

so ist auch das von ihnen zurückgeworfene Licht so schwach, daß sie entweder gar nicht wahrgenommen werden, oder wenigstens einen Stern zweiter Größe in einer Höhe von 60 Graden an einem völlig heitern Sommertage nicht überstrahlen können.

---

### III.

*Ueber die Bestimmung der Temperatur, bei welcher das Wasser die größte Dichtigkeit besitzt;*

VON GUSTAV GABRIEL HÄLLSTRÖM, Professor in Åbo \*).

---

Bei meiner Untersuchung über die Ausdehnung des Wassers durch Wärme habe ich die Vermuthung ausgesprochen, daß man für die Temperatur des Wassers, in der es am dichtesten ist, eine genügende Bestimmung erhalten werde, wenn man den Stand zweier nach Tralles Methode in Wasser gesenkten Thermometer, sowohl bei steigender als sinkender Temperatur, beobachte und aus einer gleichen Anzahl von den unter beiden Umständen erhaltenen Resultaten das

\*) Aus den Kongl. Vetensk. Handl. Die frühere Untersuchung des Verf. über die Ausdehnung und größte Dichte des Wassers, die genaueste, welche wir gegenwärtig besitzen, findet sich in diesen Annal. Bd. 77. S. 129. Der vorliegende Aufsatz bildet einen Nachtrag zu jener Untersuchung und durfte um so weniger in den Annalen übergangen werden, als er die Frage, welche Genauigkeit das hier, und früher mehrmals, angewandte Verfahren zulasse, gewiß zu Genüge beantwortet. Am genannten Orte findet man auch das Geschichtliche dieses Gegenstandes. P.

Mittel nehme. Bei reiflicher Ueberlegung ist es mir nicht unnützlich erschienen, auf diesem Wege das Resultat zu prüfen, welches ich früher durch Wägung und vielfache Correctionen erhalten habe. Ich halte eine solche Prüfung für um so interessanter, als selbst Naturforscher vom ersten Range sich dieser Methode im Vorzuge vor allen andern bedient haben, und es daher wohl eine Untersuchung verdient, wie weit man sich auf diesem Wege der Wahrheit nähern könne, und welcher Methode überhaupt der Vorzug eingeräumt werden müsse. In dieser Absicht sind die nachstehenden Versuche und Berechnungen unternommen worden.

Ein Glasgefäß von 4 schwedischen Decimalzollen Weite wurde bis zu einer Höhe von 8 Zoll mit destillirtem Wasser gefüllt und in der Mitte desselben zwei Thermometer aufgehängt, auf die Art, daß die Kugel des einen  $1\frac{1}{2}$  Zoll über dem Boden und die des andern 2 Zoll unter der Wasserfläche, ungefähr  $4\frac{1}{2}$  Zoll senkrecht über der ersten befindlich war. Das Gefäß wurde abwechselnd der Temperatur des Wohnzimmers und der kalten Luft ausgesetzt, und zwar an beiden Orten eine Zeit lang, damit man, während des langsamen Erkaltes und Erwärmens, die Temperatur beobachten konnte. Hierdurch ergab es sich, daß das obere Thermometer anfänglich beim Erkalten eine größere und beim Erwärmen eine geringere Temperatur als das untere zeigte, jedoch nur bis zu einem gewissen Grade, wo dann ein entgegengesetztes Verhalten eintrat und späterhin fort dauerte. In beiden Fällen geschahen die Aenderungen am unteren Thermometer langsamer, als am oberen; und die Tempe-

ratur, bei welcher dieses von dem oberen eingeholt wurde, muß die Temperatur für die größte Dichte des Wassers seyn.

Diese ungleiche Geschwindigkeit in den Temperaturänderungen ist wesentlich zur Hervorbringung des gesuchten Resultats, bewirkt aber zugleich, daß die gefundenen Bestimmungen nicht so gut mit einander übereinstimmen; wie man wohl vermuthen könnte. Man hat jedoch ohne hinlänglichen Grund geglaubt, daß die Abweichungen um so beträchtlicher seyen, je mehr die Luft rings um das Gefäß eine größere oder geringere Temperatur als das Wasser habe. Die Wärmeänderungen geschehen nämlich an der Oberfläche schneller, als die Wirkungen von ihnen am Boden merkbar werden, und daraus folgt, daß die gesuchte Temperatur beim Erwärmen zu klein und beim Erkalten zu groß gefunden wird. Dies könnte nun im ersten Augenblicke zu dem Schlusse verleiten, daß man die gesuchte Temperatur in dem Maasse richtiger finden werde, als man eine geringere Erwärmung oder Erkaltung anwendet; allein in dem Maasse, als dies geschieht, hören auch die Aenderungen an den zu beobachtenden Thermometern auf. Man hat ferner gemeint, es sey bei diesem Versuche eine wesentliche Bedingung, daß die Luft an das Gefäß nahe die Temperatur habe, welche das Wasser zu seiner größten Dichte erfordert, damit man das Wasser lange ruhig stehen lassen könne und Zeit habe, sich von der gleichen Temperatur beider Thermometer zu überzeugen. Es scheint also, man habe mehr die zuletzt überall im Wasser eintretende und fort-dauernde Gleichheit der Temperatur bezwecken wol-

len, als diejenige, welche sich, während das Wasser von außen her erwärmt oder erkaltet wird, auf einige Augenblicke einstellt. Dadurch hat man den Umstand, der eigentlich erreicht werden soll, übersehen und sich bei einem andern aufgehalten, der in dieser Sache nichts entscheidet. Man sieht leicht ein, daß die Temperatur in den oberen Wasserschichten nur dann der in den untern Schichten dauernd gleich bleiben könne, wenn die ganze Wassermasse gleiche Temperatur mit der Luft erhalten hat, und daß dies bei einer jeglichen Temperatur geschehen müsse, sobald nur dem Wasser hinlängliche Zeit zur Annahme dieser Temperatur gelassen wird. Wenn folglich Tralles angiebt, daß die größte Dichte des Wassers bei  $+4,35^{\circ}$  C. Statt finde, und zum Beweise, die richtige Temperatur gefunden zu haben, anführt, daß das obere Thermometer im Wasser mehrere Tage hindurch dieselbe Temperatur gezeigt habe, so sieht man leicht, wie unsicher sein Schluß gewesen ist. Sein Versuch beweist nicht mehr, als daß die Luft, welche das Gefäß umgab, die nämliche Temperatur wie das Wasser hatte. Er würde zu einem andern, gleich fehlerhaften, Resultate gekommen seyn, wenn die Temperatur der Luft z. B.  $3^{\circ},35$  gewesen wäre; denn auch alsdann würde das Wasser überall, also auch bei dem obern und untern Thermometer, die eben genannte Temperatur nach einiger Zeit erhalten haben und die so bestimmte Wärme für die größte Dichte des Wassers um  $1^{\circ}$  von der ersten verschieden gewesen seyn. — Man hat also den gesuchten Wärmegrad als bekannt vorausgesetzt.

Deshalb wählte ich bei meinen Versuchen die Temperatur der Luft absichtlich verschieden von der des Wassers, nahm indess die Differenz mit der gesuchten Wärme nicht sehr groß, damit ich nicht lange auf den entscheidenden Augenblick zu warten hatte. Ich zeichnete die Wärmegrade nur in der Nähe und auf beiden Seiten derjenigen Temperatur auf, welche *zuerst* die beiden Thermometer gemeinschaftlich erhalten. Diese ist es, welche, in Folge des durch die Wärme geänderten specifischen Gewichts der Wassertheilchen, von deren Bewegung herrührt, und steht durchaus in keiner Beziehung mit der gemeinschaftlichen Temperatur beider Thermometer, welche sich nach einiger Zeit zum zweiten Male einstellt und durch die Wärme der umgebenden Luft bestimmt wird. Die letztere giebt, aus dem oben angeführten Grunde, keinen Aufschluss über die gegenwärtige Aufgabe.

Bei diesen Versuchen gebraucht man, mehr wie irgendwo, eine große Genauigkeit in den Angaben des Thermometers. Deshalb sind die hier angewandten Thermometer nach einer Methode corrigirt, die ich, nebst Correctionstabeln, in einer im J. 1825 zu Åbo ausgegebenen akademischen Abhandlung mitgetheilt habe \*).

\*) Je öfter ich diese Correctionsmethode angewandt habe, desto mehr bin ich durch sie überzeugt worden, daß schwerlich ein Thermometer gefunden werde, welches ganz fehlerfrei ist und nicht einer Correction bedarf; es sey denn, ich müßte glauben, ein böses Geschick habe mir von allen Seiten nur die schlechtesten Instrumente zugeführt. Ich habe nämlich gefun-

Das Folgende enthält die Beobachtungen, welche ich aufgezeichnet habe. Es ist dabei zu bemerken, daß ich an den von mir gebrauchten Thermometern kleinere Theile als Zehntel eines Grades unmittelbar nicht ablesen konnte, sondern daß die Hundertel durch die Correction der Thermometer entstanden sind.

den, daß ein Thermometer von Newmann in London Correctionen erforderte zwischen  $0^{\circ}$  und  $+3^{\circ},61$  F.; eins von Frecot in Paris zwischen  $+0^{\circ},39$  und  $-1^{\circ},35$  C., eins aus Vauquelin's chemischer Fabrik in Paris zwischen  $+4^{\circ},69$  und  $-1^{\circ},55$  C., eins von Rospini in Petersburg zwischen  $-0^{\circ},1$  und  $+0^{\circ},3$  R., eins von Hasselström in Stockholm zwischen  $-0^{\circ},8$  und  $-1^{\circ},26$ , eins von Cetti in Stockholm zwischen  $0^{\circ}$  und  $+1^{\circ},60$  C., eins von Bucker in Åbo zwischen  $+0^{\circ},20$  und  $-0^{\circ},12$  R., und eins, das ich selbst verfertigt hatte, zwischen  $-0^{\circ},2$  (um so viel hatte sich während eines Jahres der Frostpunkt verändert) und  $+0^{\circ},06$  C. Diese Beispiele führe ich hier zur Warnung für Andere an, um zu zeigen, daß es nöthig sey, jedes Thermometer vor dem Gebrauche zu prüfen. [Der Hr. Verfasser beschreibt nun die von ihm aufgefunden Methode, die Thermometer zu berichtigen, welche er, schon ehe ihm die von Hrn. Prof. Bessel bekannt war, angewandt hatte. Da sie indeß von letzterer nur wenig abweicht, und diese im Bd. 32. S. 287 dieser Annalen von Hrn. Prof. Bessel ausführlich mitgetheilt ist, so glaube ich, sie, um Wiederholung zu vermeiden und Raum zu ersparen, hier übergehen zu können. P.]

## Beim Erkalten des Wassers

I		II		III		IV		V		VI		VII	
Lufttemperatur = -4° 5 C.		Lufttemperatur = 0°		Lufttemperatur = +1°		Lufttemperatur = +1° 5		Lufttemperatur = +1° 8		Lufttemperatur = +2° 5		Lufttemperatur = +3°	
Unteres Thermometer	Oberes Thermometer	Unteres Thermometer	Oberes Thermometer	Unteres Thermometer	Oberes Thermometer	Unteres Thermometer	Oberes Thermometer	Unteres Thermometer	Oberes Thermometer	Unteres Thermometer	Oberes Thermometer	Unteres Thermometer	Oberes Thermometer
+ 3° 24	+ 9° 66	+ 5° 25	+ 5° 39	+ 4° 47	+ 4° 56	+ 5° 25	+ 5° 38	+ 4° 95	+ 6° 19	+ 5° 65	+ 6° 80	+ 5° 45	+ 6° 38
6.05	7.93	4.66	4.78	4.37	4.49	4.85	4.98	4.56	5.28	5.45	6.29	5.15	5.68
5.05	6.47	4.28	3.59	4.34	3.99	4.47	4.58	4.47	4.88	4.95	5.59	4.67	4.88
4.39	4.18	3.80	2.70	3.90	3.39	4.28	4.28	4.37	4.18	4.76	4.98	4.47	4.50
3.53	2.09	3.42	2.60	3.70	3.19	4.19	3.69	4.33	3.79	4.37	4.68	4.38	4.00
2.57	3.10	3.32	2.40	3.37	2.89	3.80	3.29	3.80	3.10	4.37	4.58	4.28	3.70
						3.61	3.09	3.61	2.90	4.28	4.38	4.23	3.70
								3.23	2.50	3.99	3.69		
								3.80		3.70	3.39		
								3.70		3.70	3.29		

## Beim Erwärmen des Wassers. Temperatur der Luft = +20° C.

VIII		IX		X		XI		XII		XIII		XIV	
Unteres Thermometer	Oberes Thermometer	Unteres Thermometer	Oberes Thermometer	Unteres Thermometer	Oberes Thermometer	Unteres Thermometer	Oberes Thermometer	Unteres Thermometer	Oberes Thermometer	Unteres Thermometer	Oberes Thermometer	Unteres Thermometer	Oberes Thermometer
+ 2° 93	+ 2° 34	+ 3° 10	+ 2° 73	+ 3° 23	+ 2° 90	+ 3° 13	+ 2° 80	+ 2° 45	+ 1° 40	+ 3° 61	+ 3° 40	+ 3° 17	+ 2° 70
3,13	2,75	3,20	2,78	3,32	3,00	3,42	3,40	2,74	2,09	3,69	3,59	3,40	3,20
3,23	2,96	3,30	2,88	3,41	3,10	3,46	3,69	3,32	2,79	3,70	3,69	3,60	3,40
3,28	3,26	3,34	3,03	3,51	3,30	3,61	4,19	3,51	3,49	3,70	3,89	3,80	4,79
3,32	3,37	3,39	3,13	3,60	3,49	3,70	5,58	3,80	5,58	3,70	4,88	3,80	5,18
3,41	3,58	3,49	3,23	3,70	3,79	3,99	6,19	4,76	6,49	3,80	5,33	4,19	5,98
3,42	3,68	3,58	3,32	3,70	4,19	4,38	6,48	5,15	6,91	4,09	5,99	5,05	6,91
3,42	3,89	3,59	3,51	3,70	4,58	4,66	7,00	5,35	7,31	5,15	7,00		
5,47	4,10	3,50	3,70	3,79	5,28	4,81	7,21			5,95	8,00		
3,51	5,14	3,64	3,99	3,79	5,69	5,15	7,52						
		3,69	4,19	3,90	5,89								
		3,69	4,95	4,19	6,19								
		3,79	5,45	4,47	6,30								
		3,89	5,95	4,77	6,50								
		4,48	6,35	4,86	6,70								
		4,80	6,85	5,25	7,10								



Um aus diesen Beobachtungen das gesuchte Resultat zu finden, kann man in den angeführten Reihen einen jeden Stand  $x$  des untern Thermometers als eine solche Funktion seines Unterschiedes  $y$  mit dem entsprechenden Stande des oberen Thermometers betrachten, daß  $x = a + by$  ist, worin  $y = a$  den Werth von  $x = a$  bestimmt, und dies ist der Wärmegrad, den jede Reihe für die größte Dichtigkeit des Wassers liefert. Da man nämlich die Relation zwischen  $x$  und  $y$  nicht weiter zu kennen braucht, als in Bezug auf den Durchschnittspunkt der Linien, welche deren entsprechende Werthe bestimmen, und deshalb hier auch nur einige wenige Beobachtungen auf beiden Seiten dieses Durchschnittspunkts gebraucht werden, so reicht es bei dieser Aufgabe hin, eine lineare Gleichung anzuwenden. Diese auf die obigen Versuche angewandt und nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, giebt die folgenden Resultate;

## R e i h e I.

$$x = 8.24 ; 6.95 ; 5.65 ; 4.39 ; 3.53 ; 2.57$$

$$y = 1.42 ; 0.98 ; 0.75 ; -0.21 ; -1.44 ; -1.47$$

$$\text{also; } 8.24 = a + 1.42 \cdot b \text{ woraus } 0 = 186.46 - 31.33 \cdot a - 12.966 \cdot b$$

$$6.95 = a + 0.98 \cdot b \quad 0 = -31.33 + 6.00 \cdot a + 0.030 \cdot b$$

$$5.65 = a + 0.75 \cdot b \quad 0 = -12.97 + 0.03 \cdot a + 7.818 \cdot b$$

$$4.39 = a - 0.21 \cdot b \quad \text{und } a = 5^{\circ}, 213$$

$$3.53 = a - 1.44 \cdot b \quad \text{mit dem wahrscheinlichen Beobachtungs-}$$

$$2.57 = a - 1.47 \cdot b \quad \text{fehler } \sigma'(a) = 0^{\circ}, 169$$

## R e i h e II.

$$x = 3.25 ; 4.66 ; 4.28 ; 3.80 ; 3.42 ; 3.32$$

$$y = 0.14 ; 0.12 ; -0.69 ; -1.10 ; -0.82 ; -0.92$$

[ 539 ]

$$\begin{aligned}
 \text{also: } 5,25 &= a + 0,14 \cdot b & \text{woraus } 0 &= 104,76 - 24,73 \cdot a + 11,698 \cdot b \\
 4,66 &= a + 0,12 \cdot b & 0 &= -24,73 + 6,00 \cdot a - 3,270 \cdot b \\
 4,28 &= a - 0,69 \cdot b & 0 &= 11,70 - 3,27 \cdot a + 3,239 \cdot b \\
 3,80 &= a - 1,10 \cdot b & \text{und } a &= 4^{\circ},783 \\
 3,42 &= a - 0,82 \cdot b & \text{mit } a' &= 0^{\circ},148 \\
 3,32 &= a - 0,92 \cdot b
 \end{aligned}$$

R e i h e III.

$$\begin{aligned}
 x &= 4,47 ; 4,37 ; 4,34 ; 3,90 ; 3,70 ; 3,37 \\
 y &= 0,12 ; 0,12 ; -0,35 ; -0,51 ; -0,51 ; -0,48 \\
 \text{also: } 4,47 &= a + 0,12 \cdot b & \text{woraus } 0 &= 98,17 - 24,15 \cdot a + 5,952 \cdot b \\
 4,37 &= a + 0,12 \cdot b & 0 &= -24,15 + 6,00 \cdot a + 1,610 \cdot b \\
 4,34 &= a - 0,35 \cdot b & 0 &= 5,95 - 1,61 \cdot a + 0,902 \cdot b \\
 3,90 &= a - 0,51 \cdot b & \text{und } a &= 4^{\circ},329 \\
 3,70 &= a - 0,51 \cdot b & \text{mit } a' &= 0^{\circ},104 \\
 3,37 &= a - 0,48 \cdot b
 \end{aligned}$$

R e i h e IV.

$$\begin{aligned}
 5,25 &= a + 0,13 \cdot b & \text{woraus } 0 &= 134,41 - 30,45 \cdot a + 4,106 \cdot b \\
 4,35 &= a + 0,13 \cdot b & 0 &= -30,45 + 7,00 \cdot a + 1,160 \cdot b \\
 4,47 &= a + 0,11 \cdot b & 0 &= 4,11 - 1,16 \cdot a + 0,826 \cdot b \\
 4,28 &= a \\
 4,19 &= a - 0,50 \cdot b & \text{und } a &= 4^{\circ},595 \\
 3,80 &= a - 0,51 \cdot b & \text{mit } a' &= 0^{\circ},081 \\
 3,61 &= a - 0,52 \cdot b
 \end{aligned}$$

R e i h e V.

$$\begin{aligned}
 4,95 &= a + 1,24 \cdot b & \text{woraus } 0 &= 141,03 - 33,32 \cdot a - 0,504 \cdot b \\
 4,56 &= a + 0,72 \cdot b & 0 &= -33,32 + 8,00 \cdot a - 0,500 \cdot b \\
 4,47 &= a + 0,41 \cdot b & 0 &= -0,50 - 0,50 \cdot a + 3,981 \cdot b \\
 4,37 &= a - 0,19 \cdot b \\
 4,33 &= a - 0,54 \cdot b & \text{und } a &= 4^{\circ},206 \\
 3,80 &= a - 0,70 \cdot b & \text{mit } a' &= 0^{\circ},068 \\
 3,61 &= a - 0,71 \cdot b \\
 3,23 &= a - 0,73 \cdot b
 \end{aligned}$$

R e i h e VI.

$$\begin{aligned}
 5,65 &= a + 1,15 \cdot b & \text{woraus } 0 &\approx 210,23 - 45,42 \cdot a - 13,543 \cdot b \\
 5,45 &= a + 0,84 \cdot b & 0 &= -45,42 + 10,00 \cdot a + 2,250 \cdot b \\
 4,95 &= a + 0,64 \cdot b & 0 &= -13,34 + 2,25 \cdot a + 3,011 \cdot b \\
 4,76 &= a + 0,22 \cdot b \\
 4,47 &= a + 0,21 \cdot b & \text{und } a &\approx 4^{\circ},261 \\
 4,37 &= a + 0,21 \cdot b & \text{mit } \varepsilon''(a) &= 0^{\circ},014 \\
 4,28 &= a + 0,10 \cdot b \\
 3,99 &= a - 0,30 \cdot b \\
 3,80 &= a - 0,41 \cdot b \\
 3,70 &= a - 0,41 \cdot b
 \end{aligned}$$

R e i h e VII.

$$\begin{aligned}
 5,43 &= a + 0,93 \cdot b & \text{woraus } 0 &\approx 153,41 - 32,63 \cdot a - 2,524 \cdot b \\
 5,15 &= a + 0,53 \cdot b & 0 &= -32,63 + 7,00 \cdot a + 0,210 \cdot b \\
 4,67 &= a + 0,21 \cdot b & 0 &= -2,52 + 0,21 \cdot a + 1,953 \cdot b \\
 4,47 &= a + 0,03 \cdot b \\
 4,38 &= a - 0,38 \cdot b & \text{und } a &\approx 4^{\circ},638 \\
 4,28 &= a - 0,58 \cdot b & \text{mit } \varepsilon''(a) &= 0^{\circ},040 \\
 4,23 &= a - 0,53 \cdot b
 \end{aligned}$$

R e i h e VIII.

$$\begin{aligned}
 2,93 &= a + 0,59 \cdot b & \text{woraus } 0 &\approx 97,66 - 29,61 \cdot a + 1,573 \cdot b \\
 3,13 &= a + 0,38 \cdot b & 0 &= -29,61 + 9,00 \cdot a - 0,320 \cdot b \\
 3,23 &= a + 0,27 \cdot b & 0 &= 1,57 - 0,32 \cdot a + 1,278 \cdot b \\
 3,28 &= a + 0,02 \cdot b \\
 3,32 &= a - 0,05 \cdot b & \text{und } a &\approx 3^{\circ},275 \\
 3,41 &= a - 0,17 \cdot b & \text{mit } \varepsilon''(a) &= 0^{\circ},014 \\
 3,42 &= a - 0,26 \cdot b \\
 3,42 &= a - 0,47 \cdot b \\
 3,47 &= a - 0,63 \cdot b
 \end{aligned}$$

## R e i h e IX.

$$\begin{aligned}
3,10 &= a + 0,37.b & \text{woraus } 0 &= 218,02 - 58,64.a + 42,239.b \\
3,20 &= a + 0,42.b & 0 &= -58,64 + 16,00.a - 9,500.b \\
5,32 &= a + 0,42.b & 0 &= 42,24 - 9,50.a + 27,036.b \\
8,34 &= a + 0,31.b & & \\
3,39 &= a + 0,26.b & \text{und } a &= 3^{\circ},460 \\
3,49 &= a + 0,26.b & \text{mit } \delta'(a) &= 0^{\circ},114 \\
5,53 &= a + 0,26.b & & \\
3,59 &= a + 0,03.b & & \\
3,59 &= a - 0,11.b & & \\
3,64 &= a - 0,35.b & & \\
3,69 &= a - 0,50.b & & \\
3,69 &= a - 1,36.b & & \\
3,79 &= a - 1,66.b & & \\
3,89 &= a - 2,06.b & & \\
4,48 &= a - 2,87.b & & \\
4,88 &= a - 2,97.b & &
\end{aligned}$$

## R e i h e X.

$$\begin{aligned}
3,23 &= a + 0,33.b & \text{woraus } 0 &= 255,53 - 63,28.a + 65,713.b \\
3,32 &= a + 0,52.b & 0 &= -63,28 + 16,00.a - 14,930.b \\
3,41 &= a + 0,31.b & 0 &= 65,71 - 14,93.a + 28,242.b \\
3,51 &= a + 0,21.b & & \\
3,60 &= a + 0,11.b & \text{und } a &= 3^{\circ},527 \\
3,70 &= a - 0,09.b & \text{mit } a''(a) &= 0^{\circ},089 \\
3,70 &= a - 0,49.b & & \\
3,70 &= a - 1,18.b & & \\
3,79 &= a - 1,49.b & & \\
3,79 &= a - 1,90.b & & \\
3,99 &= a - 1,90.b & & \\
4,19 &= a - 1,91.b & & \\
4,47 &= a - 1,83.b & & \\
4,77 &= a - 1,73.b & & \\
4,86 &= a - 1,84.b & & \\
5,25 &= a - 1,85.b & &
\end{aligned}$$

## R e i h e XI.

$$\begin{aligned}
3,13 &= a + 0,33 \cdot b & \text{woraus } 0 &= 167,05 - 42,35 \cdot a + 61,230 \cdot b \\
3,42 &= a + 0,02 \cdot b & 0 &= -40,35 + 10,00 \cdot a - 13,700 \cdot b \\
3,46 &= a - 0,23 \cdot b & 0 &= 61,23 - 13,70 \cdot a + 29,898 \cdot b \\
3,61 &= a - 0,58 \cdot b \\
3,70 &= a - 1,88 \cdot b & \text{und } a &= 3^{\circ},298 \\
3,99 &= a - 2,20 \cdot b & \text{mit } s''(a) &= 0^{\circ},120 \\
4,38 &= a - 2,10 \cdot b \\
4,66 &= a - 2,33 \cdot b \\
4,85 &= a - 2,36 \cdot b \\
5,15 &= a - 2,37 \cdot b
\end{aligned}$$

## R e i h e XII.

$$\begin{aligned}
2,45 &= a + 1,05 \cdot b & \text{woraus } 0 &= 125,00 - 31,08 \cdot a + 28,419 \cdot b \\
2,74 &= a + 0,65 \cdot b & 0 &= -31,08 + 8,00 \cdot a - 4,940 \cdot b \\
3,32 &= a + 0,53 \cdot b & 0 &= 28,42 - 4,99 \cdot a + 14,946 \cdot b \\
3,51 &= a + 0,02 \cdot b \\
3,80 &= a - 1,78 \cdot b & \text{und } a &= 3^{\circ},409 \\
4,76 &= a - 1,73 \cdot b & \text{mit } s''(a) &= 0^{\circ},118 \\
5,15 &= a - 1,76 \cdot b \\
5,35 &= a - 1,97 \cdot b
\end{aligned}$$

## R e i h e XIII.

$$\begin{aligned}
3,61 &= a + 0,21 \cdot b & \text{woraus } 0 &= 160,81 - 37,39 \cdot a + 39,036 \cdot b \\
3,69 &= a + 0,20 \cdot b & 0 &= -37,39 + 9,00 \cdot a + 8,330 \cdot b \\
3,70 &= a + 0,01 \cdot b & 0 &= 39,04 - 8,33 \cdot a + 15,244 \cdot b \\
3,70 &= a - 0,19 \cdot b \\
3,70 &= a - 0,18 \cdot b & \text{und } a &= 3^{\circ},609 \\
3,89 &= a - 1,58 \cdot b & \text{mit } s''(a) &= 0^{\circ},192 \\
4,09 &= a - 1,90 \cdot b \\
5,15 &= a - 1,85 \cdot b \\
5,95 &= a - 2,05 \cdot b
\end{aligned}$$

## R e i h e XIV.

$$3,17 = a + 0,47 \cdot b \quad \text{woraus } 0 = 106,51 - 27,01 \cdot a + 25,021 \cdot b$$

$$3,40 = a + 0,20 \cdot b \quad 0 = -27,01 + 7,00 \cdot a - 5,680 \cdot b$$

$$3,60 = a \quad 0 = 23,02 - 5,68 \cdot a + 10,840 \cdot b$$

$$3,80 = a - 0,99 \cdot b$$

$$3,80 = a - 1,68 \cdot b \quad \text{und } a = 3^{\circ},453$$

$$4,19 = a - 1,79 \cdot b \quad \text{mit } s'(a) = 0^{\circ},117$$

$$5,05 = a - 1,89 \cdot b$$

Wenn man die so gefundenen Werthe zusammenstellt, erhält man den nachstehenden Vergleich:

Beim Erkalten			Bei Erwärmung in einer Luft von 20° C. Temperatur		
Reihe	Lufttemperatur	a	Reihe	a	wahrscheinliche Unsicherheit
I	-4°,5	5°,213	VII	3°,275	0°,014
II	0	4,783	IX	3,460	0,114
III	+1,0	4,314	X	3,527	0,089
IV	1,5	4,505	XI	4,203	0,120
V	1,8	4,206	XII	3,409	0,118
VI	2,	4,261	XIII	3,710	0,192
VII	3	4,633	XIV	4,453	0,117
Arithmetisches Mittel		4,575			3,453

Mittlerer Werth von  $a = 4^{\circ},004$ .

Man sieht hieraus, daß diese Bestimmung über den der größten Dichte des Wassers entsprechenden Wärmegrad gänzlich zusammenfällt mit dem durch Wägung erhaltenen Resultate, weil der Unterschied mit jenem nur 0°,1 beträgt, und also innerhalb der wahrscheinlichen Unsicherheit dieser Resultate liegt. Zugleich ist es auch hierdurch entschieden, daß das hier angewandte Verfahren keine so sichere Bestimmung liefert, wie die Methode der Wägung. Denn was zunächst die Werthe von  $a$  betrifft, welche durch Beobachtungen beim Erkalten des Wassers gefunden

worden, so sieht man leicht, daß, obgleich die wahrscheinliche Unsicherheit in jeder Reihe sehr gering ist, doch unter ihnen größere Unterschiede vorhanden sind, als daß diese bloß den Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden könnten. Wenn man, um sich hiervon zu überzeugen, die Differenz einer jeden einzelnen Bestimmung von dem Mittelwerthe aus ihnen allen aufsucht, und nun mit Hülfe dieser Differenzen, bei Voraussetzung, daß sie alle von derselben äußern Ursache herrühren, den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler bestimmt; so findet man diesen  $= 0^{\circ},262$ . Dieser Fehler ist fast doppelt so groß, als die wahrscheinliche Unsicherheit, die jede Beobachtungsreihe, besonders berechnet, liefert, und beträgt drei Mal so viel, als das Mittel von allen wahrscheinlichen Unsicherheiten. Es hat folglich bei den Beobachtungsreihen I bis VII eine wechselseitig ungleich wirkende Ursache Statt gefunden, und deshalb kann auch nicht aus ihnen das Mittel von  $\alpha$  genommen werden, mit Berücksichtigung der zu einer jeden Reihe besonders gehörigen wahrscheinlichen Unsicherheit.

Vergleicht man die Reihen I und II mit III und V, so sollte man glauben, daß diese Ursache in der ungleichen Temperatur der umgebenden Luft, durch welche die Erkaltung ungleich beschleunigt oder verzögert worden ist, gesucht werden müsse; die Vergleiche der Reihen III mit IV, V mit VI und VII, so wie der Reihen III, IV, V und VI mit VII stimmen aber dagegen, so daß man schließen muß, daß jede beschleunigte oder verzögerte Erkaltung das Verhältniß zwischen dem Stande der beiden in Wasser gesenkten Thermometer abändert. Hierdurch wird auch der

zuvor gemachte Schluß bestätigt: daß es zu einem sichereren Resultate bei diesen Versuchen nicht nöthig ist, die Temperatur der Luft nahe gleich mit der zu wählen, welche das Wasser zu seiner größten Dichte erfordert. Dagegen glaube ich, daß die hier gesuchte Ursache in einer gelinden Bewegung liegt, welche während des Versuches zufälligerweise im Wasser stattfand. Das Wasser mit den Thermometern stand in einem offenen Fenster, wo zuweilen so viel Luftzug vorhanden war, daß die Thermometer und mit ihnen das Wasser, in eine obgleich sehr geringe Bewegung versetzt wurden, welche aller Wahrscheinlichkeit nach das Fließen des theils leichter, theils schwerer gewordenen Wassers beschleunigen mußte. Da nun dieser Luftzug nicht allemal gleich stark war, so scheinen die Unterschiede in den Resultaten hiervon abgeleitet werden zu müssen; doch habe ich bei diesen Versuchen nicht so genau darauf achten können, daß ich jetzt im Stande wäre anzugeben, bei welchen Reihen ein Luftzug statt gefunden habe.

Was ferner die mittelst der Reihen VIII bis XIV gefundenen Werthe von  $\alpha$  betrifft, so ergibt sich, daß sie mit einander so nahe übereinstimmen, daß die Unterschiede nur bloß als Beobachtungsfehler betrachtet werden müssen. Ein solcher, wahrscheinlich für alle gemeinschaftlicher, aus dem Unterschiede von dem arithmetischen Mittel berechneter, Beobachtungsfehler wurde  $= 0^{\circ},089$  gefunden, welcher, wie man sieht, innerhalb der Gränzen der besonderen Werthe der wahrscheinlichen Unsicherheit enthalten ist.



Wenn man aber die durch das Erkalten und Erwärmen des Wassers gefundenen Werthe  $\alpha = 4^{\circ},575 \pm 0^{\circ},262$  und  $\alpha = 3^{\circ},433 \pm 0^{\circ},049$  mit einander vergleicht, so sieht man leicht, daß selbst die Gränzwerthe sich nicht einander erreichen, und daß folglich die Verschiedenheit zwischen ihnen nicht bloß von Beobachtungsfehlern herrührt, sondern einer andern besondern Ursache zugeschrieben werden muß. Diese kann nicht in einem trügen Gange der angewandten Thermometer gesucht werden, da die Kugel eines jeden Thermometers nur klein war, zwischen  $2\frac{1}{2}$  und 3 Decimallinien im Durchmesser hielt, und die Temperatur sich bei diesen Versuchen so langsam änderte, daß dieselbe durch die Thermometer genau angezeigt werden konnte. Dagegen ist klar, daß, weil, wie oben bemerkt, die Aenderungen des oberen Thermometers, sowohl beim Erwärmen als beim Erkalten, schneller geschehen, als die des unteren, dieses eine, im Wärmeleitungsvermögen des Wassers, und folglich in der Bewegung der inneren Theile desselben, vermuthete Trägheit merkbar macht. Man wird zu dem Schlusse geführt, daß einige Zeit, wenn auch nur eine kurze, verstreichen muß, ehe die Wassertheilchen, deren specifisches Gewicht durch die vergrößerte oder verringerte Wärme schon geändert ist, anfangen sich zu bewegen, und dadurch scheint die in Rede stehende Abweichung zu entspringen, so wie ein constanter, aber nicht zu bestimmender Fehler in den Beobachtungen, welcher macht, daß das gefundene Resultat weniger zuverlässig ist, als das durch Wägung erhaltene.

---