LINEE GEODETICHE

TRACCIATE SOPRA TALUNE SUPERFICIE.

Nota di **M. L. Albeggiani**, in Palermo.

Adunanza del 24 marzo 1889

In questa Nota sarà applicato alla ricerca delle linee geodetiche un metodo elegante sviluppato nei suoi particolari dal sig. Darboux nella di lui interessante opera: *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Paris, 1887-89: sul proposito può anche confrontarsi la recente monografia del sig. Knoblauch, *Einleitung in die allgemeine Theorie der Krummen Flächen*, Leipzig, 1888

Esporrò nella parte I il metodo sudetto e ne farò poi applicazione, nella parte III, al ritrovamento delle equazioni funzionali delle geodetiche di talune superficie, non lasciando di tener presente la classificazione delle stesse fatta dal sig. Sophus Lie nella pregevole Memoria *Untersuchungen uber geodatische Curven* (*Math. Ann.*, B. XX, S. 357), della quale classificazione sarà tenuto ragionamento nella II parte del presente lavoro. Sarà oggetto di altra Nota lo studio delle principali proprietà di cui godono le più interessanti tra le geodetiche delle quali si sono in questa ottenute le equazioni in termini finiti.

I

1. Si consideri la superficie rappresentata dalle equazioni:

$$(1) \qquad x = \varphi_1(u,v), \qquad y = \varphi_2(u,v), \qquad z = \varphi_3(u,v),$$

nelle quali le u, v indicano due sistemi di linee $u =$ cost., $v =$ cost. tracciate sopra la superficie ed i cui valori particolari si assumono come coordinate (curvilinee) di ciascun punto della stessa. Ponendo al solito:

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

l'elemento lineare della superficie prende, come è noto, la forma

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Siano ora

$$(2) \qquad \theta = \theta(u,v), \qquad \theta_1 = \theta_1(u,v)$$

certe due funzioni di u,v supposte tali che l'equazione $\theta_1 =$ cost. rappresenti una famiglia di geodetiche della superficie (1) e che l'equazione $\theta =$ cost. rappresenti la famiglia di curve trajettorie ortogonali delle geodetiche considerate; le curve $\theta =$ cost. costituiscono ciò che si dice una famiglia di *linee geodeticamente parallele* o semplicemente di *curve parallele*.

Suppongansi inoltre le funzioni θ, θ_1 tali che per ogni punto della superficie, o di una regione di essa, passi una sola coppia di curve appartenenti alle due famiglie, di maniera che ogni coppia di valori dei parametri θ, θ_1 determina univocamente un punto della superficie, o della regione, considerata, e viceversa, o che è lo stesso, le funzioni θ, θ_1 siano tali che ad ogni coppia di valori di u, v risponda una sola coppia di valori di θ, θ_1 e viceversa; si ottiene così un nuovo sistema di coordinate curvilinee θ, θ_1 legato al precedente dalle relazioni (2): cerchiamo quale sarà nel nuovo sistema coordinato l'espressione dell'elemento lineare della superficie.

Dette E', F', G' le analoghe delle E, F, G nel nuovo sistema, cioè:

$$E' = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2, \quad F' = \sum \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta_1}, \quad G' = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_1}\right)^2,$$

si ha da prima $F' = 0$, di poi, essendo le curve $\theta_1 =$ cost. geodetiche della superficie, l'equazione differenziale delle geodetiche, la quale, nell'ipotesi $F' = 0$, è la

$$\begin{aligned} &2 E' G' (d\theta d^2\theta_1 - d\theta_1 d^2\theta) \\ &= E' \frac{\partial E'}{\partial \theta_1} d\theta^3 + \left(G' \frac{\partial E'}{\partial \theta} - 2 E' \frac{\partial G'}{\partial \theta}\right) d\theta^2 d\theta_1 \\ &- \left(E' \frac{\partial G'}{\partial \theta_1} - 2 G' \frac{\partial E'}{\partial \theta_1}\right) d\theta\, d\theta_1^2 - G' \frac{\partial G'}{\partial \theta} d\theta_1^3, \end{aligned}$$

deve essere soddisfatta da $d\theta_1 = 0$, il che ha luogo quando abbiasi

$$\frac{\partial E'}{\partial \theta_1} = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad E' = E'(\theta),$$

allora scrivendo, per non introdurre nuovi simboli, ancora $d\theta$ per $\sqrt{E'}\, d\theta$, posto $G' = \sigma^2$, si trova che l'elemento lineare della superficie viene espresso dalla:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2.$$

Egli è d'altra parte evidente che, se le condizioni

$$E' = 1, \qquad F' = 0$$

sono soddisfatte, le curve $\theta_1 =$ cost. sono geodetiche della superficie e quindi le curve $\theta =$ cost. sono le loro trajettorie ortogonali, difatti, in virtù delle poste condizioni, l'equazione differenziale delle geodetiche, testè scritta, resta identicamente verificata per $d\theta_1 = 0$.

Osserviamo infine che nella forma or ora trovata dell'elemento lineare della superficie, il parametro θ indica l'arco delle geodetiche θ_1 contato a partire da una trajettoria ortogonale fissa $\theta = 0$.

2. Per venire ora alla determinazione delle funzioni θ, θ_1, σ osserviamo, che esse sono funzioni di u, v tali da aversi identicamente

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2. \tag{3}$$

Pertanto, avuto riguardo alla natura delle funzioni θ, θ_1 e posto:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial\theta}{\partial v} \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial u} & \frac{\partial\theta_1}{\partial v} \end{vmatrix},$$

dalle (2) si ha per inversione.

$$D\frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{\partial\theta_1}{\partial v}, \quad D\frac{\partial u}{\partial\theta_1} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}, \quad D\frac{\partial v}{\partial\theta} = -\frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \quad D\frac{\partial v}{\partial\theta_1} = \frac{\partial\theta}{\partial u},$$

onde:

$$\begin{aligned} D\,du &= \frac{\partial\theta_1}{\partial v}\,d\theta - \frac{\partial\theta}{\partial v}\,d\theta_1, \\ D\,dv &= -\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\,d\theta + \frac{\partial\theta}{\partial u}\,d\theta_1 \end{aligned} \tag{4}$$

ed inoltre

$$D^2\sigma^2 = EG - F^2 \text{ (*)}. \tag{5}$$

Sostituendo quindi nel primo membro della (3) le espressioni di du, dv tratte dalle (4) e comparando i coefficienti di $d\theta^2$, $d\theta\,d\theta_1$, $d\theta_1^2$, tenendo presente la (5), si trova:

(*) Cfr. Knoblauch, l. c., pag 13.

$$(6) \qquad E\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \theta_1}{\partial u}\frac{\partial \theta_1}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right)^2 = \frac{EG-F^2}{\sigma^2},$$

$$(7) \qquad E\frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \theta_1}{\partial v} - F\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right) + G\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta_1}{\partial u} = 0,$$

$$(8) \qquad E\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 = EG - F^2.$$

Pongasi

$$\frac{E\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2} = \Delta\,\theta$$

e dicasi, con Beltrami, tale espressione: *parametro differenziale del 1° ordine di* θ, allora la (8) prende la forma

$$(9) \qquad \Delta\theta = 1.$$

Il soddisfacimento della (9) dice che il polinonio omogeneo di 2° grado in du, dv

$$ds^2 - d\theta^2 \equiv \left\{E - \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2\right\}du^2 + 2\left\{F - \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}\right\}du\,dv + \left\{G - \left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2\right\}dv^2$$

è un quadrato perfetto, quindi qualunque siano du, dv, se la (9) è soddisfatta, si può porre:

$$ds^2 - d\theta^2 = (m\,du + n\,dv)^2,$$

dove m, n sono certe due funzioni di u, v. Ora è noto che si può sempre determinare un fattore $\frac{1}{\sigma}$. funzione di u e di v, tale da aversi

$$\frac{m\,du + n\,dv}{\sigma} = d\theta_1$$

e però:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2$$

dove θ_1 è funzione diversa dalla θ ed il determinante $D \neq 0$ chè altrimenti ds^2 sarebbe un quadrato perfetto, contro l'ipotesi. Da quanto precede si può concludere, che ad ogni soluzione della (9) risponde una famiglia di curve parallele cioè di curve le cui trajettorie ortogonali sono le geodetiche $\theta_1 = \text{cost}$.

Di tal che per determinare tutte le possibili linee parallele giacenti sopra una superficie data (1) bisogna integrare generalmente l'equazione (9), in seguito l'integrazione della (7) permette di determinare la funzione θ_1 di maniera che le curve $\theta_1 = \text{cost.}$, le cui traiettorie ortogonali sono le curve $\theta = \text{cost}$, siano linee geodetiche della superficie; finalmente la (6) dà l'espressione di σ^2.

3. Frattanto si può effettuare la determinazione della funzione θ_1 dopo aver trovato l'integrale generale della (9), od anche l'integrale completo, senza eseguire alcun'altra integrazione.

Suppongasi infatti che, volendo procedere alla integrazione della equazione alle derivate parziali del 1° ordine (9), siansi determinate per mezzo del sistema di equazioni differenziali ordinarie corrispondente alla (9), le $\frac{\partial \theta}{\partial u}$, $\frac{\partial \theta}{\partial v}$, soddisfacenti alla equazione data ed alle condizioni d'integrabilità, quali funzioni di u, v e di *una costante arbitraria* a la quale figura almeno in una di esse, in tal caso l'integrale θ contiene la costante a, oltre di quella che può essere aggiunta a θ per addizione e soddisfa identicamente all'equazione (8), la quale derivata parzialmente rapporto ad a, poichè E, F, G non contengono a, dà:

$$(10) \quad E\frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial a} - F\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial a} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial a}\right) + G\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial a} = 0.$$

La (10) coincide con la (7) ove in questa si scriva $\frac{\partial \theta}{\partial a}$ per θ_1, ma se l'integrale $\theta(u, v, a)$ soddisfa identicamente alla (8), la funzione $\frac{\partial \theta}{\partial a}$

soddisfa identicamente alla (10) quindi

$$\theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial a} = \text{cost.} = a'$$

è un integrale della (7), cioè per determinare la funzione θ_1 basta derivare l'integrale θ rispetto alla costante a.

Il precedente ragionamento non soffre variazione nel caso in cui l'integrale θ, in luogo di contenere la costante a, contenga una funzione arbitraria il cui argomento è funzione determinata di u e di v ottenuta per l'integrazione del sistema di equazioni differenziali ordinarie sudette, soltanto devesi allora intendere che le differenziazioni rispetto ad u ed a v siano *complete* vale a dire supponendo a funzione di u e di v.

L'equazione $\dfrac{\partial \theta}{\partial a} = a'$ contiene pertanto due costanti arbitrarie delle quali si può disporre per far passare la linea geodetica per un punto dato (u_0, v_0) e secondo una direzione assegnata, vale a dire in modo da avere in quel punto una tangente determinata. Infatti è chiaro che la curva

$$\theta_1(u, v, a) = \theta_1(u_0, v_0, a) \tag{11}$$

passa pel punto (u_0, v_0) pel quale passa pure la curva

$$\theta(u, v, a) = \theta(u_0, v_0, a) = \theta_0, \tag{12}$$

inoltre essendo le due curve (11), (12) ortogonali, l'angolo che la direzione positiva della curva (11) fa nel punto (u_0, v_0) con la direzione positiva della curva $v = \text{cost.}$ passante per lo stesso punto, è il complemento dell'angolo fatto in quel punto dalle direzioni positive delle curve (12) e $v = \text{cost}$, detto ω il primo di questi angoli si ha quindi:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(E\frac{du_0}{dv_0} + F\right) \text{ (*)}$$

(*) Cfr. p. es. Bianchi, *Geometria differenziale*, pag. 49.

dove $\frac{d u_o}{d v_o}$ indica ciò che diventa $\frac{du}{dv}$, tratto dalla equazione $\theta = \text{cost.}$, nel punto (u_o, v_o), cioè:

$$\frac{d u_o}{d v_o} = -\frac{\partial \theta_o}{\partial v_o} : \frac{\partial \theta_o}{\partial u_o}.$$

Per mostrare quindi che può darsi ad ω un valore a piacere basta mostrare che $\frac{d u_o}{d v_o}$ contiene la costante arbitraria a, basta perciò mostrare che il rapporto:

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} : \frac{\partial \theta}{\partial u} = \psi(u,v)$$

non è indipendente dalla costante a, per vero ove così fosse le $\frac{\partial \theta}{\partial u}, \frac{\partial \theta}{\partial v}$ ricavate dalla (9) e dalla $\frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \psi(u, v)$ sarebbero entrambe indipendenti da a contro l' ipotesi. Si può quindi determinare un valore della costante a' per modo che la curva

$$\theta_1 = a'$$

passi pel punto assegnato (u_o, v_o), e può inoltre determinarsi un valore della costante a tale che l'angolo ω abbia un valore dato prima, o altrimenti tale che la stessa curva

$$\theta_1 = a'$$

abbia in quel punto una tangente data. E poichè, come è noto, una linea geodetica è determinata dalle condizioni di passare per un punto dato ed avere ivi una tangente data, così l'equazione

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = a'$$

rappresenta tutte le possibili linee geodetiche tracciate sulla superficie.

Dopo ciò può enunciarsi il teorema

Per determinare le linee geodetiche della superficie (1), si consideri l'equazione alle derivate parziali del 1° ordine

$$\Delta \theta = 1$$

Ogni soluzione di questa equazione, eguagliata ad una costante, determinerà una famiglia di curve parallele. Se si ha una soluzione contenente una costante arbitraria a l'equazione della linea geodetica la più generale è

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = a',$$

e l'arco compreso fra due punti di questa linea geodetica è eguale alla differenza dei valori di θ relativi a questi due punti (*).

II.

4. Applicheremo il metodo esposto alle principali tra le superficie classificate dal sig. Lie nella Memoria citata, cioè a quelle superficie alle quali è permesso di potere imprimere uno scorrimento infinitesimale sopra sè stesse, per modo che ogni geodetica della superficie venga, dopo tale spostamento, a coincidere con altra sua geodetica infinitamente vicina.

Considereremo per ultimo il caso del parabaloide ellittico o iperbolico, il cui elemento lineare si presenta nella forma osservata da Liouville.

Mostriamo intanto in che consiste la classificazione razionale data dal sig. Lie per le superficie soddisfacenti alla condizione sudetta.

Si dice che sulle coordinate curvilinee u, v di un punto appartenente ad una superficie si opera una *trasformazione infinitesimale,* quando il sistema u, v viene trasformato nel sistema infinitamente vicino

(*) Cfr. Darboux, l. c., t. II; pag. 428.

$$u + \delta u = u + \pi(u, v)\,\delta t,$$

$$v + \delta v = v + \tilde{\omega}(u, v)\,\delta t,$$

a denotare tale operazione si scrivono le relazioni:

$$(13) \qquad \delta u = \pi(u, v)\,\delta t, \qquad \delta v = \tilde{\omega}(u, v)\,\delta t$$

dove π, $\tilde{\omega}$ sono funzioni di u e di v. Ad una trasformazione infinitesimale risponde evidentemente uno scorrimento infinitesimale della superficie, alla quale appartiene il punto considerato, sopra sè stessa, di maniera che una curva tracciata sulla superficie prende, dopo lo spostamento, una posizione diversa sulla stessa superficie coincidendo con altra sua curva infinitamente vicina, ed avviene, in generale, che l'elemento lineare, misurato sulla curva considerata, varia di lunghezza dopo lo spostamento, cioè ogni scorrimento infinitesimale della superficie sopra sè stessa è accompagnato, in generale, da uno stiramento (*Dehnung*).

Si consideri ora l'equazione differenziale

$$(14) \qquad \Phi\left(u, v, \frac{du}{dv}, \frac{d^2u}{dv^2}, \ldots\right) = 0$$

legata alla superficie, vale a dire tale che ad essa soddisfino certi enti il cui insieme forma una famiglia di curve tracciate sulla superficie; ciascun individuo della famiglia si dirà una *curva integrale* della (14) e sarà rappresentato dall'integrale di essa

$$f(u, v, a_1, a_2, \ldots) = 0$$

per certi particolari valori dati alle costanti o alle funzioni arbitrarie che vi si contengono; ciò posto diremo che l'equazione (14), e però anche la famiglia di curve da essa rappresentata, comporta la trasformazione infinitesimale (13), allora quando, operata siffatta trasformazione, ogni curva integrale viene nella posizione ad essa infinitamente vicina restando ancora curva integrale della (14), vale a dire allora quando l'espressione variata

$$f(u,\ v,\ a_1,\ a_2,\ \ldots) + \left[\pi \frac{\partial f}{\partial u} + \tilde{\omega} \frac{\partial f}{\partial v}\right] \delta t = 0,$$

che si ottiene dopo la trasformazione, fornisce ancora un integrale dell'equazione (14); è chiaro pertanto che ove l'espressione

$$\pi \frac{\partial f}{\partial u} + \tilde{\omega} \frac{\partial f}{\partial v}$$

debba fornire ancora una forma dell'integrale dell'equazione differenziale data, deve essere soddisfatta una qualche condizione, così p. es. se la (14) ha la forma semplice.

$$\frac{du}{U} = \frac{dv}{V},$$

dove U, V sono funzioni di u, v, la condizione a soddisfarsi è:

$$\frac{U\dfrac{\partial \pi}{\partial u} + V\dfrac{\partial \pi}{\partial v} - \pi\dfrac{\partial U}{\partial u} - \tilde{\omega}\dfrac{\partial U}{\partial v}}{U} = \frac{U\dfrac{\partial \tilde{\omega}}{\partial u} + V\dfrac{\partial \tilde{\omega}}{\partial v} - \pi\dfrac{\partial V}{\partial u} - \tilde{\omega}\dfrac{\partial V}{\partial v}}{V}$$

che si può mettere sotto la forma:

$$\frac{\partial \dfrac{U}{U\tilde{\omega} - V\pi}}{\partial u} + \frac{\partial \dfrac{V}{U\tilde{\omega} - V\pi}}{\partial v} = 0.$$

5. Ora è noto che le geodetiche di una superficie sono curve integrali dell'equazione differenziale del 2° ordine

$$(15) \qquad \begin{aligned} &2(EG - F^2)(du\,d^2v - dv\,d^2u) \\ &= \left(E\frac{\partial E}{\partial v} + F\frac{\partial E}{\partial u} - 2E\frac{\partial F}{\partial u}\right)du^3 \\ &+\left(3F\frac{\partial E}{\partial v} + G\frac{\partial E}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial u} - 2E\frac{\partial G}{\partial u}\right)du^2dv \\ &-\left(3F\frac{\partial G}{\partial u} + E\frac{\partial G}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial v} - 2G\frac{\partial E}{\partial v}\right)du\,dv^2 \\ &-\left(G\frac{\partial G}{\partial u} + F\frac{\partial G}{\partial v} - 2G\frac{\partial F}{\partial v}\right)dv^3, \end{aligned}$$

supponendo quindi, che per uno scorrimento infinitesimale, rappresentato dalle (13), della superficie sopra se stessa, venga una sua curva geodetica a coincidere con la geodetica ad essa infinitamente vicina, si dirà che l'equazione differenziale (15), o ancora la famiglia di geodetiche da essa rappresentata, ammette la trasformazione infinitesimale (13).

Frattanto intendansi riferiti i punti della superficie ad un sistema di *coordinate simmetriche* u_1, v_1, allora l'elemento lineare della superficie si presenta della forma:

$$ds^2 = f_1(u_1, v_1) du_1 dv_1 \tag{16}$$

e la (15) diventa semplicemente, poichè $E_1 = G_1 = 0$,

$$F_1(du_1 d^2v_1 - dv_1 d^2u_1) = \frac{\partial F_1}{\partial u_1} du_1^2 dv_1 - \frac{\partial F_1}{\partial v_1} du_1 dv_1^2 .$$

In tal caso il sig. Lie dice che una superficie è:

della I classe quando le geodetiche di essa ammettono la trasformazione infinitesimale:

$$\delta u_1 = \pi(u_1) \delta t , \qquad \delta v_1 = \tilde{\omega}(v_1) \delta t ,$$

della II classe quando le geodetiche di essa ammettono la trasformazione infinitesimale:

$$\delta u_1 = \pi(u_1)\delta t, \ \delta v_1 = \tilde{\omega}(u_1, v_1)\delta t; \text{ ovvero } \delta u_1 = \pi(u_1, v_1)\delta t, \ \delta v_1 = \tilde{\omega}(v_1)\delta t,$$

della III classe quando le sue geodetiche ammettono la trasformazione infinitesimale:

$$\delta u_1 = \pi(u_1, v_1)\delta t, \quad \delta v_1 = \tilde{\omega}(u_1, v_1)\delta t,$$

od altrimenti, riferendosi alle quantità

$$\frac{\partial \pi}{\partial v_1}, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial u_1}, \tag{17}$$

la superficie apparterrà rispettivamente alla I classe, alla II classe o alla III classe secondo che entrambe le quantità (17) sono nulle, o lo è soltanto una, o nessuna. Può una superficie appartenere contemporaneamente a due o a tutte le tre classi se le geodetiche tracciate sopra di essa ammettono nello stesso tempo le corrispondenti trasformazioni infinitesimali.

Le trasformazioni della I classe sono trasformazioni *conformi*, infatti, dicendo u_1', v_1' ciò che diventano le u_1, v_1 trasformate, si ha

$$u_1' = u_1 + \delta u_1, \qquad v_1' = v_1 + \delta v_1,$$

onde, tenendo presente le espressioni di δu_1, δv_1 per le trasformazioni della I classe, poichè d'altra parte δt non dipende dalle variabili, consegue che u_1', v_1' sono rispettivamente funzioni della sola u_1 e della sola v_1 cioè:

$$(18) \qquad u_1' = \varphi(u_1), \qquad v_1' = \psi(v_1).$$

Dicasi u, v un sistema ortogonale isotermo, a parametri isometrici, tracciato sulla superficie, allora l' elemento lineare (16) verrà espresso nelle coordinate u, v se si pone

$$u_1 = u + iv, \qquad v_1 = u - iv,$$

esso diventerà quindi della forma

$$(19) \qquad ds^2 = f(u, v)(du^2 + dv^2):$$

sia ancora u', v' il sistema ortogonale isotermo nel quale trasformasi il sistema di coordinate simmetriche u_1', v_1', si ha:

$$u_1' = u' + iv', \qquad v_1' = u' - iv',$$

onde dalle (18) segue:

$$u' + iv' = \varphi(u + iv), \qquad u' - iv' = \psi(u - iv)$$

cioè $u' + iv'$ è funzione analitica di $u + iv$ ed $u' - iv'$ è funzione analitica di $u - iv$, ma tanto serve a caratterizzare la rappresentazione conforme del piano delle variabili u, v su quello delle variabili u', v'.

6. Senza seguire il sig. Lie in ulteriori sviluppi, diciamo che egli nella Memoria citata studia in tutta la sua generalità il problema di determinare la forma dell'elemento lineare di quelle superficie le cui geodetiche ammettono una o più trasformazioni infinitesimali; dalle fatte determinazioni deduconsi pertanto i seguenti risultati.

Ammettono trasformazioni infinitesimali conformi le geodetiche tracciate

a) sulle superficie il cui elemento lineare è:

$$ds^2 = A(u_1)B(v_1)du_1 dv_1,$$

le quali sono superficie sviluppabili, A, B indicano funzioni qualunque del loro argomento,

b) sulle superficie il cui elemento lineare è:

$$ds^2 = e^{au_1}\Phi(u_1 - v_1)du_1 dv_1$$

dove a è una costante qualunque e Φ è funzione arbitraria di $u_1 - v_1$, in particolare per $a = 0$ si ha:

$$b)' \qquad ds^2 = \Phi(u_1 - v_1)du_1 dv_1$$

che è l'elemento lineare di una superficie applicabile sopra una superficie di rivoluzione e le cui geodetiche comportano una trasformazione infinitesimale che non è accompagnata da stiramento alcuno,

c) sulle superficie il cui elemento lineare è:

$$ds^2 = (u_1 - v_1)^{-2} du_1 dv_1,$$

le quali sono superficie a curvatura costante,

d) sulle superficie il cui elemento lineare è:

$$ds^2 = (u_1 - v_1)^m du_1 dv_1 \qquad m, \text{ costante finita, } \neq -2$$

le quali sono le evolute (*Centraflachen*) di superficie i cui raggi di curvatura principali stanno in un rapporto costante, [i casi $b)'$, $c)$, $d)$ distinguonsi pel fatto che in $b)'$, dove Φ rappresenta una funzione qualunque di $u_1 - v_1$, le geodetiche ammettono, in generale, una sola trasformazione infinitesimale conforme, nel caso $c)$ ammettono più di due trasformazioni infinitesimali conformi, ed infine nel caso $d)$ ne ammettono soltanto due].

Non ammettono trasformazioni infinitesimali conformi, o l'ammettono insieme ad altre, le geodetiche tracciate

$e)$ sulle superficie il cui elemento lineare è:

$$ds^2 = (a + u_1 v_1) du_1 dv_1 ,$$

$f)$ sulle superficie il cui elemento lineare ha la forma osservata per la prima volta da Liouville, cioè:

$$ds^2 = [\varphi(u_1 + v_1) + \psi(u_1 - v_1)] du_1 dv_1 ,$$

nel caso $e)$ al valore $a = 0$ corrispondono superficie sviluppabili appartenenti contemporaneamente alla I ed alla II classe; al valore $a = 1$ corrisponde una famiglia di superficie reali appartenente alla II classe solamente; per ogni altro valore di a ottengonsi famiglie di superficie appartenenti contemporaneamente alla I, alla II ed alla III classe;
nel caso $f)$ si hanno superficie appartenenti o alla III classe solamente come p. es. quelle il cui elemento lineare ha la forma.

$$ds^2 = \left[\frac{1}{\cos^2(u_1 + v_1)} - \frac{1}{\cos^2(u_1 - v_1)}\right] du_1 dv_1 ,$$

ovvero alla III classe ed alla I, o alla II, contemporaneamente, e tra queste ve ne ha appartenenti in più di un modo alla III classe come quelle il cui elemento lineare ha la forma:

$$ds^2 = \left[\frac{A}{(u_1 + v_1)^2} + \frac{B}{(u_1 - v_1)^2}\right] du_1 dv_1 \qquad A, B \text{ costanti},$$

le quali vi appartengono in doppio modo.

III.

7. Superficie sviluppabili. — Scriviamo le equazioni di una retta dello spazio, riferita ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, esprimendo le coordinate x, y, z di ciascun punto della retta in funzione di un parametro u, si hanno così le

$$x = V_1 u + W_1, \quad y = V_2 u + W_2, \quad z = V_3 u + W_3. \tag{20}$$

Se ora le V_i, W_i sono funzioni date di altro parametro v, le equazioni (20) rappresentano una superficie rigata i cui punti vengono riferiti al sistema di coordinate curvilinee u, v tracciato sulla superficie; le curve $v =$ cost. sono evidentemente le generatrici stesse della superficie; suppongasi inoltre che le curve $u =$ cost. siano trajettorie ortogonali delle generatrici e che il parametro u indichi una lunghezza portata sopra ciascuna generatrice a partire dalla curva fissa $u = 0$, allora, dicendo V'_i, W'_i le derivate delle funzioni V_i, W_i rispetto a v, ed osservando che in causa della natura del sistema di coordinate scelto deve aversi $E = 1$, $F = 0$, si trova

$$\sum V_i V_i = 1, \qquad \sum V_i W'_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Se inoltre le V'_i, W'_i sono tali da soddisfare alle relazioni

$$\frac{V'_1}{W'_1} = \frac{V'_2}{W'_2} = \frac{V'_3}{W'_3} = -\frac{1}{\nu}$$

la superficie è sviluppabile e si ha:

$$\left.\begin{aligned} \sum V'_i W'_i &= -\nu \sum V'_i V'_i, \\ \sum W'_i W'_i &= \nu^2 \sum V'_i V'_i, \end{aligned}\right\} \qquad i = 1, 2, 3,$$

onde l'elemento lineare di essa è:

$$ds^2 = du^2 + (u - \nu)^2 \sum V'_i V'_i dv^2$$

la qual forma dell'elemento lineare mostra che le $v =$ cost. sono geodetiche della superficie. Scrivendo nelle V'_i invece di v una certa funzione di v, $\varphi(v)$, si può con una semplice quadratura determinare $\varphi(v)$ in modo da essere soddisfatta la

$$\sum^{1} V'_i V'_i = 1$$

basta perciò porre

$$v = \int \sqrt{\Sigma V'_i V'_i}\, d\varphi ,$$

allora l'elemento lineare della superficie prende la forma:

$$ds^2 = du^2 + (u - \nu)^2 dv^2 .$$

Osservando che il 2° membro di questa espressione si può scrivere

$$[du + i(u - \nu)dv][du - i(u - \nu)dv] ,$$

cerchiamo un fattore integrante della equazione del 1° ordine

$$(21) \qquad du + i(u - \nu)dv = 0.$$

L'equazione differenziale (21) ammette la trasformazione infinitesimale

$$\delta u = \pi \delta t , \qquad \delta v = \tilde{\omega} \delta t$$

se π, $\tilde{\omega}$ sono funzioni di u e di v soddisfacenti alla condizione

$$\frac{\partial \dfrac{u - \nu}{i(u - \nu)\tilde{\omega} + \pi}}{\partial u} + i \frac{\partial \dfrac{1}{i(u - \nu)\tilde{\omega} + \pi}}{\partial v} = 0$$

cioè alla

$$(22) \qquad \frac{1}{i(u-\nu)\tilde{\omega}+\pi} + (u-\nu)\frac{\partial \dfrac{1}{i(u-\nu)\tilde{\omega}+\pi}}{\partial u} + i \frac{\partial \dfrac{1}{i(u-\nu)\tilde{\omega}+\pi}}{\partial v} = 0.$$

Pongasi

$$\pi = \frac{1}{\psi(v)} - \chi(v), \qquad \bar{\omega} = \frac{\chi(v)}{i(u-\nu)}$$

allora la (22) diventa

$$\psi(v) + i\frac{d\psi(v)}{dv} = 0,$$

onde integrando

$$\psi(v) = e^{iv},$$

cioè l'equazione differenziale (21) ammette la trasformazione infinitesimale

$$\delta u = [e^{-iv} - \chi(v)]\,\delta t$$

$$\delta v = \frac{\chi(v)}{i(u-\nu)}\,\delta t$$

ed il corrispondente fattore integrante è e^{iv}, quindi e^{-iv} è il fattore integrante della

$$du - i(u-\nu)dv = 0.$$

Volendo ora riferire i punti della superficie ad un sistema di coordinate simmetriche u_1, v_1 si porrà

$$\text{(23)} \qquad \begin{cases} A(u_1)du_1 = [du + i(u-\nu)dv]e^{iv} \\ B(v_1)dv_1 = [du - i(u-\nu)dv]e^{-iv}, \end{cases}$$

in virtù delle quali l'elemento lineare della superficie prende la forma data sopra (6, a) cioe

$$ds^2 = A(u_1)B(v_1)du_1\,dv_1$$

e le relazioni tra le coordinate u, v ed u_1, v_1 si ottengono integrando le (23); esse sono quindi

$$\int A\,du_1 = ue^{iv} - i\int \nu\, e^{iv}dv$$

$$\int B\,dv_1 = u e^{-iv} + i\int \nu e^{-iv}\,dv\,.$$

L'equazione (9) da doversi integrare è nel caso in esame,

$$\frac{4}{A.B}\,\frac{\partial\theta}{\partial u_1}\,\frac{\partial\theta}{\partial v_1} - 1 = 0\,,$$

ed il sistema di equazioni differenziali ordinarie che ad essa corrisponde è:

$$\frac{dp}{\frac{A'}{A}pq} = \frac{dq}{\frac{B'}{B}pq} = \frac{du_1}{q} = \frac{dv_1}{p}$$

dove $p = \frac{\partial\theta}{\partial u_1}$, $q = \frac{\partial\theta}{\partial v_1}$, si trova facilmente

$$\frac{\partial\theta}{\partial u_1} = \frac{a}{2}A\,, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v_1} = \frac{B}{2a}\,, \qquad a, \text{ costante arbitraria}$$

e però l'equazione delle curve parallele della superficie, espressa nelle coordinate u_1, v_1, è

$$\theta = \frac{a}{2}\int A\,du_1 + \frac{1}{2a}\int B\,dv_1 = \text{cost.}$$

Nel sistema di coordinate u, v, in virtù della nota relazione

$$e^{\pm v} = \cos v \pm i \operatorname{sen} v\,,$$

la stessa equazione diventa

$$\theta = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left[u\cos v + \int \nu \operatorname{sen} v\,dv\right] + \frac{i}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left[u\operatorname{sen} v - \int \nu\cos v\,dv\right] = \text{cost.}$$

Pongasi

$$a + \frac{1}{a} = 2k\,, \quad \text{segue} \quad a - \frac{1}{a} = 2i\sqrt{1-k^2}$$

ed affinchè l'elemento lineare $d\theta$ di una certa geodetica sia reale la costante k deve sceglersi in modo da aversi $1 - k^2 > 0$, si può quindi porre $k = \cos\alpha$ e l'equazione delle curve parallele diventa

$$\theta = u\cos(v + \alpha) + \int \mathrm{v}\,\mathrm{sen}\,(v + \alpha)\,dv = \text{cost.}$$

dove la costante α può essere positiva o negativa.

Pertanto l'equazione delle geodetiche è:

$$\theta_1 = \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = a'$$

cioè

$$u\,\mathrm{sen}\,(v + \alpha) - \int \mathrm{v}\cos(v + \alpha)\,dv = a'.$$

Se ω è l'angolo che fa nel punto (u, v) la geodetica (α, a') data sulla superficie con la generatrice passante per quel punto, si trova

$$\mathrm{tang}\,\omega + \mathrm{tang}(v + \alpha) = 0.$$

Come esempi di superficie sviluppabili considereremo le superficie coniche e le superficie cilindriche.

Superficie coniche. — Supponendo che il vertice della superficie sia l'origine delle coordinate cartesiane, detto v l'angolo che una generatrice fa con l'asse delle z e w l'angolo che un piano passante per lo stesso asse fa col piano zx, l'equazione $v = \text{cost}$, per un valore assegnato alla costante, rappresenterà *una* generatrice della superficie alloraquando w sia funzione data di v, in tal caso risolvendo l'equazione $w = \text{cost.}$ si otterranno tutte le intersezioni, reali o imaginarie, del piano considerato con la superficie; pertanto le equazioni della superficie sono:

$$x = u\,\mathrm{sen}\,v\cos w\,, \qquad y = u\,\mathrm{sen}\,v\,\mathrm{sen}\,w\,, \qquad z = u\cos v$$

dove u indica un segmento di generatrice misurato a partire dal vertice, il sistema di coordinate curvilinee sulla superficie è formato dalle generatrici $v = \text{cost.}$ e dalle intersezioni $u = \text{cost.}$ di sfere aventi i centri nel vertice del cono con la superficie data. L'elemento lineare della superficie ha la forma:

$$ds^2 = du^2 + \left[1 + \operatorname{sen}^2 v \left(\frac{dw}{dv}\right)^2\right] u^2 dv^2 \,;$$

ponendo

$$\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 v \left(\frac{dw}{dv}\right)^2}\, dv = dv_1$$

esso diventa:

$$ds^2 = du^2 + u^2 dv_1^2$$

che è della forma trovata sopra ove si ponga $\nu = 0$, quindi l'equazione delle curve parallele è

$$\theta = u \cos(v_1 + \alpha) = \text{cost.}$$

e quella delle geodetiche è

$$u \operatorname{sen}(v_1 + \alpha) = a'\,,$$

ponendo in quest'ultima per v_1 la sua espressione in funzione di v essa diventa:

$$u \operatorname{sen}\left[\int \sqrt{dv^2 + \operatorname{sen}^2 v\, dw^2} + \alpha\right] = a'.$$

Se ω è l'angolo fatto dalla geodetica (α, a') nel punto (u, v) con la generatrice che ivi passa si ha:

$$\operatorname{tang}\omega + \operatorname{tang}\left[\int \sqrt{dv^2 + \operatorname{sen}^2 v\, dw^2} + \alpha\right] = 0.$$

Pel cono di rotazione l'angolo v ha un valore costante β quindi $dv = 0$ e però si ha:

equazione delle geodetiche $\qquad u \operatorname{sen}(w \operatorname{sen}\beta + \alpha) = a'$

angolo ω $\qquad \operatorname{tang}\omega + \operatorname{tang}(w \operatorname{sen}\beta + \alpha) = 0.$

Superficie cilindriche. — Data una superficie cilindrica si può sempre supporre che le generatrici della stessa fossero parallele all'asse delle x di un sistema cartesiano-ortogonale, onde, se $z = F(y)$ è l'equazione della traccia del cilindro sul piano yz, indicando con u una lunghezza contata sulle generatrici a partire dal piano yz e con v la distanza di un punto della traccia dall'asse delle z, la superficie verrà rappresentata dalle equazioni

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = F(v).$$

Le curve $v =$ cost. sono generatrici della superficie ottenute per mezzo dell'intersezione dei piani $y =$ cost., $z =$ cost.; le curve $u =$ cost. sono trajettorie ortogonali delle generatrici cioè sezioni rette della superficie. L'elemento lineare, come è facile verificare, ha la forma:

$$ds^2 = du^2 + \left[1 + \left(\frac{dF}{dv}\right)^2\right] dv^2$$

cioè:

$$ds^2 = du^2 + dv'^2$$

ove si è posto

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dF}{dv}\right)^2}\, dv = dv'.$$

Scrivendo

$$du + i dv' = du_1, \qquad du - i dv' = dv_1$$

si trova

$$ds^2 = du_1 dv_1 .$$

Pertanto l'equazione che devesi integrare è la

$$4 \frac{\partial \theta}{\partial u_1} \frac{\partial \theta}{\partial v_1} - 1 = 0,$$

eseguendo l'integrazione trovasi facilmente

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_1} = \frac{a}{2}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial v_1} = \frac{1}{2a};$$

segue quindi che l'equazione delle curve parallele espressa nelle coordinate u, v' è

$$\theta = k u - \sqrt{1 - k^2}\, v' = \text{cost.},$$

dovendo però l'arco di geodetica essere reale si porrà $k = \cos\alpha$ onde si ha

$$\theta = u \cos\alpha - v' \operatorname{sen}\alpha = \text{cost.}$$

e però l'equazione delle geodetiche nelle primitive coordinate è:

$$u \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha \int \sqrt{1 + \left(\frac{dF}{dv}\right)^2}\, dv = a'.$$

Riguardo all'angolo ω fatto nel punto (u, v) dalla geodetica (α, a') con la generatrice che passa per quel punto si trova:

$$\operatorname{tang}\omega + \operatorname{tang}\alpha = 0.$$

8. Superficie di rivoluzione. — L'asse z di un sistema cartesiano-ortogonale sia l'asse della superficie, dicasi u la distanza di un punto del meridiano dall'asse e v l'angolo che il piano del meridiano fa col piano zx, allora le equazioni della superficie sono

$$x = u \cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = F(u).$$

Le curve $u = \text{cost.}$ sono i paralleli della superficie e le curve $v = \text{cost}$ ne sono i meridiani. L'elemento lineare è espresso dalla:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2\right] du^2 + u^2 dv^2.$$

Pongasi:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2}\, du = du'$$

allora sarà u^2 funzione di u' cioè $u^2 = \varphi(u')$ e l'elemento lineare prende la forma

$$ds^2 = du'^2 + \varphi(u') dv^2.$$

Sia (u_1, v_1) un sistema di coordinate simmetriche; si trasformeranno le coordinate u', v nelle u_1, v_1 mercè le relazioni:

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{2i\sqrt{\varphi}}[\sqrt{\varphi}\,dv + i\,du'] &= du_1,\\
\frac{1}{2i\sqrt{\varphi}}[\sqrt{\varphi}\,dv - i\,du'] &= dv_1,
\end{aligned}
$$

dalle quali si trova senza difficoltà:

$$\frac{du'}{\sqrt{\varphi}} = d(u_1 - v_1), \quad \text{onde integrando} \quad u_1 - v_1 = \int \frac{du'}{\sqrt{\varphi}},$$

inoltre, poichè u' è funzione di $u_1 - v_1$, si ha:

$$ds^2 = -4\varphi\, du_1\, dv_1 = \Phi(u_1 - v_1)\, du_1\, dv_1,$$

che è una delle forme dell'elemento lineare di una superficie già considerate dal sig. Lie. Pertanto l'equazione (9) diventa la

$$\frac{4}{\Phi(u_1 - v_1)} \frac{\partial\theta}{\partial u_1} \frac{\partial\theta}{\partial v_1} - 1 = 0,$$

procedendo all'integrazione di questa equazione col metodo sopra adoperato si trova:

$$\frac{\partial\theta}{\partial u_1} + \frac{\partial\theta}{\partial v_1} = 2a, \qquad \text{inoltre} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial u_1} \frac{\partial\theta}{\partial v_1} = \frac{\Phi}{4}$$

e però:

$$\frac{\partial\theta}{\partial u_1} = a + \sqrt{a^2 - \frac{\Phi}{4}}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v_1} = a - \sqrt{a^2 - \frac{\Phi}{4}}$$

quindi l'equazione delle curve parallele è la

$$\theta = a(u_1 + v_1) + \int \sqrt{a^2 - \frac{\Phi}{4}}\, d(u_1 - v_1) = \text{cost.}$$

Ora dalle (24) si ha $d(u_1 + v_1) = \frac{dv}{i}$ cioè $u_1 + v_1 = \frac{v}{i}$ e per la realtà dell'arco θ dovendo supporre la costante a puramente imaginaria, si trova facilmente per l'equazione delle curve parallele, nelle primitive coordinate u, v:

$$(25) \qquad \theta = av + \int \sqrt{1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2} \cdot \sqrt{u^2 - a^2}\, \frac{du}{u} = \text{cost.}$$

e per l'equazione delle geodetiche:

$$(26) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial a} = v - a \int \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2}}{\sqrt{u^2 - a^2}}\, \frac{du}{u} = a'.$$

Infine pel solito angolo ω fatto dalla geodetica (a, a') con una linea $v =$ cost. si trova:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

ed ancora

$$\operatorname{sen} \omega = \frac{a}{u}$$

la quale ultima relazione contiene un noto teorema di Clairaut.

Alisseide. — Fra le superficie di rivoluzione, a parte quelle del 2° ordine per le quali le ricerche riguardanti le loro geodetiche trovano compiuto svolgimento nella bella analisi che ne fa il sig. Halphen nel t. II, dell'opera di lui, *Traité des fonctions elliptiques* ecc., merita poi speciale menzione quella generata dalla rotazione di una *catenaria* attorno alla sua base, che è pure l'asse z di un sistema cartesiano-ortogonale, siffatta superficie vien detta perciò *catenoide* ed anche *alisseide*, essa è l'unica superficie *ad area minima*, o semplicemente *superficie minima*, di rivoluzione, vale a dire superficie tale che in ciascun punto della stessa i raggi principali di curvatura sono eguali e di segno contrario. Chiamando u la distanza di un punto del meridiano dall'asse, l'equazione della catenaria è .

$$(27) \qquad u = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{z}{b}} + e^{-\frac{z}{b}}\right);$$

da questa e dalla identità $e^{\frac{z}{b}}.e^{-\frac{z}{b}} = 1$ si trova

$$e^{\frac{z}{b}} = \frac{u + \sqrt{u^2 - b^2}}{b} \qquad e^{-\frac{z}{b}} = \frac{u - \sqrt{u^2 - b^2}}{b}$$

onde

$$e^{\frac{z}{b}} - e^{-\frac{z}{b}} = \frac{2\sqrt{u^2 - b^2}}{b}.$$

Derivando la (27) rispetto ad u, fatto $z = F(u)$, si ottiene:

$$1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2 = \frac{u^2}{u^2 - b^2}$$

da cui, introducendo una nuova variabile u',

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2}\, du = \frac{u\,du}{\sqrt{u^2 - b^2}} = du'$$

ed integrando si ha:

$$u^2 = u'^2 + b^2,$$

e però la forma dell'elemento lineare della superficie è:

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 - b^2} du^2 + u^2 dv^2 = du'^2 + (u'^2 + b^2) dv^2.$$

Tenuta presente l'equazione trovata (26) e facendo le opportune sostituzioni, tutte le possibili geodetiche della superficie vengono rappresentate dalla

$$v - a\int \frac{du}{\sqrt{(u^2 - a^2)(u^2 - b^2)}} = a',$$

e le loro trajettorie ortogonali, avuto riguardo alla (25), dalla

$$\theta = va + \int \frac{(u^2 - a^2)\,du}{\sqrt{(u^2 - a^2)(u^2 - b^2)}} = \text{cost.}$$

Gl'integrali che entrano nelle due ultime equazioni essendo ellittici, l'integrazione può avere effetto per funzioni ellittiche, a tal uopo osserviamo che il polinomio il quale trovasi sottoposto al segno radicale si riduce del 3° grado ponendo $u^2 = t$, e poichè così facendo le radici del polinomio risultante sono o, a^2, b^2, facendo la sostituzione

$$u^2 = \wp u + \frac{a^2 + b^2}{3} = \wp u - e_\gamma, \; (*)$$

si ottiene un polinomio del 3° grado in $\wp u$ il quale, a meno del fattore 4, coincide con $\wp'^2 u$, si hanno pertanto le relazioni.

$$u^2 - a^2 = \wp u + \frac{b^2 - 2a^2}{3} = \wp u - e_\alpha,$$

$$u^2 - b^2 = \wp u + \frac{a^2 - 2b^2}{3} = \wp u - e_\beta,$$

$$2\,u\,du = \wp' u\, du,$$

onde, sostituendo ed integrando, si trova per l'equazione delle curve parallele dell'alisseide.

$$\theta = av - \zeta(u) - e_\alpha u = \text{cost.}$$

e per l'equazione delle sue geodetiche:

$$v - a u = a',$$

a, a' sono costanti arbitrarie ed e_α è funzione di a. Nelle nuove quantità l'elemento lineare viene espresso dalla:

$$ds^2 = (\wp u - e_\alpha)(\wp u - e_\gamma)\,du^2 + (\wp u - e_\gamma)\,dv^2$$

(*) Per le formule, qui ed in seguito adoperate, riguardanti funzioni ellittiche, veggasi il t. I dell'interessante opera del sig. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*. La funzione $\zeta(u)$ coincide con la funzione $\zeta(u)$ studiata dal sudetto Autore nell'opera citata.

e l'angolo ω formato nel punto (u, v) dalla geodetica (a, a') e dalla curva $v = \text{cost.}$ passanti per quel punto è dato dalla:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{a}{\sqrt{\wp u - e_\alpha}}.$$

Se $v = \text{cost.}$ è una curva reale, per assicurare la realtà della geodetica e del suo arco deve essere

$$a^2 < b^2 < u^2 \qquad \text{ovvero} \qquad b^2 < a^2 < u^2.$$

Superficie a curvatura costante. — Fra le superficie di rivoluzione occorre considerarne ancora talune le quali sono a curvatura costante, positiva o negativa. Indichisi, come è solito farsi, con K la quantità che serve a misurare la curvatura totale di una superficie in un suo punto, supposto l'elemento lineare della superficie espresso in un sistema di coordinate simmetriche per mezzo della

$$ds^2 = 2F_1\, du_1\, dv_1,$$

la quantità K vien data dalla formula

$$K = -\frac{1}{F_1}\frac{\partial^2 \log F_1}{\partial u_1 \partial v_1} \tag{28}$$

la quale facilmente si trae dalla formula generale facendovi $E_1 = G_1 = 0$ (*). Ora supponghiamo che l'elemento lineare della superficie scritto in una forma analoga ad altra determinata dal sig. Lie, ma più generale, sia

$$ds^2 = \pm 4b^2(u_1 - v_1)^m\, du_1\, dv_1;$$

(*) Cfr. in proposito Bianchi, l. c. pag 135 ed anche Joachimsthal, *Anwendung der Diff.-u. Integralrechnung*, ecc. 2. Auflage, 1881, pag. 103.

facendo uso della (28), pel valore di K si trova

$$K = \mp \frac{m}{2b^2(u_1 - v_1)^{m+2}}$$

ove i segni si corrispondono. Pertanto K sarà costante cioè indipendente da u_1, v_1 quando $m + 2 = 0$ cioè quando $m = -2$, allora è

$$K = \pm \frac{1}{b^2}$$

e propriamente

$$K = + \frac{1}{b^2} \qquad \text{se} \qquad ds^2 = + 4b^2(u_1 - v_1)^{-2} du_1 dv_1 ,$$

$$K = - \frac{1}{b^2} \qquad \text{se} \qquad ds^2 = - 4b^2(u_1 - v_1)^{-2} du_1 dv_1 ,$$

nel primo di questi casi è in particolare $K = + 4$ se

$$ds^2 = (u_1 - v_1)^{-2} du_1 dv_1$$

la quale forma dell'elemento lineare apparisce tra quelle determinate dal sig. Lie.

Lasciando per ora da parte il caso delle superficie a curvatura costante positiva, fermiamoci a considerare quello delle superficie a curvatura costante negativa. Per queste superficie adunque l'elemento lineare è:

$$ds^2 = - \frac{4b^2}{(u_1 - v_1)^2} du_1 dv_1$$

cioè della forma

$$(29) \qquad ds^2 = \Phi(u_1 - v_1) du_1 dv_1 .$$

Intanto ponendo

$$2b du_1 = dv'' + i du'' , \qquad 2b dv_1 = dv'' - i du''$$

si trova

$$4b^2 du_1 dv_1 = du''^2 + dv''^2 , \qquad -b^2(u_1 - v_1)^2 = u''^2 ,$$

e però:

$$ds^2 = \frac{b^2(du''^2 + dv''^2)}{u''^2},$$

pongasi

$$\frac{du''}{u''} = -du, \qquad dv'' = dv,$$

si ha

$$ds^2 = b^2(du^2 + e^{2u}dv^2).$$

Se si pone in questa

$$b\,du = du', \quad b\,dv = dv'$$

si ha

(30) $$ds^2 = du'^2 + e^{2\frac{u'}{b}} dv'^2.$$

Le forme (29), (30) dell'elemento lineare, paragonate con quelle trovate a pag. 23, 24, mostrano, che la superficie considerata potrebbe essere applicabile sopra superficie di rivoluzione, essa per vero è la superficie generata dall'evolvente della catenaria (27) che ruota attorno al suo asintoto il quale coincide con la base della catenaria, siffatta curva si chiama *trattrice*, essa gode della proprietà che la porzione di tangente in un punto della curva, compresa fra il punto di contatto e l'asintoto, è costante per ogni punto della curva, ed eguale al parametro b della catenaria, dicesi perciò anche *curva dalle tangenti eguali*. Come la sfera è la più semplice forma di superficie a curvatura costante positiva, così la superficie che qui si considera è la più elementare tra quelle a curvatura costante negativa e prende il nome di *pseudosfera*. Essa appartiene al tipo di superficie pseudosferiche detto *parabolico*, vi hanno altri due tipi di siffatte superficie, cioè le superficie di tipo *ellittico* il cui elemento lineare ha la forma:

$$ds^2 = b^2\left[du^2 + \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 dv^2\right],$$

le superficie di tipo *iperbolico* il cui elemento lineare ha la forma

$$ds^2 = b^2\left[du^2 + \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 dv^2\right].$$

Per ulteriori particolari riguardanti le superficie pseudosferiche veggasi il corso di *Geometria differenziale* del prof. Bianchi non che l'opera più volte citata del sig. Darboux.

Frattanto, facendo uso di formole trovate per le superficie di rotazione si ottiene senza difficoltà l'equazione in termini finiti delle curve parallele tracciate sulla pseudosfera ed anche l'equazione delle sue geodetiche, esse sono:

curve parallele: $\theta = av + \int \frac{1}{e^u} \sqrt{b^2 e^{2u} - a^2}\, du = \text{cost.}$

curve geodetiche: $v - a \int \frac{du}{e^u \sqrt{b^2 e^{2u} - a^2}} = a'$.

Eseguendo le integrazioni si trova:

$$\theta = av + b \log \{ b e^u + \sqrt{b^2 e^{2u} - a^2} \} - \frac{1}{e^u} \sqrt{b^2 e^{2u} - a^2} = \text{cost.}$$

$$v - \frac{1}{a e^u} \sqrt{b^2 e^{2u} - a^2} = a'.$$

In modo analogo si possono trattare gli altri due tipi di superficie pseudosferiche; ponendo poi

$$\text{sen}^2 iu = t, \qquad \text{o pure} \qquad \cos^2 iu = t$$

si perviene in entrambi i casi ad integrali della forma

$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + bt + c}}, \quad \int \frac{dt}{t\sqrt{at^2 + bt + c}}.$$

9. Elicoidi. — Una superficie elicoide deve intendersi generata dal moto elicoidale di una curva attorno ad un asse, vale a dire da una curva i cui punti s'imaginano legati ad un punto mobile sopra di un'elica tracciata sulla superficie di un cilindro di rotazione avente per asse

quello dell'elicoide. Chiamando adunque *meridiano* o *profilo meridiano* la curva intersezione della superficie con un piano passante per l'asse, in un certo istante del movimento, può intendersi generata l'elicoide col moto elicoidale del suo profilo, ed allora mantenendo le notazioni adoperate nel caso delle superficie di rivoluzione, indicando con h il passo ridotto dell'elicoide, vale a dire il rapporto tra la velocità del moto di traslazione e quella del moto di rotazione, le equazioni della superficie sono:

$$x = u \cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = F(u) + hv.$$

L'elemento lineare di essa presentasi della forma:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dF}{du}\right)^2\right] du^2 + 2h\frac{dF}{du}du\,dv + (u^2 + h^2)dv^2,$$

ovvero ponendo:

$$\sqrt{1 + \frac{u^2}{u^2+h^2}\left(\frac{dF}{du}\right)^2}\,du = du', \qquad dv + \frac{h}{u^2+h^2}\frac{dF}{du}du = dv',$$

poichè allora $u^2 + h^2 = \varphi(u')$, si ha:

$$ds^2 = du'^2 + \varphi(u')dv'^2$$

che è la forma dell'elemento lineare delle superficie di rivoluzione, è noto infatti che le elicoidi sono superficie applicabili sopra quelle. È facile ricavare le espressioni di u, v, $F(u)$ per le u', v', veggasi in proposito il t. I dell'opera citata di Darboux, pag. 91. Servendosi delle formule trovate pel caso delle superficie di rivoluzione e facendo le opportune sostituzioni si trovano facilmente le equazioni delle geodetiche tracciate sulla superficie e delle loro trajettorie ortogonali, equazioni che per brevità si tralasciano di scrivere.

Se $z =$ cost. per tutti i punti del profilo meridiano, allora l'elicoide generata è l'*elicoide gobba a piano direttore*, in tal caso è $\frac{dF}{du} = 0$, posto $h = b$ si trova:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + b^2)\,dv^2$$

che è la forma dell'elemento lineare dell'alisseide, cioè l'elicoide gobba a piano direttore è applicabile sull'alisseide, dicesi perciò anche *elicoide rigata ad area minima.*

10. Paraboloide — È noto che per ogni punto dello spazio passano tre paraboloidi confocali, di cui due sono paraboloidi ellittici ed il terzo è un paraboloide iperbolico, le loro equazioni sono:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0,$$

$$(31) \qquad \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + 2z + \lambda = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} + 2z + \mu = 0.$$

Risolvendo queste equazioni rispetto ad x, y, z si trova

$$x^2 = -\frac{a^2(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)}{a^2 - b^2}$$

$$y^2 = -\frac{b^2(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)}{b^2 - a^2}$$

$$2z = (a^2 + b^2) - (\lambda + \mu)$$

Le equazioni $\lambda = \text{cost.}$, $\mu = \text{cost}$ rappresentano due sistemi di curve tracciate sulla superficie la cui equazione è la prima delle (31), e propriamente rappresentano le linee di curvatura di questa superficie.

Calcolando i coefficienti che entrano nell'espressione dell'elemento lineare della superficie si trova:

$$4E = \frac{\lambda(\lambda - \mu)}{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)}, \quad F = 0, \quad 4G = \frac{\mu(\mu - \lambda)}{(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)},$$

onde l'elemento lineare della superficie ha la forma.

$$ds^2 = \frac{\lambda - \mu}{4}\left[\frac{\lambda}{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)}\, d\lambda^2 - \frac{\mu}{(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)}\, d\mu^2\right].$$

Posto

$$\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}=d\alpha\,,\qquad \frac{\sqrt{-\mu}\,d\mu}{\sqrt{(a^2-\mu)(b^2-\mu)}}=d\beta\,,$$

l'espressione dell'elemento lineare diventa della forma

$$ds^2=[\varphi(\alpha)+\psi(\beta)](d\alpha^2+d\beta^2)$$

che è quella considerata da Liouville.

Pertanto nel caso in esame l'equazione differenziale $\Delta\theta=1$ è:

$$\frac{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}{\lambda}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2-\frac{\lambda}{4}=\frac{(a^2-\mu)(b^2-\mu)}{\mu}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2-\frac{\mu}{4}\,.$$

Adoperando i procedimenti soliti per venire alla sua integrazione, si trova:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2=\frac{\lambda(c^2+\lambda)}{4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}\,,\qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial\mu}\right)^2=\frac{\mu(c^2+\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)}\,.$$

Perciò l'equazione in termini finiti delle curve parallele tracciate sulla superficie è la:

$$(32)\qquad \begin{aligned}\theta=&\int\frac{\lambda(c^2+\lambda)}{\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2+\lambda)}}\,d\lambda\\ &\pm\int\frac{\mu(c^2+\mu)}{\sqrt{\mu(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2+\mu)}}=\text{cost.}\end{aligned}$$

e quella delle geodetiche, loro trajettorie ortogonali, è la $\frac{\partial\theta}{\partial c^2}=c'$, cioè la:

$$(33)\qquad \int\frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2+\lambda)}}\pm\int\frac{\mu\,d\mu}{\sqrt{\mu(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2+\mu)}}=c'.$$

Gl'integrali contenuti in queste equazioni sono ellittici, eseguiremo quindi le integrazioni indicate per mezzo delle funzioni ellittiche.

A tale uopo si ponga

$$\lambda = \frac{\tau^2}{\wp u - \wp w},$$

$$a^2 - \lambda = \frac{\tau^2(\wp u - e_\alpha)}{(e_\alpha - \wp w)(\wp u - \wp w)}, \quad b^2 - \lambda = \frac{\tau^2(\wp u - e_\beta)}{(e_\beta - \wp w)(\wp u - \wp w)},$$

$$c^2 + \lambda = \frac{\tau^2(\wp u - e_\gamma)}{(\wp w - e_\gamma)(\wp u - \wp w)},$$

da esse relazioni si trae

$$a^2 = \frac{\tau^2}{e_\alpha - \wp w}, \quad b^2 = \frac{\tau^2}{e_\beta - \wp w}, \quad c^2 = \frac{\tau^2}{\wp w - e_\gamma},$$

$$a^2 - b^2 = \frac{\tau^2 (e_\beta - e_\alpha)}{(e_\beta - \wp w)(e_\alpha - \wp w)},$$

in queste formule τ^2 è un fattore costante, $\wp u$, $\wp w$ sono funzioni degli argomenti u, w; e_α, e_β, e_γ sono le radici della equazione di 3° grado:

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0.$$

Dicasi R il polinomio di 4° grado in λ contenuto nei denominatori delle (32), (33), conoscendo le radici della equazione $R = 0$, prendendole in ordine crescente o decrescente che sia, sarà noto il valore del loro rapporto doppio vale a dire l'invariante assoluto $\frac{g_2^3}{g_3^2}$ o il *modulo* k delle funzioni ellittiche che si adoperano; inoltre la relazione

$$\frac{a^2}{a^2 - b^2} = \frac{\wp w - e_\beta}{e_\alpha - e_\beta}$$

permette di determinare w.

Ora, sostituendo in R le nuove espressioni dei fattori che lo compongono, si ha:

$$R = \frac{\tau^8}{(\wp u - \wp w)^4} \prod_\alpha \frac{\wp u - e_\alpha}{\wp w - e_\alpha} = \frac{\tau^8}{(\wp u - \wp w)^4} \frac{\wp'^2 u}{\wp'^2 w}$$

e però

$$(34) \qquad \frac{\lambda(c^2 + \lambda)\, d\lambda}{\sqrt{R}} = \mp \frac{\tau^2 (\wp u - e_\gamma)\, \wp' w\, du}{(\wp w - e_\gamma)(\wp u - \wp w)^2}$$

$$(35) \qquad \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{R}} = \mp \frac{\wp' w\, du}{\wp u - \wp w},$$

ma si ha:

$$\frac{-\wp' w}{\wp u - \wp w} = \zeta(u + w) - \zeta(u - w) - 2\zeta(w) \text{ (*)}$$

onde

$$\frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{R}} = \pm \left[\zeta(u + w) - \zeta(u - w) - 2\zeta(w)\right] du\,;$$

inoltre si ha:

$$\frac{\wp u - e_\gamma}{(\wp u - \wp w)^2} = \frac{\wp w - e_\gamma}{(\wp u - \wp w)^2} + \frac{1}{\wp u - \wp w}$$

quindi:

$$\frac{\wp' w(\wp u - e_\gamma)\, du}{(\wp w - e_\gamma)(\wp u - \wp w)^2} = \frac{1}{\wp' w}\left[\wp(u + w) + \wp(u - w) + 2\wp w\right] du$$

$$+ \left[\frac{\wp'' w}{\wp'^2 w} - \frac{1}{\wp w - e_\gamma}\right]\left[\zeta(u + w) - \zeta(u - w) - 2\zeta(w)\right] du$$

e ponendo

$$\frac{\wp'' w(\wp w - e_\gamma) - \wp'^2 w}{\wp' w(\wp w - e_\gamma)} = r$$

si ha:

(*) Per le formule che qui abbisogna richiamare cfr l'opera citata del sig. Halphen t. I, pag. 204, 205; la funzione ζ qui adoperata deve intendersi identica alla funzione ζ usata dal sig. Halphen.

$$\frac{\lambda(c^2+\lambda)d\lambda}{\sqrt{R}} =$$

$$\mp\frac{\tau^2}{p'w}\Big[p(u+w)+p(u-w)+2p(w)+r[\zeta(u+w)-\zeta(u-w)-2\zeta(w)]\Big]du,$$

di tal che, integrando, l'equazione delle curve parallele diventa, dopo facili trasformazioni,

$$\left[\frac{\sigma(u+w)}{\sigma(u-w)}e^{-2u\zeta(w)}\right]^{r} e^{-\zeta(u+w)-\zeta(u-w)+2up(w)}$$

$$\pm C\left[\frac{\sigma(v+w)}{\sigma(v-w)}e^{-2v\zeta(w)}\right]^{r} e^{-\zeta(v+w)-\zeta(v-w)+2vp(w)} = 0$$

dove C è la costante arbitraria e v è un argomento corrispondente al parametro μ.

Pongasi

$$\frac{\sigma(u+w)}{\sigma u\,\sigma w}e^{-u\zeta(w)} = \varphi(u,w), \qquad \frac{\sigma(u-w)}{\sigma u\,\sigma w}e^{u\zeta(w)} = -\varphi(u,-w)$$

dove $\varphi(u,w)$, $\varphi(u,-w)$ sono quindi funzioni di 2ª specie, allora l'equazione precedente diventa:

$$\left[\frac{\varphi(u,w)}{\varphi(u,-w)}\right] e^{-\zeta(u+w)-\zeta(u-w)+2up(w)} \pm C\left[\frac{\varphi(v,w)}{\varphi(v,-w)}\right]^{r} e^{-\zeta(v+w)-\zeta(v-w)+2vp(w)} = 0.$$

Operando in modo analogo servendosi dell'espressione trovata di

$$\frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{R}},$$

per l'equazione delle geodetiche si ha:

$$\frac{\varphi(u,w)}{\varphi(u,-w)} \pm C_1\frac{\varphi(v,w)}{\varphi(v,-w)} = 0.$$

Le espressioni che danno le coordinate di un punto della superficie per mezzo degli argomenti u, v sono:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{\tau_1^2}{e_\alpha-e_\beta}\cdot\frac{H}{K}\cdot\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)\sigma(u-\omega_\alpha)\sigma(v+\omega_\alpha)\sigma(v-\omega_\alpha)}{\sigma(u+w)\sigma(u-w)\sigma(v+w)\sigma(v-w)},$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{\tau_1^2}{e_\beta-e_\alpha}\cdot\frac{K}{H}\cdot\frac{\sigma(u+\omega_\beta)\sigma(u-\omega_\beta)\sigma(v+\omega_\beta)\sigma(v-\omega_\beta)}{\sigma(u+w)\sigma(u-w)\sigma(v+w)\sigma(v-w)},$$

$$2z=\tau_1^2\left[H_1\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma(u+w)\sigma(u-w)}+K_1\frac{\sigma(v+\omega_\beta)\sigma(v-\omega_\beta)}{\sigma(v+w)\sigma(v-m)}\right]$$

$$=\tau_1^2\left[H_1\frac{\sigma(v+\omega_\alpha)\sigma(v-\omega_\alpha)}{\sigma(v+w)\sigma(v-w)}+K_1\frac{\sigma(u+\omega_\beta)\sigma(u-\omega_\beta)}{\sigma(u+w)\sigma(u-w)}\right],$$

dove si è scritto:

$$\tau_1^2=\tau^2\frac{\sigma^4 w}{\sigma^2\omega_\alpha\sigma^2\omega_\beta},\qquad H=\frac{1}{\sigma(w+\omega_\alpha)\sigma(w-\omega_\alpha)},\qquad K=\frac{1}{\sigma(w+\omega_\beta)\sigma(w-\omega_\beta)}$$

$$H_1=H\sigma^2\omega_\alpha\sigma^2\omega_\beta,\qquad K_1=K\sigma^2\omega_\alpha\sigma^2\omega_\beta.$$

Agl'indici α, β, γ si debbono dare i valori 1, 2, 3; suppongansi, in ogni caso, le radici e_α, e_β, e_γ scritte in ordine crescente e si cerchi dentro quale de' quattro intervalli

$$(-\infty,e_1),\qquad(e_1,e_2),\qquad(e_2,e_3),\qquad(e_3,+\infty)$$

possono variare le funzioni pu, pv, pw affinchè i punti della superficie abbiano coordinate reali, ed affinchè l'arco di geodetica sia reale.

Osserviamo intanto che, in virtù delle poste relazioni, si può scrivere

$$x^2=-A^2(pw-e_\beta)(e_\alpha-e_\beta)(pu-e_\alpha)(pv-e_\alpha)(pu-pw)(pv-pw)$$

$$y^2=-B^2(pw-e_\alpha)(e_\beta-e_\alpha)(pu-e_\beta)(pv-e_\beta)(pu-pw)(pv-pw)$$

onde segue:

$$x^2 y^2 = - C^2 (\wp u\ \infty\ e_\alpha e_\beta)(\wp u\, \wp v\, e_\alpha e_\beta)$$

$$x^2 + y^2 = -(\wp u\ \infty\ \wp u\, \wp v)[A^2(\wp u - e_\beta)(e_\alpha - e_\beta)(\wp u - e_\alpha)(\wp v - e_\alpha)$$

$$+ B^2(\wp u - e_\alpha)(e_\beta - e_\alpha)(\wp u - e_\beta)(\wp v - e_\beta)];$$

per essere quindi x, y reali debbono essere x^2, y^2 positive e però i rapporti doppi $(\wp u\ \infty e_\alpha e_\beta)$, $(\wp u\, \wp v\, e_\alpha e_\beta)$ debbono avere segni contrari, inoltre per essere l'elemento di arco di geodetica reale, o $d\theta$ reale, le funzioni $\wp u$, $\wp v$, $\wp u$ debbono essere comprese fra intervalli tali delle radici i cui ranghi siano della stessa parità.

Supponghiamo da prima che abbiasi

$$(\wp u\ \infty\ e_\alpha e_\beta) > 0, \qquad (\wp u\, \wp v\, e_\alpha e_\beta) < 0$$

allora $\wp u$ deve essere esterna alla coppia e_α, e_β la quale poi deve separare la coppia $\wp u$, $\wp v$ ed essere separata da essa, quindi qualunque sia per essere la posizione della terza radice e_γ:

	$\wp v$ si troverà nel		2° o nel		3°	intervallo	
e però rispettiamente	$\wp u$	»	» 4°	» »	1°	»	
	$\wp u$	»	» 4°	» »	1°	»	

ma in tal caso i fattori di A^2, B^2 nella espressione che dà la somma $x^2 + y^2$ saranno entrambi negativi quindi deve essere:

$$(\wp u\ \infty\ \wp u\, \wp v) > 0$$

cioè $\wp u$ esterna a $\wp u$, $\wp v$.

Sia ora

$$(\wp u\ \infty\ e_\alpha e_\beta) < 0, \qquad (\wp u\, \wp v\, e_\alpha e_\beta) > 0$$

allora $\wp u$ resta compresa fra e_α, e_β e sarà nel 2° o nel 3° intarvallo;

saranno perciò $\wp u$, $\wp v$ entrambe comprese nel 4° o nel 1° intervallo od anche entrambe comprese nel 2° o nel 3° intervallo insieme a $\wp w$, però è facile vedere che ora i fattori di A^2, B^2 avranno entrambi segno positivo quindi deve essere

$$(\wp w \infty \wp u \wp v) > 0$$

cioè $\wp w$ deve essere compresa fra $\wp u$, $\wp v$.

Una più minuta disamina dei vari casi possibili riguardando più da vicino la natura della superficie e delle sue linee geodetiche, come ho detto in principio, sarà oggetto di altra Nota.

Palermo, aprile 1889.

M. L. Albeggiani.