Ueber die reellen Züge algebraischer Curven.

Von

David Hilbert in Königsberg i. Pr.

A. Harnack*) hat bewiesen, dass die Anzahl der reellen Züge einer ebenen algebraischen Curve n^{ter} Ordnung höchstens gleich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ ist und er hat zugleich ein Verfahren angegeben, mittelst dessen man in der That ebene Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ reellen Zügen construiren kann. Da eine solche Curve mit der Maximalzahl reeller Züge keinenfalls einen Doppelpunkt besitzt, so darf kein Zug der Curve sich selber oder einen anderen Zug durchschneiden und die Curve besteht daher, wenn die Ordnung n gerade ist, nur aus paaren Zügen. Ist die Ordnung n ungerade, so besitzt die Curve einen unpaaren Zug; die übrigen Züge sind sämmtlich paar.

Um die wesentlichen Eigenschaften eines paaren und eines unpaaren Zuges klar hervortreten zu lassen**), deuten wir die ternären homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 als Coordinaten eines Punktes im Raume, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, so dass jedem Punkte der ursprünglichen Ebene eine durch den Anfangspunkt O gehende gerade Linie und jedem Zuge der ebenen Curve ein Kegel entspricht, dessen Spitze im Anfangspunkte O liegt. Ein solcher Kegel theilt nun den Raum entweder in zwei oder in drei Gebiete. Im ersteren Falle ist es möglich, eine jede durch den Anfangspunkt O gehende Gerade durch Drehung um O in jede andere durch O gehende Gerade überzuführen, ohne den Kegel zu überschreiten d. h. ohne dass die Gerade inzwischen einmal mit einer Erzeugenden des Kegels zusammenfällt. Es wird dann der Kegel und der entsprechende Curvenzug ein unpaarer genannt. Im zweiten Falle gehören zwei Raumgebiete als

*) Mathematische Annalen Bd. 10; S. 189.

**) Vgl. Möbius, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung, Gesammelte Werke, Bd. 2 und v. Staudt, Geometrie der Lage S. 81.

Scheitelräume zusammen, insofern alle geraden Linien, welche das eine erfüllen, nach ihrer Verlängerung in das andere Gebiet hineinragen. Der Kegel und der entsprechende Curvenzug heissen dann paar. Die beiden zusammengehörigen Raumgebiete und das entsprechende Gebiet der Ebene bilden das Innere des Kegels oder der Curve. Alle übrigen durch O hindurchlaufenden Geraden erfüllen das dritte Raumgebiet. Dieses und das entsprechende Gebiet der Ebene heisst das äussere Gebiet. Zwei unpaare Züge schneiden sich in einer ungeraden Anzahl von Punkten; zwei paare Züge, sowie ein unpaarer und ein paarer Zug schneiden sich in einer geraden Anzahl von Punkten. Jeder durch das Innere eines paaren Zuges gelegte unpaare Zug schneidet den paaren Zug wenigstens in zwei Punkten.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist das Innere und das Aeussere eines paaren Curvenzuges in bestimmter Weise unterschieden und wenn daher eine Curve mit mehreren Zügen gegeben ist, so können wir für jeden einzelnen paaren Zug angeben, welche Züge ausserhalb oder innerhalb desselben liegen und welche denselben umschliessen. Was hierbei die verschiedenen Möglichkeiten anbetrifft, so erscheint es vor allem nöthig, die äussersten Vorkommnisse bei der Gruppirung der Züge in Betracht zu ziehen und wir untersuchen daher im Folgenden die Frage, wie viele von den Zügen einer Curve mit der Maximalzahl reeller Züge höchstens in einander eingeschachtelt sein können d. h. wie viele Züge derart liegen können, dass der erste Zug vollständig im Inneren des zweiten, der zweite im Inneren des dritten Zuges verläuft u. s. f.

Man erkennt leicht, *dass bei einer geraden Ordnung n höchstens $\frac{n}{2}-1$ Züge in der eben beschriebenen Weise eingeschachtelt sind.* Denn gäbe es $\frac{n}{2}$ eingeschachtelte Züge, so nehme man auf einem der übrigen Züge einen beliebigen Punkt A an und verbinde diesen Punkt A mit einem Punkte des zu innerst gelegenen Curvenzuges durch eine Gerade. Da die so gelegte Gerade den Zug, auf welchem A liegt, und ausserdem jeden der $\frac{n}{2}$ eingeschachtelten Züge mindestens in 2 Punkten trifft, so hätte sie mit der Curve im Ganzen wenigstens $n+2$ Punkte gemein, was unmöglich ist.

Wenn wir die Existenz einer Curve der geraden Ordnung n mit der Maximalzahl reeller Züge annehmen, von denen in der That $\frac{n}{2}-1$ auf die vorhin beschriebene Weise in einander eingeschachtelt liegen, so ist leicht ersichtlich, dass die übrigen $\frac{1}{2}(n^2-4n+6)$ Züge sämmtlich unter einander getrennt verlaufen. Denn würde auch nur einer dieser Züge einen anderen umschliessen, so hätte die Verbindungslinie eines Punktes des letzteren Zuges mit einem Punkte des zu innerst gelegenen Zuges der Curve mindestens $n+2$ Punkte gemein und dieser Fall ist unmöglich. Dagegen hindert nichts, dass die übrigen $\frac{1}{2}(n^2-4n+6)$ Züge auf verschiedene Weise in den ringförmigen Gebieten vertheilt sind, welche durch die $\frac{n}{2}-1$ eingeschachtelten Züge gebildet werden.

Ist die Ordnung n ungerade, so besitzt die Curve einen unpaaren Zug und *es sind höchstens* $\frac{1}{2}(n-3)$ *paare Züge der Curve in einander eingeschachtelt.* Denn gäbe es $\frac{1}{2}(n-1)$ eingeschachtelte Züge, so nehme man auf einem der übrigen Züge einen beliebigen Punkt an und verbinde diesen Punkt mit einem Punkte des zu innerst gelegenen Curvenzuges durch eine Gerade. Da die so gelegte Gerade ausserdem den unpaaren Zug der Curve wenigstens in einem Punkte schneiden muss, so hätte sie mit der Curve im Ganzen wenigstens $n+2$ Punkte gemein, was unmöglich ist. Die übrigen $\frac{1}{2}(n^2-4n+7)$ Züge liegen wie vorhin untereinander getrennt.

Wir wollen jetzt zeigen, *dass Curven von der in Rede stehenden Art in der That existiren.* Zu dem Zwecke nehmen wir an, es sei $f=0$ die Gleichung einer Curve von der Ordnung n mit der Maximalzahl reeller Züge, unter denen, jenachdem n gerade oder ungerade ist, die $\frac{n}{2}-1$ Züge $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{\frac{n}{2}-1}$ beziehungsweise die $\frac{1}{2}(n-3)$ Züge $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{\frac{1}{2}(n-3)}$ auf die verlangte Weise in einander eingeschachtelt sind. Ausserdem möge es eine Ellipse $k=0$ geben, welche entweder den äussersten Zug $Z_{\frac{n}{2}-1}$ beziehungsweise $Z_{\frac{1}{2}(n-3)}$ umschliesst oder ganz im innersten Zuge Z_1 liegt oder allgemein den Zug Z_ν umschliesst und zugleich im Innern des Zuges $Z_{\nu+1}$ liegt, wobei ν eine der Zahlen $1, 2, \cdots, \frac{n}{2}-2$ beziehungsweise eine der Zahlen $1, 2, \cdots, \frac{1}{2}(n-5)$ bedeutet. Diese Ellipse $k=0$ schneide einen der übrigen $\frac{1}{2}(n^2-4n+6)$ beziehungsweise $\frac{1}{2}(n^2-4n+7)$ Züge in $2n$ Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ und zwar derart, dass letztere als Punkte der Ellipse in der nämlichen Reihe aufeinanderfolgen, wie wenn wir den Curvenzug durchlaufen. Wir nehmen nun auf der Ellipse zwischen zweien dieser Punkte, etwa zwischen A_1 und A_2 $2n+4$ Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+4}$ beliebig an und verbinden B_1 mit B_2, B_3 mit B_4, $\ldots$, B_{2n+3} mit B_{2n+4} durch gerade Linien. Die linken Seiten der Gleichungen dieser geraden Linien multipliciren wir miteinander und bezeichnen das entstehende Product, welches eine ternäre Form von der $n+2^{\text{ten}}$ Ordnung ist, mit g. Wird dann eine Grösse δ genügend klein bestimmt, so ist bei geeignet gewähltem Vorzeichen

$$fk \pm \delta g = 0$$

die Gleichung einer Curve der $n+2^{\text{ten}}$ Ordnung, welche

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1+(2n-1)=\frac{1}{2}(n+1)n+1$$

d. h. die Maximalzahl von Zügen besitzt, unter denen in der That $\frac{n}{2}$ beziehungsweise $\frac{1}{2}(n-1)$ Züge in einander eingeschachtelt sind. Denn jeder der eingeschachtelten Züge $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{\frac{n}{2}-1}$ beziehungsweise $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{\frac{1}{2}(n-3)}$ giebt zu einem nahebei gelegenen Zug der neuen Curve Anlass. Wir bezeichnen die so entstehenden Züge der neuen Curve mit $Z_1', Z_2', \ldots, Z'_{\frac{n}{2}-1}$ beziehungsweise mit $Z_1', Z_2', \ldots, Z'_{\frac{1}{2}(n-3)}$. Zugleich entsteht aus der Ellipse $k=0$ ein besonderer Zug Z', welcher die Ellipse entweder aussen umschliesst oder sich derselben von innen anschmiegt, so dass die Ellipse entweder zwischen den Zügen Z_ν' und Z' oder zwischen den Zügen Z' und $Z'_{\nu+1}$ eingeschachtelt ist. Die Ellipse $k=0$ schneidet einen der neu entstandenen Züge in den $2n+4$ Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+4}$ und zwar derart, dass die Reihenfolge dieser Schnittpunkte auf der Ellipse und auf dem Curvenzuge die nämliche ist. Wir erkennen somit, dass die Ellipse $k=0$ gegenüber der neu gebildeten Curve $n+2^{\text{ter}}$ Ordnung genau die entsprechende Lage einnimmt, wie gegenüber der ursprünglichen Curve n^{ter} Ordnung. Das beschriebene Verfahren ist daher von neuem anwendbar und bei jedem weiteren Schritte gelangen wir zu einer neuen Curve von der verlangten Beschaffenheit, deren Ordnung um zwei Einheiten grösser ist. Da für die niedrigsten Ordnungen die Existenz der Curven von der verlangten Beschaffenheit leicht erkannt wird, so folgt dieselbe allgemein.

Durch das angegebene Verfahren gelangen wir in den Fällen $n=6$, $n=7$, $n=8$ zu folgenden Curven der in Rede stehenden Beschaffenheit.

$\boldsymbol{n=6}$.*) 1) Ein Zug Z, innerhalb desselben ein einzelner Zug, ausserhalb des Zuges Z 9 untereinander getrennt liegende Züge.

*) Diesen Fall $n=6$ habe ich einer weiteren eingehenden Untersuchung unterworfen, wobei ich — freilich auf einem ausserordentlich umständlichen Wege — fand, dass die 11 Züge einer Curve 6^{ter} Ordnung keinesfalls sämmtlich ausserhalb und von einander getrennt verlaufen können. Dieses Resultat erscheint

2) Ein Zug Z, innerhalb desselben 9 getrennt liegende Züge, ausserhalb des Zuges Z ein einzelner Zug.

$n = 7$. 1) Ein Zug Z, innerhalb desselben 2 getrennt liegende Züge, ausserhalb des Zuges Z 12 getrennte paare Züge und ein unpaarer Zug.

2) Ein Zug Z, innerhalb desselben 12 getrennte Züge, ausserhalb des Zuges Z 2 paare Züge und ein unpaarer Zug.

3) Ein Zug Z, innerhalb desselben 3 getrennte Züge, ausserhalb des Zuges Z 11 paare Züge und ein unpaarer Zug.

4) Ein Zug Z, innerhalb desselben 13 getrennte Züge, ausserhalb des Zuges Z ein paarer und ein unpaarer Zug.

$n = 8$. 1) Ein Zug Z_1, innerhalb desselben ein einzelner Zug, ausserhalb des Zuges Z_1 2 getrennt liegende Züge; diese beiden letzteren Züge sowie der Zug Z_1 werden gleichzeitig umschlossen von einem Zuge Z_2, ausserhalb des Zuges Z_2 17 getrennt liegende Züge.

2) Ein Zug Z_1, innerhalb desselben 17 getrennte Züge, ausserhalb des Zuges Z_1 2 getrennt liegende Züge, die beiden letzteren Züge, sowie der Zug Z_1 werden umschlossen von einem Zuge Z_2; ausserhalb des Zuges Z_2 ein einzelner Zug.

3) Ein Zug Z_1, innerhalb desselben ein einzelner Zug, ausserhalb des Zuges Z_1 14 getrennt liegende Züge, diese letzteren 14 Züge sowie der Zug Z_1 werden umschlossen von einem Zuge Z_2, ausserhalb des Zuges Z_2 5 getrennte Züge.

4) Ein Zug Z_1, innerhalb desselben 5 getrennt liegende Züge, ausserhalb des Zuges Z_1 14 Züge, diese 14 Züge sowie der Zug Z_1 werden zugleich umschlossen von einem Zuge Z_2, ausserhalb des Zuges Z_2 ein einzelner Zug.

Die Frage nach der Maximalzahl der reellen Züge gestattet auch für die algebraischen Raumcurven eine vollständige Erledigung.

Wir untersuchen zunächst, aus wie vielen Zügen eine irreducible Raumcurve n^{ter} Ordnung höchstens bestehen kann. Halphen*) und M. Noether**) haben gezeigt, dass eine irreducible nicht ebene Curve n^{ter} Ordnung vom Maximalgeschlecht nothwendig auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt. Dieses Maximalgeschlecht wird $\frac{1}{4}(n-2)^2$

---

mir desshalb von Interesse, weil es zeigt, dass für Curven mit der Maximalzahl von Zügen der topologisch einfachste Fall nicht immer möglich ist. Zugleich folgt aus dem erwähnten Umstande, dass eine Fläche 4^{ter} Ordnung mit 12 Mänteln nicht existiren kann; vgl. die Preisschrift von K. Rohn: „Die Flächen 4^{ter} Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung“ S. 42, wo die Zahl 12 als obere Grenze für die Anzahl der Flächenmäntel angegeben wird.

*) Bull. de la Soc. Math. de France Bd. 2, S. 42.

**) Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven, Crelle's Journal Bd. 93, S. 293.

beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$, jenachdem die Ordnung n gerade oder ungerade ist. Es sei nun eine nicht ebene Curve n^{ter} Ordnung mit der Maximalzahl reeller Züge gegeben; projiciren wir dieselbe von irgend einem Punkte aus auf eine Ebene, so entspricht einem jeden Zuge der Raumcurve ein Zug der ebenen Curve und das Geschlecht der Raumcurve stimmt überein mit dem Geschlechte der ebenen Curve. Die Anzahl der reellen Züge einer jeden ebenen Curve ist, wie A. Harnack in der zu Anfang citirten Arbeit ebenfalls bewiesen hat, höchstens gleich dem um Eins vermehrten Geschlechte der Curve und es ist daher die Zahl der Züge der Projectionscurve und folglich auch die Zahl der Züge der ursprünglichen Raumcurve höchstens gleich $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Zugleich folgt, dass eine jede nicht ebene Curve n^{ter} Ordnung, welche genau $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$ Züge besitzt, nothwendig auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen muss.

Wir wollen nunmehr zeigen, das die eben gefundene obere Grenze für die Anzahl der Züge auch wirklich erreicht wird. Zu dem Zwecke nehmen wir an, es sei eine Curve C_n von der geraden Ordnung n als Schnitt eines einschaligen Hyperboloides $H=0$ und einer Fläche $F=0$, von der Ordnung $\frac{n}{2}$ gegeben und diese Curve C_n habe die Maximalzahl $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ von reellen Zügen. Ausserdem möge auf dem Hyperboloide $H=0$ mittels der Ebene $E=0$ eine Ellipse ausgeschnitten sein, welche einen von den Zügen der Curve C_n in n aufeinanderfolgenden Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ schneidet. Wir nehmen auf dieser Ellipse zwischen den Punkten A_1 und A_2 $n+2$ Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$ beliebig an und construiren $\frac{1}{2}(n+2)$ Ebenen, von denen die erste durch B_1 und B_2, die zweite durch B_3 und $B_4, \ldots$ und die $\frac{1}{2}(n+2)^{\text{te}}$ durch B_{n+1} und B_{n+2} hindurchgeht; es soll keine dieser Ebenen mit der Ebene $E=0$ zusammenfallen. Das Product der linken Seiten der Gleichungen dieser $\frac{1}{2}(n+2)$ Ebenen ist eine quaternäre Form G von der $\frac{1}{2}(n+2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Wird dann eine Grösse δ genügend klein bestimmt, so ist bei geeignet gewähltem Vorzeichen

$$FE \pm \delta G = 0$$

die Gleichung einer Fläche von der $\frac{1}{2}(n+2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H=0$ eine Raumcurve C_{n+2} der $n+2^{\text{ten}}$ Ordnung mit

$$\frac{1}{4}(n-2)^2+1+(n-1)=\frac{1}{4}n^2+1$$

reellen Zügen ausschneidet; denn bei jenem Verfahren entsteht aus jedem Zuge von C_n ein Zug der Curve C_{n+2} und die Ellipse zusammen mit dem in n Punkten geschnittenen Zuge von C_n giebt zu n neuen Zügen der Curve C_{n+2} Anlass. Die erhaltene Anzahl von Zügen ist die Maximalzahl. Ausserdem schneidet einer der n neu entstandenen Züge die Ellipse $E=0$ in den $n+2$ aufeinanderfolgenden Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$, so dass das eben auf C_n angewandte Verfahren in entsprechender Weise auf die neu entstandene Curve C_{n+2} anwendbar wird. Da für $n=2$ jene Maximalzahl gleich Eins wird, so kann für das eben beschriebene Verfahren eine beliebige Ellipse auf dem Hyperboloide $H=0$ als Ausgang dienen und wir erkennen dann durch den Schluss von n auf $n+2$ allgemein für jede gerade Ordnung n die Existenz von Raumcurven mit $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ reellen Zügen.

Um die entsprechende Thatsache für Curven von der ungeraden Ordnung n nachzuweisen, nehmen wir an, die Fläche $F=0$ von der $\frac{1}{2}(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung schneide das einschalige Hyperboloid $H=0$ in einer Hülfsgeraden L und in einer Curve n^{ter} Ordnung C_n, welche $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$ Züge besitzt. Ausserdem möge auf dem Hyperboloide $H=0$ mittelst der Ebene $E=0$ eine Ellipse ausgeschnitten sein, welche einen von den Zügen der Curve C_n in den n Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ schneidet. Die Punkte mögen sämmtlich auf einem ganz im Endlichen sich erstreckenden Theile des Curvenzuges liegen und zwar sei beim Durchlaufen dieses endlichen Curventheiles die Reihenfolge der Punkte genau die angegebene. Die Hülfsgerade L treffe die Ellipse im Punkte A und die Lage des Punktes A auf der Ellipse sei derart, dass beim Durchlaufen der Ellipse der Reihe nach die Punkte $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ aufeinanderfolgen. Wir nehmen nun auf der Ellipse zwischen den Punkten A und A_1 $n+2$ Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$ beliebig an und construiren eine Ebene, welche durch die Gerade L und durch den Punkt B_1 geht und hierauf noch $\frac{1}{2}(n+1)$ Ebenen, von denen die erste durch B_2 und B_3, die zweite durch B_4 und B_5 und die $\frac{1}{2}(n+1)^{\text{te}}$ durch B_{n+1} und B_{n+2} hindurchgeht. Das Product der linken Seiten der Gleichungen dieser $\frac{1}{2}(n+3)$ Ebenen werde mit G bezeichnet. Bestimmen wir dann eine Grösse δ genügend klein, so ist bei geeigneter Wahl des Vorzeichens

$$FE \pm \delta G = 0$$

die Gleichung einer Fläche von der $\frac{1}{2}(n+3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H=0$ die Gerade L und überdies eine Raumcurve C_{n+2} von der $n+2^{\text{ten}}$ Ordnung mit

$$\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1+(n-1)=\frac{1}{4}(n+1)(n-1)+1$$

Zügen d. h. mit der Maximalzahl von Zügen ausschneidet. Ueberdies schneidet einer dieser Züge die Ellipse $E=0$ in den $n+2$ Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$. Die letzteren Punkte liegen wiederum sämmtlich auf einem ganz im Endlichen sich erstreckenden Curvenstücke und wenn $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$ die Reihenfolge der Punkte beim Durchlaufen dieses endlichen Curvenstückes angiebt, so herrscht auf der Ellipse die Reihenfolge $A, B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$. Das eben auf C_n angewandte Verfahren wird daher in entsprechender Weise auf die neu entstandene Curve C_{n+2} anwendbar. Da für $n=1$ jene Maximalzahl gleich Eins wird, so kann für das eben beschriebene Verfahren eine beliebige Gerade des Hyperboloides $H=0$ als Ausgang dienen und wenn wir dann irgend eine Gerade aus der anderen Schaar der Erzeugenden des Hyperboloides als Hülfslinie L hinzunehmen, so folgt durch den Schluss von n auf $n+2$ allgemein, dass es Raumcurven von der ungeraden Ordnung n mit $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$ Zügen giebt. Wir sprechen daher den Satz aus:

Die Zahl der reellen Züge einer irreduciblen Raumcurve n^{ter} Ordnung ist höchstens $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$, jenachdem die Ordnung n gerade oder ungerade ist und es giebt in beiden Fällen Raumcurven, welche wirklich aus so vielen Zügen gebildet sind.

Wir untersuchen nunmehr Lage und Gestalt der Raumcurven mit der Maximalzahl reeller Züge. Da nach den obigen Ausführungen diese Curven auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, so ist es nicht möglich, dass ein Zug derselben sich in einen der übrigen Züge hineinschlingt. Die Züge der Raumcurve liegen vielmehr sämmtlich getrennt im Raume derart, dass jeder Zug durch stetige Aenderung auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne dass er währenddessen einen der anderen Züge durchschneidet. Doch ist damit sehr wohl verträglich, dass einer der Curvenzüge auf der Fläche zweiter Ordnung einen der anderen Züge umschliesst und es sind sogar im allgemeinen für die nämliche Curvenordnung n verschiedene Gruppirungen der Züge auf der Fläche zweiter Ordnung möglich.

Wir sehen ferner leicht ein, dass eine Raumcurve mit der Maximalzahl reeller Züge keinen wirklichen Doppelpunkt besitzen darf. Wenn wir nämlich das Gegentheil annehmen und dann ausserhalb der Raumcurve auf der die Raumcurve tragenden Fläche zweiter Ordnung einen

Punkt P so bestimmen, dass keine der beiden in diesem Punkte P sich schneidenden Geraden der Fläche den Doppelpunkt der Curve trifft, so liefert die Projection der Raumcurve von diesem Punkte aus eine ebene Curve von der n^{ten} Ordnung, welche einen gewöhnlichen Doppelpunkt und ausserdem einen n_1-fachen und einen n_2-fachen Punkt besitzt, wobei $n_1 + n_2 = n$ ist. Das Geschlecht der ebenen Curve wäre folglich kleiner als $\frac{1}{4}(n-2)^2$ beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$. Da aber die Zahl der Züge einer Curve höchstens um eine Einheit grösser sein kann als ihr Geschlecht, so könnte die ebene Curve hiernach höchstens $\frac{1}{4}(n-2)^2$ beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$ Züge haben und das Nämliche wäre daher auch für die Raumcurve der Fall. Dieser Umstand widerspricht unserer Annahme, zufolge derer die Raumcurve die Maximalzahl reeller Züge besitzt. Die Betrachtung lehrt zugleich die Werthe der Zahlen n_1 und n_2 erkennen. Denn da die durch Projection entstandene ebene Curve nothwendig das Geschlecht $\frac{1}{4}(n-2)^2$ beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$ besitzt, so ergeben sich die Werthe $n_1 = \frac{n}{2}$, $n_2 = \frac{n}{2}$ beziehungsweise $n_1 = \frac{1}{2}(n+1)$, $n_2 = \frac{1}{2}(n-1)$, jenachdem die Ordnung n gerade oder ungerade ist.

Die vorhin construirten Raumcurven mit der Maximalzahl reeller Züge besitzen, wie man sieht, keinen oder einen einzigen unpaaren Zug, jenachdem ihre Ordnung n gerade oder ungerade ist. Es entsteht so die weitere Frage, ob — ebenso wie für ebene Curven — die Forderung der Maximalzahl reeller Züge das Auftreten mehrerer unpaarer Züge ausschliesst oder ob ausser den vorhin construirten Raumcurven noch andere Arten von Raumcurven mit der Maximalzahl von Zügen vorhanden sind.

Um zunächst eine obere Grenze für die Anzahl der unpaaren Züge einer Raumcurve n^{ter} Ordnung mit der Maximalzahl reeller Züge zu bestimmen, projiciren wir wie vorhin die Raumcurve von einem Punkte P der quadratischen Fläche auf eine Ebene; der Punkt P soll nicht auf der Raumcurve selbst liegen. Die entstandene ebene Curve n^{ter} Ordnung besitzt zwei $\frac{n}{2}$-fache oder einen $\frac{1}{2}(n+1)$-fachen und einen $\frac{1}{2}(n-1)$-fachen Punkt, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Wir bezeichnen diese beiden Punkte mit A und B. Ausser diesen beiden Singularitäten besitzt die ebene Curve — wie vorhin gezeigt worden ist — keinen mehrfachen Punkt. Jedem unpaaren Zuge der Raumcurve entspricht auch ein unpaarer Zug der ebenen Curve und umgekehrt. Denn wenn wir durch den Projectionsmittelpunkt P eine Ebene legen und wenn diese Ebene einen Zug der Raumcurve in einer ungeraden Zahl von Punkten schneidet, so trifft die durch die Ebene bestimmte Gerade den entsprechenden Zug der ebenen Curve in der nämlichen ungeraden Anzahl von Punkten. Somit kommen wir auf die Untersuchung der durch Projection entstandenen ebenen Curve zurück.

Wir beweisen leicht, dass die ebene Curve höchstens einen unpaaren Zug besitzen kann, welcher durch jeden der beiden Punkte A und B eine ungerade Anzahl von Malen hindurchgeht. In der That nehmen wir an, es gäbe zwei solche Züge und berücksichtigen wir, dass diese Züge ausserhalb der Punkte A und B einander nicht durchschneiden dürfen, so würde folgen, dass die beiden unpaaren Züge im Ganzen eine gerade Anzahl von Malen einander durchschneiden und dies ist nicht möglich. In der entsprechenden Weise erkennt man, dass beim Vorhandensein mehrerer unpaarer Züge kein einziger von diesen sowohl durch A wie durch B eine gerade Anzahl von Malen hindurchläuft. Wenn also die ebene Curve mehrere unpaare Züge besitzt, so giebt es unter diesen stets einen unpaaren Zug Z, welcher durch einen der beiden singulären Punkte etwa durch A eine ungerade Anzahl von Malen und durch den anderen singulären Punkt B eine gerade Anzahl von Malen hindurchgeht. Es müssen dann aber nothwendig auch die übrigen unpaaren Züge der Curve den nämlichen Punkt A eine ungerade Anzahl von Malen und den Punkt B eine gerade Anzahl von Malen schneiden — abgesehen von dem einen etwa vorhandenen unpaaren Zuge, welcher durch jeden der beiden Punkte A und B eine ungerade Anzahl von Malen hindurchgeht. In der That, wenn es einen unpaaren Zug gäbe, welcher A eine gerade und B eine ungerade Anzahl von Malen schnitte, so müsste dieser unpaare Zug den unpaaren Zug Z in einer geraden Anzahl von Punkten durchschneiden und diess ist unmöglich.

Die bisherigen Ausführungen zeigen, dass jeder unpaare Zug durch einen der singulären Punkte etwa durch A eine ungerade Anzahl von Malen also mindestens einmal hindurchgeht. Da nun A ein $\frac{n}{2}$-facher beziehungsweise ein $\frac{1}{2}(n \pm 1)$-facher Punkt ist, jenachdem die Ordnung n gerade oder ungerade ist, so kann die Curve jedenfalls höchstens $\frac{n}{2}$ beziehungsweise $\frac{1}{2}(n+1)$ unpaare Züge besitzen. Diese obere Grenze für die Zahl der unpaaren Züge wird jedoch nicht erreicht, wie man in folgender Weise zeigt.

Wir setzen erstens $n = 4\nu$, wo ν eine ganze Zahl bedeutet und nehmen an, es existire eine Curve von der Ordnung n mit der Maximalzahl von Zügen, welche in A und in B je einen 2ν-fachen Punkt besitzt; 2ν Züge der Curve seien unpaar und jeder dieser 2ν

Züge gehe einmal durch den Punkt A. Nach den obigen Ausführungen könnte es dann höchstens einen unter den 2ν unpaaren Zügen geben, welcher durch den Punkt B eine ungerade Anzahl von Malen hindurch geht. Da Punkt B ein 2ν-facher Punkt der Curve ist, so müssten, abgesehen von jenen unpaaren Zügen, noch eine ungerade Anzahl reeller Zweige der Curve durch B hindurch laufen. Die übrigen unpaaren Züge der Curve laufen aber sämmtlich durch B eine gerade Anzahl von Malen hindurch und es müsste daher mindestens einen paaren Zug der Curve geben, welcher durch B eine ungerade Anzahl von Malen hindurchgeht. Dieser paare Zug kann nicht auch durch A laufen, weil sich in A bereits 2ν unpaare Züge schneiden. Da der paare Zug ausserhalb der Punkte A und B nirgends einen anderen Zug schneiden kann, so würde er jenen unpaaren durch B eine ungerade Zahl von Malen hindurchlaufenden Zug in einer ungeraden Anzahl von Punkten schneiden müssen und dies ist nicht möglich. Damit ist gezeigt, dass jeder der 2ν unpaaren Züge durch B eine gerade Anzahl von Malen hindurchläuft. Wir nehmen jetzt $n > 4$ an; es existirt dann ausser den 2ν unpaaren Zügen jedenfalls noch ein paarer Zug. Wir ziehen von einem beliebigen Punkte eines paaren Zuges der Curve eine Gerade nach dem Punkte B. Da diese gerade Linie in B mit jedem der unpaaren Züge eine gerade Anzahl von Punkten gemein hat, so folgt, dass dieselbe noch jeden der unpaaren Züge in einer ungeraden Zahl von Punkten also mindestens in je einem Punkte ausserhalb B treffen muss. Nun ist B ein 2ν-facher Punkt der Curve und es würde also die gerade Linie mit der Curve mindestens $4\nu + 1$ Punkte gemein haben. Diese Folgerung steht im Widerspruch mit der angenommenen Irreducibilität der Curve. Die Curve kann daher nicht 2ν unpaare Züge besitzen und da eine Curve gerader Ordnung auch eine gerade Anzahl unpaarer Züge besitzen muss, so folgt, dass unsere ebene Curve und daher auch die anfänglich betrachtete Raumcurve von der Ordnung $n = 4\nu$ mit der Maximalzahl reeller Züge höchstens $2\nu - 2$ unpaare Züge besitzen kann. Ausgenommen ist die Curve 4ter Ordnung, für welche die Annahme zweier unpaarer Züge freisteht.

Wir setzen zweitens die Ordnung $n = 4\nu + 2$ und zeigen, dass in diesem Falle unsere Curve gar keinen unpaaren Zug besitzen darf. Nach den früheren Ueberlegungen müsste nämlich jeder der vorhandenen unpaaren Züge durch einen der beiden singulären Punkte, etwa durch A eine ungerade Anzahl von Malen hindurchlaufen. Nun ist die Zahl der sämmtlichen unpaaren Züge nothwendig gerade und da A ein $2\nu + 1$-facher Punkt der Curve ist, so müsste mindestens ein paarer Zug Z existiren, welcher den Punkt A eine ungerade Anzahl von Malen schneidet. Andererseits darf höchstens ein unpaarer

Zug zugleich auch durch B eine ungerade Anzahl von Malen laufen und in Folge dessen müsste es jedenfalls einen unpaaren Zug geben, welcher durch B eine gerade Anzahl von Malen läuft. Dieser unpaare Zug würde jenen paaren Zug Z eine ungerade Anzahl von Malen schneiden und diess ist unmöglich.

Es sei drittens die Ordnung $n = 4\nu + 1$; die vorhin für die Anzahl der unpaaren Züge gefundene obere Grenze ist in diesem Falle gleich $2\nu + 1$. Diese Grenze wird wiederum nicht erreicht. Wir nehmen, um dies einzusehen, an, es gäbe eine Curve mit der Maximalzahl von Zügen; $2\nu + 1$ von diesen Zügen seien unpaar und liefen je einmal durch den $2\nu + 1$-fachen Punkt A. Höchstens einer von diesen $2\nu + 1$ unpaaren Zügen darf zugleich auch durch B eine ungerade Anzahl von Malen hindurchgehen. Da aber B ein 2ν-facher Punkt der Curve ist, so müsste in diesem Falle mindestens ein paarer Zug vorhanden sein, welcher durch B eine ungerade Anzahl von Malen hindurchläuft. Dieser paare Zug kann nicht durch A laufen, weil sich im Punkte A bereits $2\nu + 1$ Zweige der Curve schneiden; er würde folglich jenen unpaaren eine ungerade Zahl von Malen durch B laufenden Zug eine ungerade Anzahl von Malen schneiden. Dies ist unmöglich und es ist damit gezeigt, dass keiner der $2\nu + 1$ unpaaren Züge durch B eine ungerade Anzahl von Malen hindurchgehen darf. Ausser den $2\nu + 1$ unpaaren Zügen existirt, falls die Ordnung der Curve $n > 5$ ist, noch ein paarer Zug und wir sehen, wie im ersten Falle, leicht ein, dass ein durch B und einen beliebigen Punkt des paaren Zuges gelegte Gerade mit der Curve mehr als n Punkte gemein haben würde. Die Curve kann also nicht $2\nu + 1$ unpaare Züge besitzen und da eine Curve von ungerader Ordnung nothwendig eine ungerade Anzahl von unpaaren Zügen besitzt, so folgt, dass eine Raumcurve von der Ordnung $n = 4\nu + 1$ mit der Maximalzahl reeller Züge höchstens $2\nu - 1$ unpaare Züge besitzen kann. Ausgenommen ist die Curve 5ter Ordnung, für welche die Annahme von 3 unpaaren Zügen freisteht.

Wir setzen endlich viertens die Ordnung $n = 4\nu + 3$. Die Curve könnte dann den früheren Betrachtungen zufolge höchstens $2\nu + 2$ oder vielmehr, da sie von ungerader Ordnung ist, höchstens $2\nu + 1$ unpaare Züge besitzen. Auch diese Anzahl wird nicht erreicht. Wir nehmen an, es existire eine Curve der verlangten Art mit $2\nu + 1$ unpaaren Zügen und haben dann zu unterscheiden, ob jeder von diesen unpaaren Zügen durch den $2\nu + 2$-fachen Punkt A oder durch den $2\nu + 1$-fachen Punkt B einmal hindurchläuft. Im ersteren Falle müsste es ausserdem noch einen paaren Zug Z der Curve geben, welcher den Punkt A einmal schneidet. Für $n > 3$ wird $2\nu + 1 > 1$ und es giebt daher unter dieser Voraussetzung jedenfalls einen unpaaren Zug, welcher durch B eine gerade Anzahl von Malen hindurchläuft. Dieser unpaare Zug würde jenen paaren Zug Z eine ungerade Zahl von Malen schneiden, was unmöglich ist. Nehmen wir zweitens an, es liefen die $2\nu + 1$ unpaaren Züge der Curve sämmtlich durch den $2\nu + 1$-fachen Punkt B einmal hindurch, so ist zunächst, wie man leicht einsieht, ausgeschlossen, dass einer dieser unpaaren Züge auch durch A eine ungerade Zahl von Malen hindurchläuft. Wird dann wiederum $n > 3$ angenommen, so besitzt unsere Curve jedenfalls noch einen paaren Zug und wir erkennen dann wie oben bei Behandlung der Fälle $n = 4\nu$ und $n = 4\nu + 1$, dass eine durch A und einen beliebigen Punkt des paaren Zuges gelegte gerade Linie mit der Curve mehr als n Punkte gemein haben würde und diess ist unmöglich. Es folgt also, dass eine Raumcurve von der Ordnung $n = 4\nu + 3$ mit der Maximalzahl reeller Züge höchstens $2\nu - 1$ unpaare Züge besitzen kann. Ausgenommen ist die Curve dritter Ordnung; diese besteht aus einem unpaaren Zuge.

Wir fassen die erhaltenen Resultate wie folgt zusammen:

Eine irreducible Raumcurve n^{ter} Ordnung mit der Maximalzahl reeller Züge besitzt unter diesen beziehungsweise höchstens $2\nu - 2$, $2\nu - 1$, $2\nu - 1$ unpaare Züge, jenachdem $n = 4\nu$, $4\nu + 1$, $4\nu + 3$ ist. In dem Falle $n = 4\nu + 2$ sind sämmtliche Züge nothwendig paar. Ausgenommen sind die Curven 3^{ter}, 4^{ter} und 5^{ter} Ordnung, für welche beziehungsweise die Annahme von 1, 2, 3 unpaaren Zügen freisteht.

Es wird im Folgenden gezeigt, dass die in diesem Satze ausgesprochenen Einschränkungen für die Zahl der unpaaren Züge auch hinreichend sind d. h. wenn man eine die gefundenen Grenzen nicht überschreitende gerade oder ungerade Zahl wählt, so existiren stets Raumcurven von gerader beziehungsweise ungerader Ordnung mit der Maximalzahl reeller Züge und mit soviel unpaaren Zügen als jene Zahl angiebt. Dieser Nachweis bildet den schwierigsten Theil unserer Aufgabe.

Es ist zunächst nothwendig, die Construction einer Raumcurve 4^{ter} Ordnung mit 2 unpaaren Zügen auszuführen. Zu dem Zwecke nehmen wir auf einem einschaaligen Hyperboloide $H = 0$ 2 Paare von geraden Linien an, von denen das eine Paar L, M der einen Schaar und das zweite Paar L', M' der anderen Schaar von Erzeugenden angehört. Wir legen dann durch die beiden Geraden L und L', sowie durch die beiden Geraden L und M' je eine Ebene und bezeichnen das Product der linken Seiten der Gleichungen dieser beiden Ebenen mit P. Es wird dann die quadratische Form P in einem durch L' und M' begrenzten Theile der Oberfläche des Hyperboloides überall null oder positiv und in dem anderen Theile der Oberfläche null oder negativ. Hierauf legen wir durch die beiden Geraden M

und L' sowie durch die beiden Geraden M und M' je eine Ebene und bilden das Product Q der linken Seiten der Gleichungen der beiden Ebenen. Da auch die so erhaltene quadratische Form Q auf dem Hyperboloide nur beim Ueberschreiten der Linien L' und M' ihr Vorzeichen ändern kann, so ist bei geeigneter Wahl des Vorzeichens $P \pm Q$ eine quadratische Form, welche in den Punkten von L' und M' verschwindet und in allen anderen Punkten des Hyperboloides einen von null verschiedenen Werth hat. Bezeichnen wir daher mit G eine beliebige quaternäre quadratische Form, so stellt die Gleichung

$$F = P \pm Q + \delta G = 0$$

für genügend kleine Werthe δ eine quadratische Fläche dar, welche aus dem Hyperboloide eine irreducible Curve C_4 von der 4^{ten} Ordnung mit 2 unpaaren Zügen ausschneidet. Zugleich ist klar, dass die beiden Schaaren von Erzeugenden des Hyperboloides sich gegenüber den Zügen der Curve verschieden verhalten: die Geraden der einen Schaar schneiden entweder einen der beiden Curvenzüge in 2 reellen Punkten oder sie schneiden die Curve überhaupt nicht und die Geraden der anderen Schaar schneiden jeden der beiden unpaaren Züge in einem Punkte.

Die eben construirte Curve C_4 von der 4^{ten} Ordnung ist vom Geschlechte 1 und es lassen sich daher die Coordinaten ihrer Punkte als elliptische Functionen eines Parameters t darstellen derart, dass die Parameterwerthe $t = 0$ bis $t = \omega$ alle Punkte des einen Zuges und die Parameterwerthe $t = \frac{i\omega'}{2} + 0$ bis $t = \frac{i\omega'}{2} + \omega$ alle Punkte des anderen Zuges liefern. Dabei bedeuten ω, ω' zwei reelle Grössen, und ω, $i\omega'$ sind die beiden Perioden der Curve*). Der Parameter t sei so normirt, dass die Summe der Parameterwerthe für die 4 Schnittpunkte der Curve mit irgend einer Ebene gleich $\frac{i\omega'}{2}$ wird. Nach dem Abelschen Theoreme ist dann die Congruenz

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{4m} \equiv \frac{mi\omega'}{2} \quad (\omega,\ i\omega')$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die $4m$ Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_{4m}$ durch eine Fläche m^{ter} Ordnung aus der Raumcurve C_4 ausgeschnitten werden können. Es sei L eine gerade Linie des Hyperboloides $H = 0$, welche die beiden unpaaren Züge der Curve C_4 in je einem reellen Punkte trifft. Die Parameter dieser beiden Punkte seien λ_1 und $\frac{i\omega'}{2} + \lambda_2$, wo λ_1 und λ_2 reelle Grössen bedeuten. Ferner sei L' eine Erzeugende des Hyperboloides, welche der anderen Schaar angehört und einen der unpaaren Züge in den beiden Punkten

*) Vgl. Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie Bd. I, S. 610.

$t = \lambda_1'$ und $t = \lambda_2'$ schneidet, wo λ_1' und λ_2' ebenfalls reelle Grössen bedeuten. Zur Abkürzung setzen wir

$$\tau = -\lambda_1 - \lambda_2 \equiv \lambda_1' + \lambda_2'. \qquad (\omega)$$

Wenn wir nun durch die Gerade L eine Fläche von der ungeraden Ordnung m legen, so schneidet dieselbe unsere Curve C_4 noch in $4m - 2$ weiteren Punkten und nach dem angeführten Satze gilt für die Parameter $t_1, t_2, \ldots, t_{4m-2}$ dieser Punkte die Relation

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{4m-2} \equiv \tau \qquad (\omega,\ i\omega').$$

Ist umgekehrt bei ungerader Zahl m die letztere Bedingung erfüllt, so giebt es stets eine Fläche m^{ter} Ordnung, welche die Gerade L enthält und aus der Curve C_4 jene $4m - 2$ Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_{4m-2}$ ausschneidet. Denn stellt die Gleichung $G = 0$ eine Fläche m^{ter} Ordnung dar, welche aus der Curve C_4 die $4m$ Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_{4m-2}$, λ_1, $\frac{i\omega'}{2} + \lambda_2$ ausschneidet, so ist es stets möglich, eine quaternäre Form K von der $m - 2^{\text{ten}}$ Ordnung derart zu bestimmen, dass die Fläche $G + KF = 0$ noch $m - 1$ weitere Punkte mit der Geraden L gemein hat und folglich die Gerade ganz enthält.

Ist m eine gerade Zahl, so erkennt man in derselben Weise die Bedingung

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{4m-2} \equiv -\tau \qquad (\omega,\ i\omega')$$

als nothwendig und hinreichend dafür, dass eine Fläche von der m^{ten} Ordnung existirt, welche die Gerade L' enthält und aus der Curve C_4 die weiteren $4m - 2$ Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_{4m-2}$ ausschneidet.

Die Constante τ ist, wie man leicht erkennt, unabhängig von der besonderen Wahl der geraden Linien L und L' in den bezüglichen Schaaren von Erzeugenden. Die aufgestellte Bedingung

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{4m-2} \equiv \pm\tau \qquad (\omega,\ i\omega')$$

ist daher allgemein nothwendig und hinreichend für die Existenz einer Fläche m^{ter} Ordnung, welche aus der Curve C_4 die $4m - 2$ Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_{4m-2}$ ausschneidet und ausserdem eine beliebig gegebene Gerade der einen beziehungsweise der anderen Schaar enthält.

Dagegen ändert die Constante τ ihren Werth, wenn wir statt des Hyperboloides $H = 0$ etwa das Hyperboloid $H + F = 0$ zu Grunde legen, welches ebenfalls die Curve C_4 enthält, aber mit dem Hyperboloide $H = 0$ keine Erzeugende gemein hat. In Folge dieses Umstandes können wir annehmen, dass die Constante τ weder gleich null noch gleich einem Vielfachen der Periode ω ausfällt.

Nach diesen Vorbereitungen führen wir den Nachweis für die Existenz der möglichen Arten von Raumcurven.

Wir setzen **erstens** die Ordnung $n = 4\nu$ und bestimmen 8 reelle Grössen $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_8^{(1)}$, welche den Bedingungen

$$t_1^{(1)} < 0 < t_2^{(1)} < t_3^{(1)} < \cdots < t_8^{(1)},$$
$$t_1^{(1)} + \quad t_2^{(1)} + t_3^{(1)} + \cdots + t_8^{(1)} = 0$$

genügen. Ausserdem sei $t = 0$ ein im Endlichen liegender Punkt der Raumcurve C_4 und der grösseren Anschaulichkeit wegen nehmen wir die Grössen $t_1^{(1)}$ und $t_8^{(1)}$ dem absoluten Betrage nach so klein an, dass, während der Parameter t von $t_1^{(1)}$ bis $t_8^{(1)}$ wächst, der entsprechende Punkt eine ganz im Endlichen gelegene Strecke der Curve C_4 durchläuft. Darauf bestimmen wir 16 reelle Grössen $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{16}^{(2)}$, welche den Bedingungen

$$t_1^{(1)} < t_1^{(2)} < 0 < t_2^{(2)} < t_3^{(2)} < \cdots < t_{16}^{(2)} < t_2^{(1)},$$
$$t_1^{(2)} \quad + t_2^{(2)} + t_3^{(2)} + \cdots + t_{16}^{(2)} = 0$$

genügen, dann 24 reelle Grössen $t_1^{(3)}, t_2^{(3)}, \ldots, t_{24}^{(3)}$ mit den Bedingungen

$$t_1^{(2)} < t_1^{(3)} < 0 < t_2^{(3)} < t_3^{(3)} < \cdots < t_{24}^{(3)} < t_2^{(2)},$$
$$t_1^{(3)} \quad + t_2^{(3)} + t_3^{(3)} + \cdots + t_{24}^{(3)} = 0$$

u. s. f., bis wir zu einem System von $8(\nu - 1)$ Grössen

$$t_1^{(\nu-1)}, \; t_2^{(\nu-1)}, \; \ldots, \; t_{8(\nu-1)}^{(\nu-1)}$$

gelangen, für welche die Bedingungen

$$t_1^{(\nu-2)} < t_1^{(\nu-1)} < 0 < t_2^{(\nu-1)} < t_3^{(\nu-1)} < \cdots < t_{8(\nu-1)}^{(\nu-1)} < t_2^{(\nu-2)},$$
$$t_1^{(\nu-1)} \quad + t_2^{(\nu-1)} + t_3^{(\nu-1)} + \cdots + t_{8(\nu-1)}^{(\nu-1)} = 0$$

erfüllt sind.

Nach den obigen Ausführungen sind durch die Parameterwerthe $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_8^{(1)}$ auf einem der beiden unpaaren Züge der Curve C_4 8 Punkte bestimmt, welche durch eine Fläche 2^{ter} Ordnung aus derselben ausgeschnitten werden können. Die Gleichung dieser Fläche 2ter Ordnung sei $G^{(1)} = 0$. Für genügend kleine Werthe $\delta^{(1)}$ stellt dann die Gleichung

$$F^{(1)} = F + \delta^{(1)} G^{(1)} = 0$$

eine quadratische Fläche dar, deren Schnitt mit dem Hyperboloide $H = 0$ ebenfalls eine Curve 4ter Ordnung mit 2 unpaaren Zügen ist. Der eine von diesen beiden unpaaren Zügen schneidet den entsprechenden Zug der ursprünglichen Curve C_4 in den 8 Punkten $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_8^{(1)}$ und zwar in der Weise, dass beim Durchlaufen des unpaaren Zuges der neuen Curve jene 8 Punkte $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_8^{(1)}$ in der nämlichen Reihenfolge auftreten, wie beim Durchlaufen der Curve C_4. Der zweite Zug der neuentstandenen Curve läuft neben dem entsprechenden Zuge der ursprünglichen Curve C_4 entlang, ohne ihn zu schneiden. Es sei nun $G^{(2)} = 0$ die Gleichung einer Fläche 4ter Ordnung, welche aus der ursprünglichen Curve C_4 die 16 Punkte $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{16}^{(2)}$ ausschneidet. Dann stellt die Gleichung

$$F^{(2)} = FF^{(1)} \pm \delta^{(2)} G^{(2)} = 0$$

bei geeignet gewähltem Vorzeichen und für genügend kleine Werthe $\delta^{(2)}$ eine Fläche 4ter Ordnung dar, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve 8ter Ordnung mit 2 unpaaren und 8 paaren Zügen ausschneidet. Denn von den 4 unpaaren durch $F = 0$ und $F^{(1)} = 0$ bestimmten Zügen bleiben lediglich die beiden sich gegenseitig nicht schneidenden unpaaren Züge auch nach der angegebenen Variation unpaar, während die unendlichen Theile der beiden anderen unpaaren Züge einen einzigen in's Unendliche sich erstreckenden paaren Zug liefern. Die übrigen neu entstehenden 7 paaren Züge verlaufen sämmtlich im Endlichen. Unter ihnen ist einer vorhanden, welcher einen der unpaaren Züge der Curve C_4 in den 16 Punkten $t_1^{(2)}$, $t_2^{(2)}, \ldots, t_{16}^{(2)}$ schneidet und zwar derart, dass beim Durchlaufen jenes paaren Zuges die 16 Punkte in der nämlichen Reihenfolge $t_1^{(2)}$, $t_2^{(2)}, \ldots, t_{16}^{(2)}$ erscheinen, wie beim Durchlaufen des unpaaren Zuges der Curve C_4. Wenn ferner $G^{(3)} = 0$ die Gleichung einer Fläche der 6ten Ordnung darstellt, welche aus der ursprünglichen Curve C_4 die 24 Punkte $t_1^{(3)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{24}^{(3)}$ ausschneidet, so ist

$$F^{(3)} = FF^{(2)} \pm \delta^{(3)} G^{(3)} = 0$$

bei geeignet gewähltem Vorzeichen und für genügend kleine Werthe $\delta^{(3)}$ die Gleichung einer Fläche 6ter Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve 12ter Ordnung mit 4 unpaaren und mit $8 + 14 = 22$ paaren Zügen ausschneidet. Denn einer von den unpaaren Zügen der Curve C_4 und der von diesem in 16 Punkten geschnittene paare Zug liefern zusammen einen unpaaren Zug und 15 paare Züge. Einer dieser 15 paaren Züge schneidet einen der unpaaren Züge der ursprünglichen Curve C_4 in den 24 aufeinanderfolgenden Punkten $t_1^{(3)}, t_2^{(3)}, \ldots, t_{24}^{(3)}$. Fahren wir in derselben Weise fort, so erhalten wir bei dem nächsten Schritte eine Fläche $F^{(4)}$ von der 8ten Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve von der 16ten Ordnung mit 6 unpaaren und mit $8 + 14 + 22 = 44$ paaren Zügen ausschneidet. Wie man sieht, kommen mit jedem weiteren Schritte noch 2 unpaare Züge zu den vorhandenen hinzu, während der Zuwachs zur Anzahl der paaren Züge mit jedem weiteren Schritte um 8 Einheiten grösser ist, als bei dem vorhergehenden Schritte. Wir gelangen daher nach $\mu - 1$ Schritten zu einer Fläche

$$F^{(\mu)} = FF^{(\mu-1)} \pm \delta^{(\mu)} G^{(\mu)} = 0$$

von der 2μten Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve von der 4μten Ordnung mit $2\mu - 2$ unpaaren und mit

$$8 + 14 + 22 + 30 + \cdots + (8\mu - 10) = 4\mu^2 - 6\mu + 4$$

paaren Zügen ausschneidet. Dabei ist μ eine Zahl, welche die Zahl v nicht überschreitet.

Die Fläche $G^{(\mu)} = 0$ von der $2\mu^{\text{ten}}$ Ordnung schneidet einen der beiden unpaaren Züge der Curve C_4 in den 8μ Punkten $t_1^{(\mu)}, t_2^{(\mu)}, \ldots, t_{8\mu}^{(\mu)}$. Es sei jetzt $G'^{(\mu)} = 0$ die Gleichung einer Fläche von der nämlichen Ordnung 2μ, welche aus dem anderen unpaaren Zuge der Curve C_4 irgend 8μ reelle Punkte ausschneidet. Dann wird bei geeigneter Wahl des Vorzeichens und für genügend kleine Werthe $\delta'^{(\mu)}$ die Gleichung

$$F'^{(\mu)} = FF^{(\mu-1)} \pm \delta'^{(\mu)} G'^{(\mu)} = 0$$

eine Fläche darstellen, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve $4\mu^{\text{ter}}$ Ordnung von der nämlichen Gestalt ausschneidet, wie die Fläche $F^{(\mu)} = 0$. Auch trifft diese Schnittcurve $4\mu^{\text{ter}}$ Ordnung die ursprüngliche Curve C_4 in 8μ aufeinanderfolgenden Punkten; aber es ist jetzt ein unpaarer Zug, welcher die 8μ Punkte aus der Curve C_4 ausschneidet. Nunmehr sei $G^{(\mu+1)} = 0$ die Gleichung einer Fläche von der Ordnung $2\mu + 2$, welche aus dem ersteren unpaaren Zuge der Curve C_4 irgend $8\mu + 8$ reelle Punkte ausschneidet; dann stellt die Gleichung

$$F^{(\mu+1)} = FF'^{(\mu)} \pm \delta^{(\mu+1)} G^{(\mu+1)} = 0$$

bei geeigneter Wahl des Vorzeichens und für genügend kleine Werthe $\delta^{(\mu+1)}$ eine Fläche dar, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve von der $4\mu + 4^{\text{ten}}$ Ordnung mit $2\mu - 2$ unpaaren Zügen und mit $(4\mu^2 - 6\mu + 4) + 8\mu$ paaren Zügen ausschneidet. Denn die sich in's Unendliche erstreckenden Theile der beiden sich schneidenden unpaaren Züge liefern nach der Variation einen einzigen paaren Zug, so dass die Gesammtzahl der unpaaren Züge bei dem Verfahren ungeändert bleibt. Einer von den unpaaren Zügen der eben construirten Curve der $4\mu + 4^{\text{ten}}$ Ordnung schneidet einen der beiden unpaaren Züge der Curve C_4 in $8\mu + 8$ aufeinanderfolgenden Punkten und es wird daher der nächste Schritt auf eine Fläche $F^{(\mu+2)} = 0$ führen, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve mit der nämlichen Anzahl $2\mu - 2$ von unpaaren Zügen und mit $(4\mu^2 - 6\mu + 4) + 8\mu + (8\mu + 8)$ paaren Zügen ausschneidet. Die Schnittpunkte mit der Curve C_4 nehmen wir bei jedem weiteren Schritte abwechselnd auf dem einen und dann auf dem anderen unpaaren Zuge der Curve C_4 an, so dass es stets ein unpaarer Zug der neu construirten Curve ist, welcher einen von den unpaaren Zügen der Curve C_4 schneidet und in Folge dessen die Zahl der unpaaren Züge bei allen weiteren Schritten ungeändert bleibt. Andererseits wird der Zuwachs für die Anzahl der paaren Züge bei jedem Schritte, ebenso wie früher, um 8 Einheiten vergrössert. Nach $\nu - \mu$ Schritten gelangen wir so zu einer Curve von der Ordnung $n = 4\nu$ mit $2\mu - 2$ unpaaren und mit

$$(4\mu^2 - 6\mu + 4) + 8\mu + (8\mu + 8) + \cdots + \{8(\nu - 1)\}$$
$$= 4\nu^2 - 4\nu - 2\mu + 4$$

paaren Zügen; dieselbe besitzt also insgesammt

$$4\nu^2 - 4\nu + 2 = \frac{1}{4}(n-2)^2 + 1$$

Züge und dies ist, wie früher gezeigt worden, die Maximalzahl. Setzen wir der Reihe nach $\mu = 2, 3, \ldots, \nu$, so erhalten wir Raumcurven $4\nu^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Maximalzahl reeller Züge, unter denen beziehungsweise $2, 4, \ldots, 2\nu - 2$ Züge unpaar sind. Da die Existenz von Raumcurven mit der Maximalzahl von Zügen ohne einen unpaaren Zug bereits oben nachgewiesen worden ist, so ist damit die gestellte Aufgabe im ersten Falle $n = 4\nu$ erledigt.

Im zweiten Falle $n = 4\nu + 2$ darf eine Curve mit der Maximalzahl reeller Züge unseren früheren Entwickelungen zu Folge überhaupt gar keinen unpaaren Zug besitzen und wir wenden uns daher sofort zu der Untersuchung des dritten Falles $n = 4\nu + 1$. Zu dem Zwecke erinnern wir uns der vorhin aufgestellten Bedingung für die Existenz einer Fläche m^{ter} Ordnung, welche $4m - 2$ gegebene Punkte aus der Curve C_4 ausschneidet und zugleich eine gegebene Gerade des Hyperboloides enthält. Die dort bis auf ein Vielfaches der Periode ω definirte Constante τ werde nun so gewählt, dass ihr Werth zwischen 0 und ω fällt. Durch eine lineare Transformation des Hyperboloides $H = 0$ können wir leicht bewirken, dass diejenige Strecke der Curve C_4 ganz in's Endliche fällt, welche der Punkt beschreibt, während der Parameter t von 0 bis τ wächst. Ferner sei ε eine positive Grösse, welche kleiner ist als jede der beiden Zahlen $\frac{9}{17}$ und $\frac{\tau}{2}$, so dass die Ungleichungen

$$0 < \frac{\varepsilon^{\nu-1}}{9} < \frac{\varepsilon^{\nu-2}}{17} < \cdots < \frac{\varepsilon}{8\nu - 7}$$

$$\frac{\varepsilon}{8\nu-7} < \tau - \varepsilon < \tau - \varepsilon^2 < \cdots < \tau - \varepsilon^{\nu-1} < \tau$$

erfüllt sind. Wir bestimmen jetzt 9 reelle Grössen

$$t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_9^{(1)},$$

ferner 17 Grössen

$$t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots t_{17}^{(2)}$$

und schliesslich $8\nu - 7$ Grössen

$$t_1^{(\nu-1)}, t_2^{(\nu-1)}, \ldots, t_{8\nu-7}^{(\nu-1)},$$

welche den Bedingungen

$$\begin{array}{lllll} 0 < t_1^{(1)} & < t_2^{(1)} & < \cdots < t_9^{(1)} & < t_1^{(2)}, \\ t_1^{(2)} & < t_2^{(2)} & < \cdots < t_{17}^{(2)} & < t_1^{(3)}, \\ t_1^{(3)} & < t_2^{(3)} & < \cdots < t_{25}^{(3)} & < t_1^{(4)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ t_1^{(\nu-1)} & < t_2^{(\nu-1)} & < \cdots < t_{8\nu-7}^{(\nu-1)} & < \tau - \varepsilon; \\ t_1^{(1)} & + t_2^{(1)} & + \cdots + t_9^{(1)} & = \varepsilon^{\nu-1}, \\ t_1^{(2)} & + t_2^{(2)} & + \cdots + t_{17}^{(2)} & = \varepsilon^{\nu-2}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ t_1^{(\nu-1)} & + t_2^{(\nu-1)} & + \cdots + t_{8\nu-7}^{(\nu-1)} & = \varepsilon \end{array}$$

genügen. Es lassen sich solche Grössen offenbar leicht finden, indem man jede der Grössen $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_9^{(1)}$ genügend wenig verschieden von dem Werthe $\frac{\varepsilon^{\nu-1}}{9}$ annimmt, ferner jede der Grössen

$$t_1^{(2)},\; t_2^{(2)},\; \ldots,\; t_{17}^{(2)}$$

genügend wenig von $\frac{\varepsilon^{\nu-2}}{17}$ verschieden und schliesslich jede der Grössen

$$t_1^{(\nu-1)},\; t_2^{(\nu-1)},\; \ldots,\; t_{8\nu-7}^{(\nu-1)}$$

genügend nahe dem Werthe $\frac{\varepsilon}{8\nu-7}$ annimmt. Setzen wir noch

$$t_{10}^{(1)} = \tau - \varepsilon^{\nu-1},\quad t_{18}^{(2)} = \tau - \varepsilon^{\nu-2},\; \ldots,\; t_{8\nu-6}^{(\nu-1)} = \tau - \varepsilon,$$

so gelten die Bedingungen

$$\begin{array}{llllll} 0 & < t_1^{(1)} & < t_2^{(1)} & < \cdots < t_9^{(1)} & < t_{10}^{(1)} & < \tau, \\ t_9^{(1)} & < t_1^{(2)} & < t_2^{(2)} & < \cdots < t_{17}^{(2)} & < t_{18}^{(2)} & < t_{10}^{(1)}, \\ t_{17}^{(2)} & < t_1^{(3)} & < t_2^{(3)} & < \cdots < t_{25}^{(3)} & < t_{26}^{(3)} & < t_{18}^{(2)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ t_{8\nu-15}^{(\nu-2)} & < t_1^{(\nu-1)} & < t_2^{(\nu-1)} & < \cdots < t_{8\nu-7}^{(\nu-1)} & < t_{8\nu-6}^{(\nu-1)} & < t_{8\nu-14}^{(\nu-2)}; \\ & t_1^{(1)} & + t_2^{(1)} & + \cdots + t_9^{(1)} & + t_{10}^{(1)} & = \tau, \\ & t_1^{(2)} & + t_2^{(2)} & + \cdots + t_{17}^{(2)} & + t_{18}^{(2)} & = \tau, \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ & t_1^{(\nu-1)} & + t_2^{(\nu-1)} & + \cdots + t_{8\nu-7}^{(\nu-1)} & + t_{8\nu-6}^{(\nu-1)} & = \tau. \end{array}$$

Es sei jetzt L eine gerade Linie auf dem Hyperboloide, welche jeden der beiden unpaaren Züge der Curve C_4 schneidet. Ausserdem sei diese Gerade L so gewählt, dass von ihr diejenige Strecke der Curve C_4 gar nicht getroffen wird, welche ein Punkt beschreibt, dessen Parameter von 0 bis τ wächst. Wir wählen dann aus der anderen Schaar der Erzeugenden eine solche Gerade L' aus, welche die Curve C_4

überhaupt nicht schneidet. Die Ebene, welche die Geraden L und L' enthält, sei durch die Gleichung $E = 0$ dargestellt. Den früheren Ausführungen zu Folge giebt es eine Fläche 3ter Ordnung, welche die 10 Punkte $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_{10}^{(1)}$ aus einem der Züge der Curve C_4 ausschneidet und zugleich die Gerade L enthält. Die Gleichung dieser Fläche sei $G^{(1)} = 0$. Für genügend kleine Werthe $\delta^{(1)}$ stellt dann die Gleichung

$$F^{(1)} = FE + \delta^{(1)} G^{(1)} = 0$$

eine Fläche 3ter Ordnung dar, welche die Gerade L enthält und überdiess aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve 5ter Ordnung mit 3 unpaaren Zügen ausschneidet. Der eine dieser unpaaren Züge schneidet den bezüglichen unpaaren Zug der Curve C_4 in den 10 Punkten $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_{10}^{(1)}$ und zwar in der Weise, dass beim Durchlaufen des unpaaren Zuges jener Curve 5ter Ordnung die 10 Punkte in der nämlichen Reihenfolge auftreten, wie beim Durchlaufen der Curve C_4. Es sei nun $G^{(2)} = 0$ die Gleichung einer Fläche 5ter Ordnung, welche die Gerade L enthält und aus der Curve C_4 die 18 Punkte $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{18}^{(2)}$ ausschneidet. Dann stellt die Gleichung

$$F^{(2)} = FF^{(1)} \pm \delta^{(2)} G^{(2)} = 0$$

bei geeignet gewähltem Vorzeichen und für genügend kleine Werthe $\delta^{(2)}$ eine Fläche 5ter Ordnung dar, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ die Gerade L und ausserdem eine Curve 9ter Ordnung mit 3 unpaaren und mit 10 paaren Zügen ausschneidet. Denn nur die 3 sich gegenseitig nicht schneidenden Züge bleiben auch nach der Variation unpaar, während die unendlichen Theile der beiden anderen unpaaren Züge einen einzigen sich in's Unendliche erstreckenden paaren Zug liefern. Die übrigen 9 neu entstehenden paaren Züge verlaufen sämmtlich im Endlichen. Unter ihnen ist einer vorhanden, welcher den bezüglichen unpaaren Zug der Curve C_4 in den 18 aufeinanderfolgenden Punkten $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{18}^{(2)}$ schneidet. Stellt jetzt $G^{(3)} = 0$ eine Fläche 7ter Ordnung dar, welche die Gerade L enthält und aus der Curve C_4 die 26 Punkte $t_1^{(3)}, t_2^{(3)}, \ldots, t_{26}^{(3)}$ ausschneidet, so ist

$$F^{(3)} = FF^{(2)} \pm \delta^{(3)} G^{(3)} = 0$$

bei geeignet gewähltem Vorzeichen und für genügend kleine Werthe $\delta^{(3)}$ die Gleichung einer Fläche 7ter Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ die Gerade L und ausserdem eine Curve 13ter Ordnung mit 5 unpaaren und $10 + 16 = 26$ paaren Zügen ausschneidet. Fahren wir in derselben Weise fort, so erhalten wir bei dem nächsten Schritte eine Fläche $F^{(4)} = 0$ von der 9ten Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ die Gerade L und eine Curve von der 17ten Ordnung mit 7 unpaaren und $10 + 16 + 24 = 50$ paaren Zügen ausschneidet.

Wie man sieht, kommen mit jedem weiteren Schritte noch 2 unpaare Züge zu den vorhandenen hinzu, während der Zuwachs zur Anzahl der paaren Züge mit jedem weiteren Schritte um 8 Einheiten grösser ist, als bei dem vorhergehenden Schritte. Wir gelangen daher nach $\nu - 1$ Schritten zu einer Fläche $F^{(\nu)} = 0$ von der $2\nu + 1^{\text{ten}}$ Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ die Gerade $L = 0$ und eine Curve von der $4\nu + 1^{\text{sten}}$ Ordnung mit $2\nu - 1$ unpaaren und mit

$$10 + 16 + 24 + 32 + \cdots + 8(\nu - 1) = 4\nu^2 - 4\nu + 2$$

paaren Zügen ausschneidet. Diese schliesslich entstandene Curve von der Ordnung $n = 4\nu + 1$ besitzt also insgesammt

$$4\nu^2 - 2\nu + 1 = \frac{1}{4}(n-1)(n-3) + 1$$

reelle Züge und dies ist, wie früher gezeigt worden, die Maximalzahl.

Es bietet nunmehr keine Schwierigkeit, auch die Existenz der Curven $4\nu + 1^{\text{ster}}$ Ordnung mit der Maximalzahl von Zügen nachzuweisen, unter denen weniger als $2\nu - 1$ unpaare Züge vorhanden sind. Wir bezeichnen mit μ eine Zahl, welche kleiner ist als ν. Das eben beschriebene Verfahren führt dann nach $\mu - 1$ Schritten zu einer Curve von der $4\mu + 1^{\text{sten}}$ Ordnung mit $2\mu - 1$ unpaaren Zügen. Diese Curve behandeln wir mittelst der vorhin im ersten Falle $n = 4\nu$ angewandten Methode, indem wir durch abwechselnde Benutzung beider unpaaren Züge der Curve C_4 bewirken, dass allemal ein unpaarer Zug der neu construirten Curve einen der unpaaren Züge der Curve C_4 in lauter aufeinanderfolgenden Punkten trifft und in Folge dessen bei allen weiteren Schritten die Zahl der unpaaren Züge ungeändert bleibt. Die Lage der Punkte auf den beiden Zügen der Curve C_4 ist so zu wählen, dass nach der Variation die grösstmögliche Anzahl neuer Züge entsteht. Nach $\nu - \mu$ Schritten entsteht eine Curve von der Ordnung $n = 4\nu + 1$ mit der Maximalzahl reeller Züge, unter denen $2\mu - 1$ unpaare Züge vorhanden sind. Hierbei ist $\mu > 1$ angenommen. Doch ist bereits früher nachgewiesen worden, dass es auch Curven von der Ordnung $n = 4\nu + 1$ mit der Maximalzahl reeller Züge giebt, unter denen nur e i n unpaarer Zug vorhanden ist.

Um schliesslich den l e t z t e n Fall $n = 4\nu + 3$ zu erledigen, setzen wir $\tau' = \omega - \tau$ und bewirken durch lineare Transformation der Coordinaten, dass diejenige Strecke der Curve C_4 ganz in's Endliche fällt, welche der Punkt beschreibt, während der Parameter t von 0 bis τ' wächst. Ferner bezeichne ε' eine positive Grösse, welche kleiner ist, als jede der beiden Zahlen $\frac{5}{13}$ und $\frac{\tau'}{2}$, so dass die Ungleichungen

$$0 < \frac{\varepsilon'^{\nu}}{5} < \frac{\varepsilon'^{\nu-1}}{13} < \cdots < \frac{\varepsilon'}{8\nu-3}$$

$$\frac{\varepsilon'}{8\nu-3} < \tau' - \varepsilon' < \tau' - \varepsilon'^2 < \cdots < \tau' - \varepsilon'^{\nu} < \tau'$$

erfüllt sind. Mit Berücksichtigung dieser Ungleichungen ist es in entsprechender Weise wie vorhin im Falle $n = 4\nu + 1$ leicht, 6 reelle Grössen $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_6^{(1)}$, ferner 14 Grössen $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{14}^{(2)}$ und schliesslich $8\nu - 2$ Grössen $t_1^{(\nu)}, t_2^{(\nu)}, \ldots, t_{8\nu-2}^{(\nu)}$ zu finden, welche den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{array}{lllllll}
0 & < t_1^{(1)} & < t_2^{(1)} < \cdots & < t_5^{(1)} & < t_6^{(1)} & < \tau', \\
t_5^{(1)} & < t_1^{(2)} & < t_2^{(2)} < \cdots & < t_{13}^{(2)} & < t_{14}^{(2)} & < t_6^{(1)}, \\
t_{13}^{(2)} & < t_1^{(3)} & < t_2^{(3)} < \cdots & < t_{21}^{(3)} & < t_{22}^{(3)} & < t_{14}^{(2)}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
t_{8\nu-11}^{(\nu-1)} & < t_1^{(\nu)} & < t_2^{(\nu)} < \cdots & < t_{8\nu-3}^{(\nu)} & < t_{8\nu-2}^{(\nu)} & < t_{8\nu-10}^{(\nu-1)},
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
t_1^{(1)} + t_2^{(1)} + \cdots & + t_6^{(1)} & = \tau', \\
t_1^{(2)} + t_2^{(2)} + \cdots & + t_{14}^{(2)} & = \tau', \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
t_1^{(\nu)} + t_2^{(\nu)} + \cdots & + t_{8\nu-2}^{(\nu)} & = \tau'.
\end{array}$$

Es sei L' eine Erzeugende des Hyperboloides $H = 0$, welche keinen der beiden unpaaren Züge der Curve C_4 trifft. Den früheren Ausführungen zufolge giebt es dann eine Fläche 2ter Ordnung, welche die Linie L' enthält und aus dem einen der Züge der Curve C_4 die 6 Punkte $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_6^{(1)}$ ausschneidet. Die Gleichung dieser Fläche sei $F^{(1)} = 0$. Es werde ferner durch die Gleichung $G^{(2)} = 0$ eine Fläche 4ter Ordnung dargestellt, welche die Gerade L' enthält und aus der Curve C_4 die 14 Punkte $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{14}^{(2)}$ ausschneidet. Dann stellt die Gleichung

$$F^{(2)} = FF^{(1)} \pm \delta^{(2)} G^{(2)} = 0$$

bei geeignet gewähltem Vorzeichen und für genügend kleine Werthe $\delta^{(2)}$ eine Fläche 4ter Ordnung dar, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ die Gerade L' und eine Curve 7ter Ordnung mit einem unpaaren und 6 paaren Zügen ausschneidet. Einer von diesen paaren Zügen schneidet einen unpaaren Zug der Curve C_4 in 14 aufeinanderfolgenden Punkten. Ist ferner $G^{(3)} = 0$ die Gleichung einer Fläche 6ter Ordnung, welche die Gerade L' enthält und aus der Curve C_4 die 22 Punkte $t_1^{(3)}, t_2^{(3)}, \ldots, t_{22}^{(3)}$ ausschneidet, so stellt bei geeignet gewähltem Vorzeichen und für genügend kleine Werthe $\delta^{(3)}$ die Gleichung

$$F^{(3)} = FF^{(2)} \pm \delta^{(3)} G^{(3)} = 0$$

eine Fläche 6^{ter} Ordnung dar, welche die Gerade L' enthält und aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve 11^{ter} Ordnung mit 3 unpaaren und mit 18 paaren Zügen ausschneidet. Wir gelangen so schliesslich zu einer Fläche $F^{(\nu+1)} = 0$ von der $2\nu + 2^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Gerade L' enthält und aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve von der Ordnung $n = 4\nu + 3$ mit $2\nu - 1$ unpaaren und mit $4\nu^2 + 2$ paaren Zügen ausschneidet. Diese Curve besitzt folglich insgesammt

$$4\nu^2 + 2\nu + 1 = \frac{1}{4}(n-1)(n-3) + 1$$

reelle Züge und dies ist, wie früher gezeigt worden, die Maximalzahl.

Der Nachweis für die Existenz von Curven der Ordnung $n = 4\nu + 3$ mit der Maximalzahl reeller Züge, unter denen weniger als $2\nu - 1$ unpaare Züge vorhanden sind, wird in entsprechender Weise geführt, wie oben in den Fällen $n = 4\nu$ und $n = 4\nu + 1$ geschehen ist.

Die eben ausgeführten Constructionen liefern, wie man sieht, alle diejenigen Arten von irreducibeln Raumcurven, welche in dem früher abgeleiteten Satze nicht als unmöglich ausgeschlossen worden sind. *Es ist daher im Vorstehenden die Frage nach den gestaltlich verschiedenen Arten der Raumcurven von einer beliebigen Ordnung n mit der Maximalzahl reeller Züge vollkommen erledigt.*

Königsberg i. Pr., den 19. November 1890.