert der nach den Normalfunktionen fortschreitenden Reihe durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$$

dargestellt wird.

Hiermit ist auch für den Fall unendlicher Werte von h und H die Dirichletsche Theorie der Fourierschen Reihe im wesentlichen auf die Sturm-Liouvilleschen Reihen übertragen.